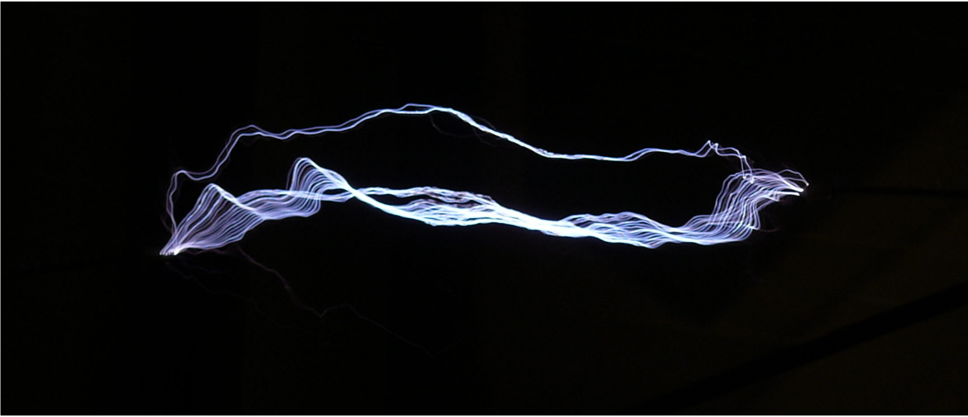
ulm university universität ulm



Elektrizitätslehre und Magnetismus

Othmar Marti | 08. 06. 2009 | Institut für Experimentelle Physik

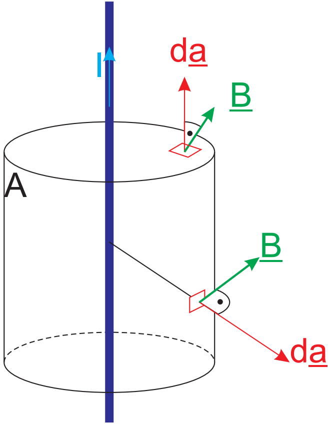
Physik, Wirtschaftsphysik und Lehramt Physik

Exkursion

Wir könnten eine Exkursion nach Garching zum Tokamak machen und dort uns über die Anwendung von Mikrowellen zur Heizung informieren.
Gibt es Interesse?
Was wären gute Zeiten für die Exkursion?

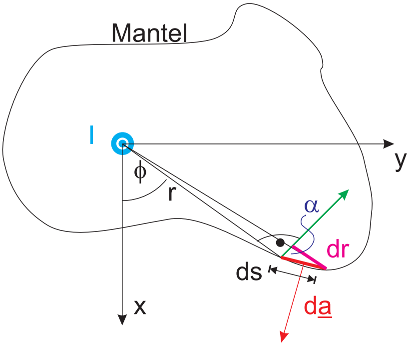
Quellenfreiheit

$$\iint_A \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{a} = 0$$



Integrationsfläche zur Analyse der Quellenfreiheit des Magnetfeldes

Quellenfreiheit



Integration über die Mantelfläche.

Quellenfreiheit

An der Mantelfläche gilt mit $da = h \cdot ds$

$$\boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{a} = B(r)\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) h \cdot ds = -B(r)\sin(\alpha)\, h \cdot ds$$

$$= -B(r) \cdot dr \cdot h = -B(r) \cdot \frac{dr}{d\phi} d\phi \cdot h = -B(r) \cdot r'(\phi) \cdot d\phi \cdot h$$

und damit

$$\iint\limits_{Mantel} \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{a} = -\frac{\mu_0 I h}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{r'(\phi)}{r(\phi)} d\phi = -\frac{\mu_0 I h}{2\pi} \ln(r(\phi))\Big|_0^{2\pi} = 0$$

Damit gilt auch für allgemeine Zylinderflächen

$$\iint\limits_A \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{a} = 0$$

Quellenfreiheit

Quellenfreiheit des Magnetfeldes

$$0 = \iint_A \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{a} = \iiint_{V(A)} \mathbf{div}\, \boldsymbol{B}\, dV$$

oder in differentieller Form

$$\mathbf{div}\, \boldsymbol{B} = 0$$

Vektorpotential, oder wie erfinde ich ein *B*-Feld?

In diesem Abschnitt wollen wir die Frage lösen: wie konstruiere ich eine magnetische Induktion $\boldsymbol{B}$ möglichst bequem? Das Rezept stammt aus der Elektrizitätslehre. Dort wurde gezeigt, dass aus einem beliebigen Potential $U(\boldsymbol{r})$ durch

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\,\mathbf{grad}\; U(\boldsymbol{r})$$

eindeutig ein elektrisches Feld $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ konstruiert werden kann, das dem Gesetz der Elektrostatik

$$\mathbf{rot}\; \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = 0$$

genügt. Grundlage war die Vektoridentität

$$\mathbf{rot}\;\left(\,\mathbf{grad}\; \mathfrak{F}(\boldsymbol{r})\right) \equiv 0$$

die für beliebige Funktionen $\mathfrak{F}(\boldsymbol{r})$ gilt . Es gibt unter den Rechenregeln für Vektorableitungen eine weiter Identität mit dem Nullvektor.

$$\mathbf{div}\;\left(\,\mathbf{rot}\; \boldsymbol{\mathfrak{F}}\,\right) = 0 \qquad \forall \boldsymbol{\mathfrak{F}}$$

Jedes Magnetfeld muss das *Ampèresche Gesetz* $\mathbf{rot}\; \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{i}$ und die Quellenfreiheit $\mathbf{div}\; \boldsymbol{B} = 0$ erfüllen. Analog zur Poissongleichung soll auch für das Magnetfeld eine Potentialgleichung gelten. Wir müssen also ein beliebiges Vektorfeld $\boldsymbol{A}$ wählen und die magnetische Induktion $\boldsymbol{B}$ gleich der Rotation von $\boldsymbol{A}$ setzten: dann ist die Divergenzfreiheit von $\boldsymbol{B}$ gewährleistet. Mit dem *Vektorpotential* $\boldsymbol{A}$

$$\boldsymbol{B}\,(x, y, z) = \;\mathbf{rot}\; \boldsymbol{A}\,(x, y, z)$$

werden beide Gleichungen erfüllt. Wegen der Vektoridentität

$$\mathbf{div}\;\left(\,\mathbf{rot}\; \boldsymbol{A}\right) = 0$$

Vektorpotential

Mit der zweiten Vektoridentität $\mathbf{rot}\,(\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}) = \mathbf{grad}\,(\mathbf{div}\,\boldsymbol{A}) - \Delta\boldsymbol{A}$ bekommen wir aus dem Ampèreschen Gesetz

$$\Delta\boldsymbol{A} - \mathbf{grad}\,(\mathbf{div}\,\boldsymbol{A}) = -\mu_0\boldsymbol{i}$$

Das *Vektorpotential* $\boldsymbol{A}$ kann immer so gewählt werden, dass $\mathbf{div}\,\boldsymbol{A} = 0$ gilt.
Das *Vektorpotential* ist nicht eindeutig bestimmt. Nehmen wir an, dass ein *Vektorpotential* mit $\mathbf{div}\,\boldsymbol{A} = f \neq 0$ existiert. Dann existiert auch ein Vektorfeld $\boldsymbol{V} = \mathbf{grad}\,\phi$ mit

$$\begin{aligned} \mathbf{div}\,\boldsymbol{V} &= f \\ \mathbf{rot}\,\boldsymbol{V} &= 0 \end{aligned}$$

mit einer eindeutigen Lösung, denn die obigen Gleichungen sind formal äquivalent zur *Elektrostatik*. Wir definieren ein *Vektorpotential*

$$\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{V}$$

Wegen

$$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}' = \mathbf{rot}\,\boldsymbol{A} - \mathbf{rot}\,\boldsymbol{V} = \mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}$$

Dies bedeutet, dass das neue *Vektorpotential* das gleiche $\boldsymbol{B}$-Feld erzeugt wie das ursprüngliche. Wegen gilt auch

$$\mathbf{div}\,\boldsymbol{A}' = \mathbf{div}\,\boldsymbol{A} - \mathbf{div}\,\boldsymbol{V} = f - f = 0$$

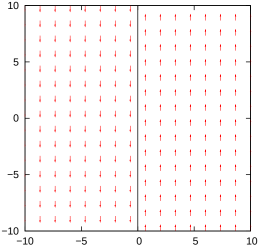
Vektorpotential

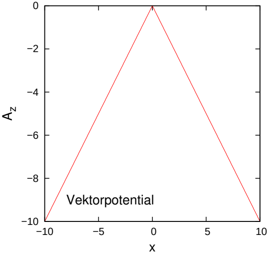
Zu jedem *Vektorpotential* $\boldsymbol{A}$ kann ein *Vektorpotential* $\boldsymbol{A}'$ gefunden werden, so dass $\mathbf{div}\,\boldsymbol{A}' = 0$ ist.

Das zu einer realen physikalischen Situation gehörende *Vektorpotential* $\boldsymbol{A}$ ist nicht eindeutig bestimmt. Die Wahl eines der zur gleichen Lösung von $\boldsymbol{B}$ gehörenden Potentiale nennt man *Eichung*

In der *Relativitätstheorie* und in der *Quantenmechanik* rechnet man bevorzugt mit dem *Vektorpotential*.

Vektorpotential und *B*-Feld einer Ebene





Darstellung von ***B*** *in einer $(z = const)$-Ebene. Die Strom-Ebene liegt bei $x = 0$.*

z-Komponente des Vektorpotentials einer unendlichen Stromdichte in z-Richtung in der $(x = 0)$-Ebene.

Vektorpotential

Das Vektorpotential

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\,\frac{\mu_0 I x z}{\pi\,(x^2+y^2)} \\ \frac{1}{2}\,\frac{\mu_0 I y z}{\pi\,(x^2+y^2)} \\ 0 \end{pmatrix}$$

ergibt das magnetische Feld für einen in der z-Richtung laufenden Strom I

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\,\frac{I y}{\pi\,(x^2+y^2)} \\ \frac{1}{2}\,\frac{I x}{\pi\,(x^2+y^2)} \\ 0 \end{pmatrix}$$

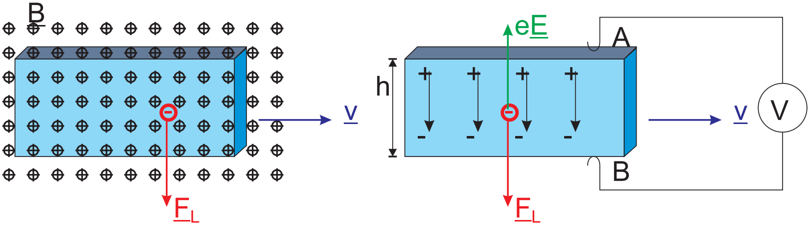
In Zylinderkoordinaten (r, θ, z) gehört zum Magnetfeld

$$\boldsymbol{H}(r, \theta, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}\,\frac{I}{\pi\, r} \\ 0 \end{pmatrix}$$

das Vektorpotential

$$\boldsymbol{A}(r, \theta, z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\,\frac{\mu_0 I z}{\pi\, r} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Hall-Effekt



Hall-Effekt