Aufgabenblatt zum Seminar 10

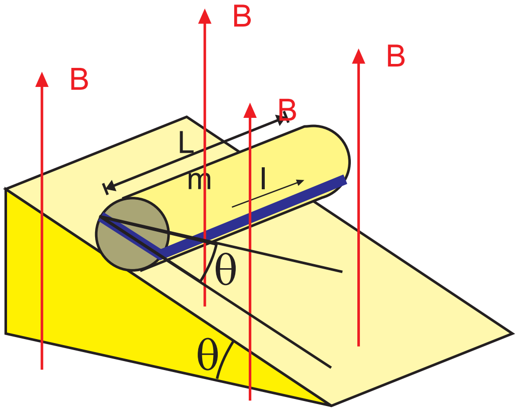
PHYS70357 Elektrizitätslehre und Magnetismus
(Physik, Wirtschaftsphysik, Physik Lehramt, Nebenfach Physik)

Othmar Marti, (othmar.marti@uni-ulm.de)

24. 06. 2009

1 Aufgaben

1. Wie in der Abbildung liegt ein Holzzylinder (Masse $m_Z = 0.25$ kg, Länge $\ell = 0.1$ m, Durchmesser $d = 0.01$ m) mit einer Drahtspule (Anzahl Windungen $N = 10$, parallel zur geneigten Unterlage) in einem vertikal ausgerichteten homogenen Magnetfeld mit der magnetischen Induktion $B = 0.5$ T.



   a) Wie gross muss der Strom I durch die Spule mindestens sein, damit der Zylinder nicht die schiefe Ebene (Winkel θ) hinunterrollt?

   b) Wie gross müsste I sein, dass das Erdmagnetfeld mit seiner magnetischen Induktion $B_E = 50$ µT das Rollen verhindert?

2. Eine Spule habe 12000 Windungen mit kreisförmigen Querschnitt (Radius $r = 0.6$ cm) auf einer Länge $\ell = 15$ cm.

   a) Wie gross ist die Induktivität L dieser Spule?

   b) Es fliesse in ihr ein (Gleich)strom $I = 13$ A, der von einer Spannungsquelle mit $U = 2$ V herrührt. Wie gross ist der magnetische Fluss in der Spule?

   c) Wie gross ist ihr Widerstand?

   d) Die angelegte Spannung wird exponentiell gegen Null gefahren mit einer Zeitkonstanten $\tau = 1$ s (Abfall auf $1/e$). Wie gross ist die induzierte Spannung?

   e) Wann beträgt die Gesamtspannung 0.01 V?

3. Eine Aluminiumscheibe (Radius $R = 20$ cm) rotiert mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ($\omega = 150\ \text{s}^{-1}$) in einem homogenen Magnetfeld mit $B = 1.2$ T, das senkrecht zur Scheibe gerichtet ist.

   a) Welche Potentialdifferenz besteht zwischen dem Drehpunkt und dem Rand der Scheibe?

b) Wozu könnte man diese Anordnung benutzen?

4. Eine Kompassnadel aus Eisen hat ein magnetisches Moment von $m_{Kompass} = 0.01\ \mathrm{A\,m^2}$ befinde sich im Erdmagnetfeld $\boldsymbol{B}_{Erde} = 50\ \mu\mathrm{T}$. Die Kompassnadel habe die Masse $m_K = 1$ g und die Länge $\ell = 0.05$ m. Der Haftreibungskoeffizient des Lagers sei $\mu_{HR} = 0.1$. Die Nadel liege ringförmig mit einem Durchmesser $D = 40\ \mu\mathrm{m}$ auf. Um welchen Winkel muss man die Kompassnadel aus der idealen Orientierung drehen, damit sie sich gegen die Haftreibung auf die Nordrichtung zurückbewegt?

5. Die unten stehende Abbildung zeigt elf verschiedene Bahnkurven von Teilchen in einem homogenen Magnetfeld, wie sie in einem teilchenphysikalischen Experiment gemessen werden können.

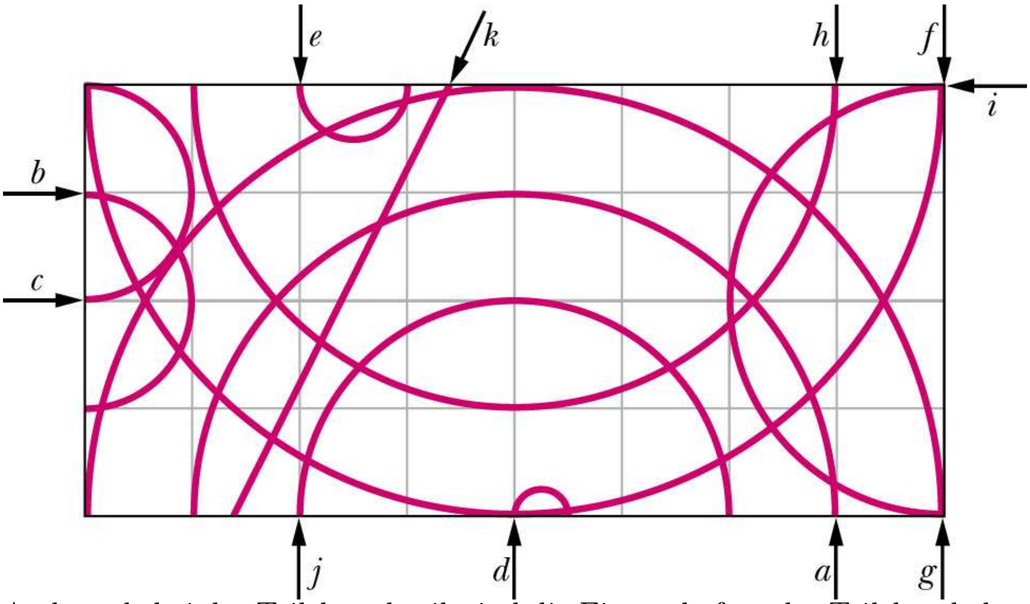


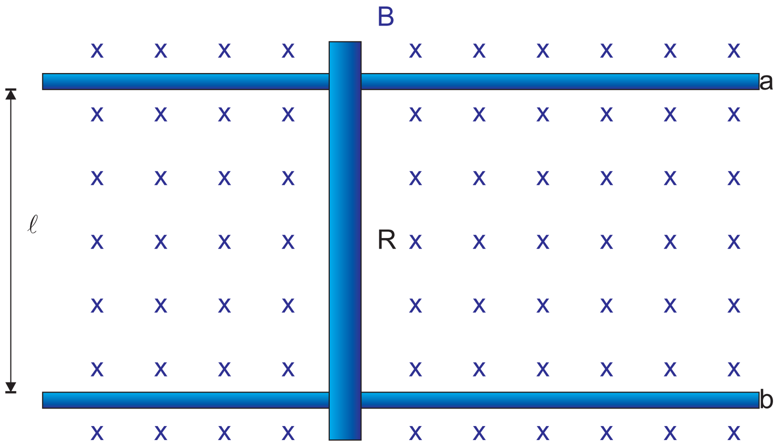
Abbildung aus Halliday, Resnick, Walker, Physik, Wiley Verlag, p. 833

Anders als bei der Teilchenphysik sind die Eigenschaften der Teilchen bekannt. Die unten stehende Tabelle gibt die Masse, die Ladung und die Geschwindigkeiten an.

Teilchen	Masse	Ladung	Geschwindigkeit
1	$2m$	q	v
2	$\frac{m}{2}$	q	$2v$
3	$3m$	$3q$	$3v$
4	$2m$	q	$2v$
5	m	$-q$	$2v$
6	m	$-2q$	$8v$
7	$3m$	0	$3v$
8	m	$2q$	v
9	m	$-4q$	v
10	m	$-q$	v
11	$2m$	$-2q$	$3v$

Ordnen Sie die Teilchenbahnen den Teilchen zu. Welche Bahn wäre in einer Nebelkammer nicht messbar?

6. Der Stab in der Abbildunghabe den Widerstand R. Der Widerstand der Schienen sowie die Kontaktwiderstände seien vernachlässigbar. An die Punkte a und b werde eine Spannungsquelle mit vernachlässigbarem Innenwiderstand so angeschlossen. Der Strom im Stab fliesst nach unten. Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei der Stab in Ruhe.

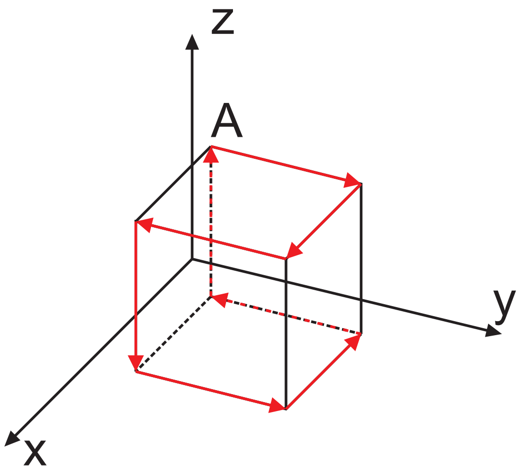


a) Bestimmen Sie die Kraft auf den Stab als Funktion der Geschwindigkeit v und formulieren Sie das zweite Newtonsche Gesetz für den Stab, wenn er die Geschwindigkeit v hat.

b) Zeigen Sie, dass der Stab eine endliche Endgeschwindigkeit erreicht, und stellen sie für diese eine Beziehung auf.

c) Wie gross ist die Stromstärke im Stab, wenn der Stab seine Endgeschwindigkeit erreicht?

7. Ein Strom $I = 6$ A fliesst entlang des angegebenen Weges um einen Würfel. Die Kantenlänge sei $\ell = 0.1$ m.



a) Berechnen Sie das magnetische Moment $\boldsymbol{m}$ dieses Weges.

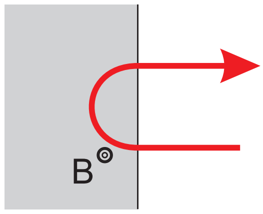
b) Berechnen Sie B an den Punkten $P_1 = (0, 5.0\ \mathrm{m}, 0)$ und $P_2 = (5.0\ \mathrm{m}, 0, 0)$.

8. Der Large-Electron-Proton-Beschleuniger (LEP) des CERN hat einen Umfang von 27 km. Angenommen, das Magnetfeld sei homogen entlang des Umfanges, wie gross müsste es sein um Elektronen mit dem Bruchteil β der Lichtgeschwindigkeit auf der Bahn zu halten?

9. In Wirklichkeit gibt es am LEP 4600 Magnete. Wie lang dürfen die Magnete maximal sein? Nehmen wir 10% Füllung an, d.h. die Magnete beanspruchen eine totale Länge von 2.7 km. Wie gross ist der Winkel pro Magnet? Was ist der äquivalente Radius? Was wäre das maximale β, wenn $B \leq 5T$ wäre?

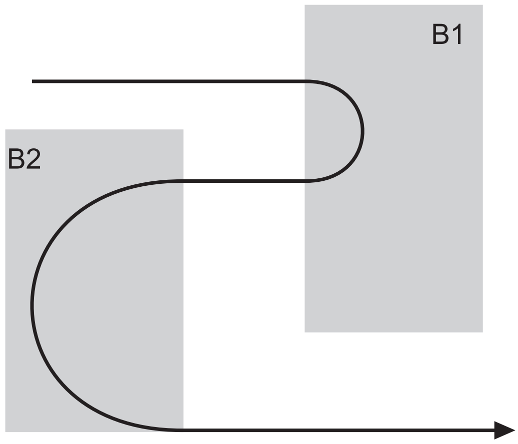
10. (Im Seminar 8 Minuten)

    Nach der Abbildung bewegt sich ein geladenes Teilchen im homogenen Magnetfeld $\boldsymbol{B}$.



Handelt es sich dabei um ein Proton oder ein Antiproton?

11. Ein Elektron fliegt durch zwei Gebiete mit homogen Magnetfeldern $\boldsymbol{B}_1$ und $\boldsymbol{B}_2$.



Im homogenen Magnetfeld durchläuft das Elektron jeweils einen Halbkreis. Beantworten Sie die Fragen

Antworten ankreuzen:

- Welches Magnetfeld ist dem Betrage nach grösser?
  ☐ B_1 ist grösser ☐ B_2 ist grösser ☐ B_1 und B_2 sind gleich
- Wie sind die Felder gerichtet?
  - ☐ B_1 nach oben gerichtet ☐ B_1 nach unten gerichtet
  - ☐ B_2 nach oben gerichtet ☐ B_2 nach unten gerichtet
- In welchem der Feldgebiete ist die Aufenthaltsdauer des Elektrons grösser:
  ☐ in B_1 ☐ in B_2 ☐ in beiden gleich

2 Lösungen

1. Das Drehmoment eines Dipols m im magnetischen Feld ist

$$T_{magn} = m \cdot B \cdot \sin\theta$$

wobei θ der Winkel zwischen dem magnetischen Feld und dem magnetischen Moment ist.

a) Das Drehmoment durch den Hangabtrieb ist

$$T_{Hang} = m_Z \cdot g \cdot sin\theta \cdot \frac{d}{2}$$

Diese beiden Momente müssen gleich sein, also

$$m_Z \cdot g \cdot sin\theta \cdot \frac{d}{2} = m \cdot B \cdot \sin\theta$$

oder

$$m = \frac{m_Z \cdot g \cdot \sin\theta \cdot d}{2B \cdot \sin\theta}$$

Nun ist das magnetische Moment

$$m = N \cdot I \cdot d \cdot L$$

Wir setzen ein

$$N \cdot I \cdot d \cdot L = \frac{m_Z \cdot g \cdot d}{2B}$$

und lösen nach I auf

$$I = \frac{m_Z \cdot g}{2N \cdot B \cdot L} = \frac{0.25\ \text{kg} \cdot 9.81\ \text{m/s}^2}{2 \cdot 10 \cdot 0.5\ \text{T} \cdot 0.1\ \text{m}} = 2.45\ \text{A}$$

b)

$$I = \frac{m_Z \cdot g}{2N \cdot B_E \cdot L} = \frac{0.25\ \text{kg} \cdot 9.81\ \text{m/s}^2}{2 \cdot 10 \cdot 50\ \mu\text{T} \cdot 0.1\ \text{m}} = 24500\ \text{A}$$

2. a) Die Induktivität L der (Luft)spule berechnet sich aus der Anzahl N der Windungen, dem Querschnitt A ($A = \pi r^2$ bei kreisförmigen) und der Spulenlänge ℓ zu

$$L = \mu_0 \cdot \frac{N^2}{\ell} \cdot A = 0.1364\ \text{H}$$

b) Der magnetische Fluss bei einem Strom $I = 13$ A beträgt

$$\phi = LI = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} A \cdot I = 1.7737\ \text{Wb}$$

c) Der ohmsche Widerstand beträgt $R = \frac{U}{I} = 0.1538\ \Omega$.

d) Die induzierte Spannung berechnet sich (mit $U = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$) zu

$$\begin{aligned} U_{ind} &= -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(LI) = -\frac{d}{dt}\left(L \cdot \frac{U}{R}\right) = -\frac{L}{R}\frac{dU}{dt} \\ &= +\frac{L}{R}\frac{1}{\tau}U_0 \cdot e^{-t/\tau} \end{aligned}$$

Die Gesamtspannung ist die Summe der Einzelspannungen, also

$$\begin{aligned} U_{ges} = U + U_{ind} &= U_0 e^{-t/\tau} + \frac{L}{R}\frac{1}{\tau}U_0 e^{-t/\tau} \\ &= U_0\left(1 + \frac{L}{R}\frac{1}{\tau}\right)e^{-t/\tau} \\ &= U_0\left(1 + \frac{\mu_0 N^2 \cdot \pi r^2}{\ell\, R\, \tau}\right)e^{-t/\tau} \end{aligned}$$

e) Die Spannung $U_x = 0.01$ V wird also zum Zeitpunkt

$$t_x = \tau \cdot \ln\left[\frac{U_0}{U_x}\left(1 + \frac{\mu_0 N^2 \cdot \pi r^2}{\ell\, R\, \tau}\right)\right] = 5.933222520 \text{ s}$$

erreicht.

3. Das rotierende Rad (Radius R) (mit ortsfesten Ladungen versehen) in einem konstanten Magnetfeld ist äquivalent zu ortsfesten Ladungen in einem rotierenden Magnetfeld. Die induzierte Spannung ist in diesem Fall (mit ω =Winkelgeschindigkeit der Rotation)

$$\begin{aligned} U &= -\frac{d}{dt}\phi = -\frac{d}{dt}\iint_A B dA \\ &= -\frac{d}{dt}\iint B d\varphi r dr = -B\int_{r=0}^{R}\frac{d\varphi}{dt} r dr \\ &= -B\omega\frac{R^2}{2} \end{aligned}$$

Mit den angegebenen Zahlenwerten ergibt sich

$$U_{ind} = -3.6 \text{ V}$$

Dies stellt eine Wirbelstrombremse dar, da die induzierte Spannung einen Stromfluss bewirkt und dadurch ein Magnetfeld, das dem „Erzeugenden“ entgegengesetzt ist.

4. Mit $m_{Kompass}$ wird das Drehmoment

$$T = m_{Kompass} B \sin\theta$$

Dieses Drehmoment wirkt auf das Lager. Das durch die Haftreibungskraft hervorgerufene Drehmoment ist

$$T_{Lager} = m_K \cdot g \cdot \mu_{HR} \cdot \frac{D}{2}$$

Daraus kann man den Winkel berechnen

$$\sin\theta = \frac{m_K \cdot g \cdot \mu_{HR} \cdot D}{2m_{Kompass} \cdot B} = \frac{10^{-3}\ \mathrm{kg} \cdot 9.81\ \mathrm{m/s^2} \cdot 0.1 \cdot 4 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{m}}{2 \cdot 0.01\ \mathrm{A\,m^2} \cdot 5 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{T}} = 0.04$$

oder

$$\theta = 2.2^\circ$$

Die Grösse des magnetischen Momentes kann zum Beispiel so berechnet werden: Wir nehmen an, dass die Kompassnadel aus Eisen sei und aus zwei gleichschenkligen Dreiecken mit der Basis 5 mm und der Höhe 25 mm zusammengesetzt sei. Die Dicke sei 1 mm. Mit der Dichte von 8 g/cm^3 folgt $m = 1$ g. Eisen hat 55.847 g/mol. Mit der Avogadrozahl $6 \cdot 10^{23}$ mol^{-1} folgt, dass es 10^{22} Atome in der Kompassnadel gibt. Jedes Atom trägt ein magnetisches Moment von $1\mu_B = 9.27 \cdot 10^{-24}$ $A\,m^2$. Das maximale magnetische Moment erhält man, wenn alle Atome ausgerichtet sind $\mu_{max} = 0.1$ $A\,m^2$. Wir nehmen an, dass 10 % der atomaren Spins ausgerichtet sind und erhalten damit $m_{Kompass} = 0.01$ $A\,m^2$.

5. Bahnen in Magnetfeldern werden durch

$$F_z = \frac{mv^2}{r} = F_L = qvB$$

gegeben. Also ist

$$r = \frac{mv}{qB}$$

Im folgenden setzen wir $B = 1$ und beziehen alles auf die Grössen m, v und q.

Teilchen	Masse/m	Ladung/q	Geschwindigkeit/v	$r = \frac{mv}{q}$
1	2	1	1	2
2	$\frac{1}{2}$	1	2	1
3	3	3	3	3
4	2	1	2	4
5	1	-1	2	-2
6	1	-2	8	-4
7	3	0	3	∞
8	1	2	1	$\frac{1}{2}$
9	1	-4	1	$-\frac{1}{4}$
10	1	-1	1	-1
11	2	-2	3	-3

Aus der Zeichnung erhalten wir (inkl. Zuordnung)

Bahn	Durchmesser	Zuordnung/q
a	$+6$	3
b	-2	10
c	$+2$	2
d	$-\frac{1}{2}$	9
e	$+1$	8
f	-8	6
g	$+8$	4
h	-6	11
i	4	1
j	-4	5
k	∞	7

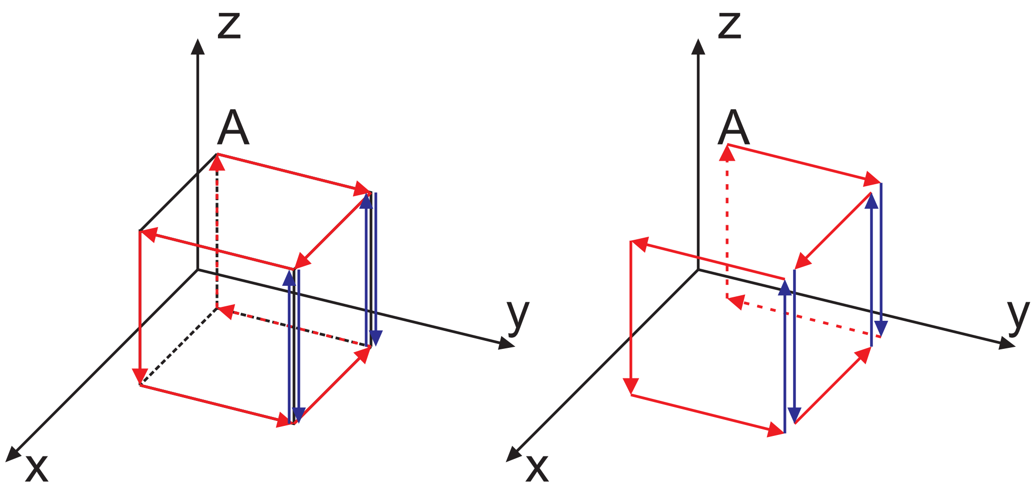
Bahn k ist nicht messbar, da ungeladene Teilchen keine Kondensation in der Nebelkammer bewirken.

6. a) Wir berechnen zunächst den durch den Stab fliessenden Strom. Die Spannungsquelle liefert eine Spannung U, und der Stab induziert aufgrund seiner Bewegung eine Gegenspannung mit dem Betrag $B\ell v$. Also ist die resultierende Spannung $U - B\ell v = IR$. Daraus folgt $I = (U - B\ell v)/R$. Wegen dieses Stromes im Stab wirkt auf ihn durch das magnetische Feld die Kraft $F = I\ell B = (U - B\ell v) B\ell/R = ma$.

   b) Die Endgeschwindigkeit v_e tritt auf, wenn $F = 0$ ist, also wenn gilt $U - B\ell v_e = 0$. Daraus folgt $v_e = U/(B\ell)$.

   c) Bei der Endgeschwindigkeit ist der Strom im Stab $I = (U - B\ell v_e)/R = 0$.

7. Wir addieren an zwei Kanten zweimal den Strom $0 = I - I$ und erhalten drei unabhängige gleiche Kreisströme.



   a) Wenn $\boldsymbol{e}_x$ der Einheitsvektor in die x-Richtung ist, bekommen wir

$$\boldsymbol{m} = \boldsymbol{m}_{+x} + \boldsymbol{m}_{+y} + \boldsymbol{m}_{-x} = \boldsymbol{m}_{+y} = I\ell^2 \cdot \boldsymbol{e}_y = 6\ \mathrm{A} \cdot 0.01\ \mathrm{m}^2 \cdot \boldsymbol{e}_y = 0.06\ \mathrm{A\,m}^2 \cdot \boldsymbol{e}_y$$

   b) Die beiden Punkte sind weit weg vom Würfel. Also ist

$$\boldsymbol{B}(0, 5.0\ \mathrm{m}, 0) \approx \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{\boldsymbol{m}}{r^3} = \frac{1.26 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{Tm/A} \cdot 0.06\ \mathrm{A\,m}^2}{2\pi \cdot 5^3\ \mathrm{m}^3} \cdot \boldsymbol{e}_y = 9.6 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{T} \cdot \boldsymbol{e}_y$$

   Magnetische Dipole verhalten sich analog zu elektrischen Dipolen. Im zweiten Falle ist die Verbindungslinie vom Messpunkt senkrecht zur Richtung des Dipols. Vom elektrischen Dipol wissen wir, dass in dem Falle die E-Feld-Komponente antiparallel zur Dipolachse halb so gross ist wie für einen Punkt im gleichen Abstand auf der Achse. Also ist

$$\boldsymbol{B}(5.0\ \mathrm{m}, 0, 0) \approx -\frac{1}{2}\frac{1.26 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{T\,m/A} \cdot 0.06\ \mathrm{A\,m}^2}{2\pi \cdot 5^3\ \mathrm{m}^3} \cdot \boldsymbol{e}_y = -4.8 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{T} \cdot \boldsymbol{e}_y$$

8. Der Radius ist

$$r = \frac{U}{2\pi}$$

Die Lorentzkraft ist gleich der durch der Geometrie bedingten Zentripetalkraft.

$$m(v)\frac{v^2}{r} = qvB$$

Die geschwindigkeitsabhängige Masse ist

$$m(v) = m_0 \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

also

$$B = \frac{m_0 v}{qr\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Mit $\beta = v/c$ erhalten wir

$$B = \frac{2\pi m_0 c\beta}{qU\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Zum Beispiel mit $\beta = 0.999999$ erhalten wir $B = 0.28$ mT

9. Bei einer Länge von $U = 27$ km und 4600 Magneten stehen für jeden Magneten

$$\ell_{max} = 27000 \text{ m}/4600 = 5.870 \text{ m}$$

zur Verfügung. Der Füllfaktor von 10% bedeutet, dass jeder Magnet

$$\ell = \ell_{max}/10 = 0.5870 \text{ m}$$

lang ist.

Jeder Magnet ändert die Bahn um den Winkel

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{4600} = 0.001366 \mathrel{\hat{=}} 0.07826^\circ$$

Zur Berechnung des Magnetfeldes kann angenommen werden, dass der Umfang nun $\hat{U} = 2.7$ km ist. Aufgelöst erhalten wir

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4\pi^2 c^2}{q^2 U^2 B^2}}}$$

Eingesetzt erhalten wir (mit 20 signifikanten Stellen)

$$\beta = 0.99999999999996496480$$

10. Dies ist ein Proton.

11.

Antworten ankreuzen:

- Welches Magnetfeld ist grösser?
  ☒ B_1 ist grösser ☐ B_2 ist grösser ☐ B_1 und B_2 sind gleich
- Wie sind die Felder gerichtet?
  - ☐ B_1 nach oben gerichtet ☒ B_1 nach unten gerichtet
  - ☒ B_2 nach oben gerichtet ☐ B_2 nach unten gerichtet
- In welchem der Feldgebiete ist die Aufenthaltsdauer des Elektrons grösser:
  ☐ in B_1 ☒ in B_2 ☐ in beiden gleich