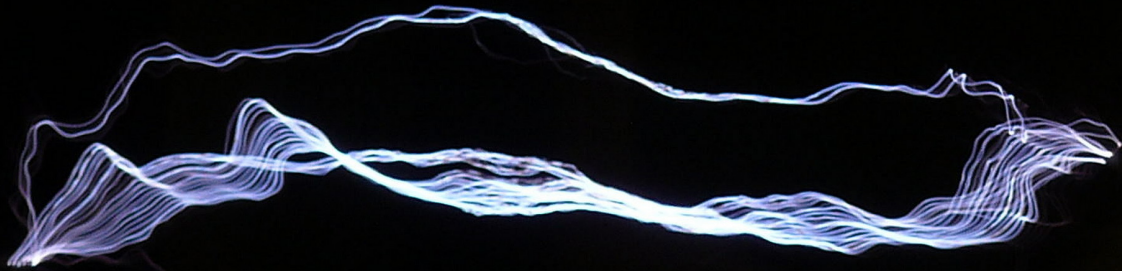




ulm university universität  
**uulm**

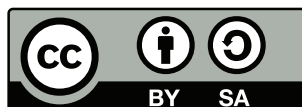


# **Vorlesungsskript**

## **PHYS1100.0 Elektrizität und Magnetismus**

### **Bachelor Physik, Wirtschaftsphysik, Lehramt Physik**

Othmar Marti  
Institut für Experimentelle Physik, Universität Ulm  
veröffentlicht unter



[Lizenzinformationen](#)

7. Juli 2022



# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Einleitung</b>	<b>9</b>
1.1. Lizenzinformationen . . . . .	9
1.2. Dank . . . . .	10
<b>2. Elektrostatik</b>	<b>11</b>
2.1. Elektrische Ladung und Coulombsches Gesetz . . . . .	12
2.2. Das elektrische Feld . . . . .	15
2.3. Zusammenhang zwischen Ladung und Feld: das Gauss'sche Gesetz . . . . .	18
2.3.1. Dipole in elektrischen Feldern . . . . .	21
2.4. Elektrische Felder von Leitern . . . . .	22
2.4.1. Influenz und Bildladung . . . . .	29
2.5. Elektrostatisches Potential . . . . .	30
2.6. Poisson-Gleichung . . . . .	38
2.7. Kapazität: eine geometrische Eigenschaft . . . . .	39
2.8. Energie des elektrischen Feldes . . . . .	44
2.8.1. Diskussion Versuch Flächenladungsdichte . . . . .	46
2.9. Elektrische Eigenschaften der Materie . . . . .	47
2.9.1. Dielektrika . . . . .	50
2.9.1.1. Woher rührt $\epsilon > 1$ ? . . . . .	51
2.9.1.2. Stetigkeitsbedingungen an der Grenze zweier Dielektrika . . . . .	52
2.9.1.3. Das Gesetz von Clausius und Mosotti . . . . .	53
2.9.1.4. Kondensator gefüllt mit Dielektrikum . . . . .	55
2.9.2. Elektrische Phänomene . . . . .	56
2.9.2.1. Flüssigkeit im Kondensator, $Q = \text{const}$ . . . . .	58
2.10. Zusammenfassung: die Grundgleichungen der Elektrostatik . . . . .	60
<b>3. Elektrische Ströme</b>	<b>65</b>
3.1. Die Kontinuitätsgleichung und der Begriff des Stromes . . . . .	66
3.2. Das Ohmsche Gesetz . . . . .	71
3.3. Elektromotorische Kraft und Joulsche Wärme . . . . .	77
3.4. RC-Stromkreise . . . . .	79
3.5. Schaltungen und Bauelemente . . . . .	82
3.5.1. Grafische Methode zur Bestimmung von Arbeitspunkten . . . . .	85
3.5.2. Transistoren . . . . .	88
3.6. Magnetfeld und Lorentzkraft . . . . .	92
3.7. Die magnetische Kraft . . . . .	93
3.7.1. Ladungsinvarianz bewegter Bezugssysteme . . . . .	94
3.7.2. Relativistische Berechnung . . . . .	95
3.7.3. Magnetisches Feld . . . . .	98
3.8. Eigenschaften des magnetischen Feldes . . . . .	99
3.8.1. Eigenschaften des B-Feldes . . . . .	99

3.8.2.	Das Biot-Savart-Gesetz . . . . .	102
3.8.2.1.	Kraft auf Leiterschleife im homogenen Magnetfeld . . . . .	103
3.8.3.	Das Ampèresche Durchflutungsgesetz . . . . .	107
3.8.3.1.	Zylindrischer Leiter mit homogenem STROM . . . . .	109
3.8.4.	Quellenfreiheit . . . . .	112
3.8.5.	Das B-Feld einer beliebigen Stromverteilung . . . . .	114
3.9.	Hall-Effekt . . . . .	121
3.10.	Die Lorentz-Transformation der Felder E und B . . . . .	122
3.11.	Lorentztransformation für allgemeine Felder und Geschwindigkeiten . . . . .	127
3.12.	Zusammenfassung: Ströme . . . . .	128
<b>4.</b>	<b>Elektrodynamik</b>	<b>133</b>
4.1.	Das Faradaysche Induktionsgesetz . . . . .	133
4.1.1.	Eine bewegte Leiterschleife in einem stationären B-Feld . . . . .	133
4.1.2.	Der magnetische Fluss . . . . .	134
4.1.3.	Induktionsgesetz von Faraday, Integral- und Differentialform . . . . .	137
4.1.4.	Wirbelströme . . . . .	141
4.1.5.	Unendlich lange Spule . . . . .	143
4.1.6.	Endlich lange Spule . . . . .	145
4.1.7.	Transformator . . . . .	147
4.1.8.	Kirchhoffsche Gesetze . . . . .	152
4.1.9.	Wechselstromkreise, Impedanzen . . . . .	153
4.1.9.1.	Widerstand im Wechselstromkreis . . . . .	153
4.1.9.2.	Widerstand im Wechselstromkreis, komplex . . . . .	155
4.1.9.3.	Impedanz einer Spule . . . . .	156
4.1.9.4.	Impedanz einer Spule: komplex . . . . .	157
4.1.9.5.	Impedanz eines Kondensators . . . . .	159
4.1.9.6.	Impedanz eines Kondensators: komplex . . . . .	160
4.1.9.7.	Idealer elektrischer Schwingkreis . . . . .	160
4.1.9.8.	Idealer elektrischer Schwingkreis: komplex . . . . .	161
4.1.9.9.	Gedämpfter elektrischer Schwingkreis . . . . .	162
4.1.9.10.	Gedämpfter elektrischer Schwingkreis: komplex . . . . .	163
4.1.10.	Elektromotoren . . . . .	166
4.1.10.1.	Rotierende Leiterschleife als Generator . . . . .	167
4.1.10.2.	Rotierende Leiterschleife als Nebenschlussmotor . . . . .	167
4.1.10.3.	Rotierende Leiterschleife als Hauptschlussmotor . . . . .	170
4.1.11.	Betatron . . . . .	173
4.1.12.	Skineffekt . . . . .	175
4.2.	Energie des Magnetfeldes . . . . .	178
4.3.	Magnetische Eigenschaften der Materie . . . . .	179
4.3.1.	Kugeln im inhomogenen Magnetfeld . . . . .	180
4.3.2.	Der Satz von Larmor . . . . .	182
4.3.3.	Diamagnetismus . . . . .	186
4.3.4.	Magnetisierung . . . . .	188
4.3.5.	Das magnetische Moment des Elektrons: Spin . . . . .	189
4.3.6.	Paramagnetismus . . . . .	191
4.3.7.	Ferromagnetismus . . . . .	193
4.4.	Zusammenfassung: zeitlich veränderliche Magnetfelder . . . . .	197

<b>5. Die Maxwellschen Gleichungen</b>	<b>203</b>
5.1. Was wissen wir? . . . . .	203
5.2. Auflösung des Widerspruchs zur Kontinuitätsgleichung, Maxwellgleichungen . . . . .	203
5.3. Maxwellgleichungen . . . . .	204
5.4. Maxwellgleichungen in isotropen zeitunabhängigen Medien . . . . .	206
5.5. Anwendung der Maxwellgleichungen . . . . .	207
<b>6. Elektromagnetische Wellen</b>	<b>209</b>
6.1. Die Wellengleichung im Vakuum . . . . .	209
6.2. Allgemeine Lösung der Wellengleichung . . . . .	211
6.3. Elektromagnetische Wellen im Doppelleitersystem . . . . .	213
6.3.1. Wellenwiderstand . . . . .	218
6.3.2. Stehende Wellen . . . . .	220
6.4. Poynting-Vektor und Energiefluss . . . . .	221
6.4.1. Energiefluss bei stehenden Wellen . . . . .	222
6.5. Elektromagnetische Wellen im Raum . . . . .	222
6.5.1. Ebene Wellen . . . . .	227
6.5.2. Kugelwellen . . . . .	228
6.6. Lichtgeschwindigkeit im Medium und Intensität . . . . .	229
6.7. Polarisation . . . . .	230
6.7.1. Polarisation durch Absorption (Dichroismus) . . . . .	231
6.8. Die Fresnelschen Formeln . . . . .	232
6.8.1. s-Polarisation . . . . .	238
6.8.2. p-Polarisation . . . . .	241
6.8.3. Grenzfall des senkrechten Einfall es . . . . .	245
6.8.4. Brewster-Winkel . . . . .	248
6.8.5. Beispielkurven für die Fresnelformeln . . . . .	251
6.8.6. Energiefluss senkrecht zur Grenzfläche . . . . .	253
6.8.7. Felder und Intensitäten bei senkrechtem Einfall . . . . .	256
6.8.8. Evaneszente Wellen . . . . .	257
6.9. Zusammenfassung . . . . .	260
<b>A. Literaturhinweise</b>	<b>265</b>
<b>B. Begriffe</b>	<b>267</b>
<b>C. Mathematische Sätze</b>	<b>275</b>
C.1. Ableitung . . . . .	275
C.2. Differentiationsregeln . . . . .	276
C.3. Differentiation einfacher Funktionen . . . . .	277
C.4. Taylorreihe und Reihen . . . . .	278
C.5. Einige Reihen . . . . .	279
C.6. Ableitungen zur näherungsweisen Berechnung von Funktionswerten . . . . .	280
C.7. Vektoren . . . . .	283
C.7.1. Gesetze . . . . .	284
C.7.1.1. Orthogonalität zweier Vektoren testen . . . . .	284
C.7.2. Eigenschaften von Kurven im Raum . . . . .	285

C.8. Vektoridentitäten . . . . .	286
C.8.1. Produkte mit Vektoren . . . . .	286
C.8.2. Ableiten von Vektoren . . . . .	287
C.8.3. Vektorableitungen bei Skalarfeldern . . . . .	288
C.8.4. Vektorableitungen bei Vektorfeldern . . . . .	288
C.8.5. Graphische Darstellung der Ableitungen in drei Dimensionen . . . . .	290
C.8.5.1. Gradient in kartesischen Koordinaten . . . . .	290
C.8.5.2. Divergenz in kartesischen Koordinaten . . . . .	291
C.8.5.3. Rotation in kartesischen Koordinaten . . . . .	292
C.8.6. Totale Ableitung bei mitgeführten Koordinatensystemen . . . . .	294
C.9. Satz von Gauss . . . . .	295
C.10. Satz von Green . . . . .	296
C.11. Satz von Stokes . . . . .	296
<b>D. Rechnen mit Integralen . . . . .</b>	<b>297</b>
D.1. Integration . . . . .	297
D.2. Unbestimmte Integrale . . . . .	299
D.2.1. Bestimmte Integrale und Integrale mit variabler oberer Grenze . . . . .	299
D.3. Berechnung von Linienintegralen . . . . .	300
D.4. Die Diracsche Deltafunktion . . . . .	301
<b>E. Umrechnung zwischen Koordinatensystemen . . . . .</b>	<b>305</b>
E.1. Vom kartesischen ins sphärische System . . . . .	306
E.2. Vom sphärischen ins kartesische System . . . . .	306
E.3. Vom kartesischen ins zylindrische System . . . . .	306
E.4. Vom zylindrischen ins kartesische System . . . . .	307
E.5. Vom sphärischen ins zylindrische System . . . . .	307
E.6. Vom zylindrischen ins sphärische System . . . . .	308
<b>F. Geschwindigkeiten und Beschleunigungen in Kugelkoordinaten . . . . .</b>	<b>309</b>
F.1. Geschwindigkeiten . . . . .	311
F.2. Beschleunigung . . . . .	314
F.2.1. Interpretation . . . . .	319
<b>G. Berechnungen in ebenen schiefwinkligen Dreiecken . . . . .</b>	<b>321</b>
<b>H. Berechnung der Ableitung in rotierenden Bezugssystemen . . . . .</b>	<b>323</b>
<b>I. Drehungen . . . . .</b>	<b>327</b>
I.1. Drehmatrizen . . . . .	327
I.2. Drehung von Vektoren und Matrizen (oder Tensoren) . . . . .	328
I.3. Allgemeine Drehung mit Eulerwinkeln . . . . .	329
<b>J. Berechnung elektrischer Felder . . . . .</b>	<b>331</b>
J.1. In der Nähe eines Leiterstückes . . . . .	331
J.2. Auf der Symmetrieachse einer Kreisscheibe . . . . .	334
J.3. Innerhalb und ausserhalb einer geladenen Zylinderfläche . . . . .	336
J.4. In allen Bereichen zweier coaxialer zylinderförmiger Leiter . . . . .	337

<b>K. Lorentztransformationen</b>	<b>339</b>
K.1. Lorentztransformationen für die magnetische Induktion . . . . .	339
K.2. Lorentztransformation für das magnetische Feld . . . . .	340
<b>Liste der Experimente</b>	<b>343</b>
<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>349</b>
<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>351</b>
<b>Glossar</b>	<b>353</b>
<b>Abkürzungen</b>	<b>355</b>
<b>Referenzen</b>	<b>362</b>
<b>Stichwortverzeichnis</b>	<b>370</b>





# 1. Einleitung

## 1.1. Lizenzinformationen

Diese Skript wird unter der Creative Commons Lizenz CC-BY-SA 4.0 veröffentlicht. Dies heisst,

- Sie dürfen das Werk ganz oder in Teilen in allen denkbaren Formaten weiter verwenden, vervielfältigen und weiterverbreiten
- das Werk oder Teile davon neu zusammenstellen, verändern und darauf weitere Werke aufbauen,

sofern Sie

- den Namen der Verfassers dieses Werkes sowie deren Institution, die Universität Ulm, nennen und angemessene Rechte- und Urheberrechtsangaben machen, einen Link zur Lizenz beifügen und angeben, ob Sie Änderungen vorgenommen haben. Dabei darf nicht der Eindruck entstehen, die Verfasser oder die Universität Ulm würden Sie oder Ihre Nutzung unterstützen.
- Wenn Sie Dieses Werk oder Teile davon neu zusammenstellen, verändern und darauf weitere Werke aufbauen, dürfen Sie ihre Beiträge nur unter der gleichen Lizenz wie dieses Werk wie dieses Original verbreiten.

Sie dürfen insbesondere keine weiteren Einschränkungen einsetzen und auch keine technischen Verfahren wie z.B. DRM verwenden, die anderen Nutzern etwas untersagt oder daran hindert, das abgeleitete Werk nach dieser Lizenz zu nutzen. Der Lizenzgeber kann diese Freiheiten nicht widerrufen solange Sie sich an die Lizenzbedingungen halten.

Eine detaillierte Erklärung finden Sie unter

<http://www.uni-ulm.de/en/einrichtungen/e-learning/blog/article/was-sind-eigentlich-cc-lizenzen.html>

oder unter

<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>

oder unter

<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.de>



Die CC-Icons und -Buttons und wurden unter der Lizenz CC BY von <http://creativecommons.org/about/downloads> veröffentlicht.

## 1.2. Dank

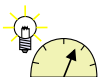
Ich habe mich über alle Kommentare und Anregungen zu diesem Skript vor allem von Studierenden gefreut. Ich bin Herrn Nils Tobias Krämer sehr dankbar für das sorgfältige Durchlesen des Skripts.

## 2. Elektrostatik

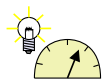
Elektrostatik wird benötigt, um

- die Wirkung von Klebestreifen,
- die Ladungstrennung beim Ausgiessen,
- die Funktion von Elektronenröhren,
- die Funktion der Braunschen Röhre und
- die Funktion des Kondensators

beschreiben.



**Versuch zur Vorlesung:** Entfernen eines Klebestreifens von einem Elektrometer



**Versuch 1: Versuch zur Vorlesung:**

Ladungstrennung (Versuchskarte ES-24, Video)



**Versuch 2: Versuch zur Vorlesung:**

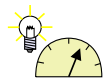
Ladungstrennung (Versuchskarte ES-25, Video)

Die ELEKTROSTATIK befasst sich mit der Wechselwirkung elektrisch geladener Körper. Seit dem Altertum ist bekannt, dass Körper sich durch Reiben aufladen können. Wo haben Sie sich schon aufgeladen? Staub oder kleine Teilchen bleiben an aufgeladenen Körpern hängen. Sie werden auch gegen die Gravitationskraft angezogen.

Die Kraft zwischen LADUNGEN kann stärker als die Gravitationskraft sein.

Es gibt auch Situationen, wo sich durch Reibung geladene Teilchen abstossen.

Es gibt mindestens zwei Arten von LADUNGEN!



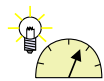
### Versuch 3: Versuch zur Vorlesung:

Reibungselektrizität (Versuchskarte ES-15, Video)

Genaue Untersuchungen haben gezeigt, dass es **genau zwei Arten von Ladungen** gibt. LICHTENBERG benannte die LADUNGEN so, dass LADUNGEN auf geriebenen Glasstäben **positiv** genannt werden und LADUNGEN auf geriebenem Bernstein **negativ**.

- Zwei LADUNGEN ziehen sich an, wenn sie verschiedener Art sind (positiv und negativ oder negativ und positiv)
- Zwei LADUNGEN stoßen sich ab, wenn sie gleichnamig sind (positiv und positiv oder negativ und negativ)

LADUNG ist eine extensive Grösse, das heisst, sie skaliert mit der Grösse des Systems.



### Versuch 4: Versuch zur Vorlesung:

Ladungen löffeln (Versuchskarte ES-13, Video)

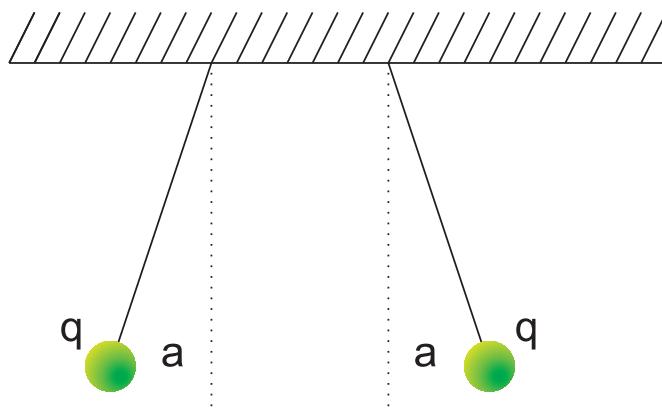
Genaue Messungen zeigen, dass für Elektronen die elektrostatischen Kräfte etwa  $4.1681 \cdot 10^{42}$  mal stärker als die Gravitationskräfte sind<sup>1 2</sup>. Die Gravitationskräfte können also nur beobachtet werden, da die LADUNGEN sich im Mittel sehr genau kompensieren.

## 2.1. Elektrische Ladung und Coulombsches Gesetz

**Literatur:** (Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 617]) (Siehe Kneubühl, Repetitorium der Physik [Kne78, pp. 189])

$$^1\text{Gravitation: } F_G(r) = G \frac{m_e^2}{r^2} = 6.670 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2 \frac{(9.1091 \cdot 10^{-31} \text{ kg})^2}{r^2} = 5.5345 \cdot 10^{-71} \text{ Nm}^2 r^{-2}.$$

$$^2\text{Elektrostatische Kraft: } F_E(r) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q_e^2}{r^2} = \frac{1}{4\pi 8.8544 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2} \frac{(1.6021 \cdot 10^{-19} \text{ C})^2}{r^2} = 2.3068 \cdot 10^{-28} \text{ Nm}^2 r^{-2}.$$



**Abb. 2.1.:** Auslenkung zweier mit identischer LADUNG  $q$  geladener Kugeln.

Wenn zwei Kugeln mit der gleichen LADUNG  $q$  geladen sind, werden sie nach aussen abgestossen. Wird die LADUNG verändert, ändert sich die KRAFT proportional.

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{F_1}{F_2} \quad (2.1.1)$$

Dabei wird angenommen, dass die LADUNGEN PUNKTLADUNGEN sind.

LADUNGEN werden in **Coulomb**, abgekürzt, **C**, angegeben.

Eine Messung der Kräfte mit einer Drehwaage (nach CAVENDISH) ergibt das folgende Gesetz

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = K \frac{q_1 \cdot q_2}{r_{12}^2} \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}} \quad (2.1.2)$$

wobei die Konstante vom Masssystem abhängt und im SI-System

$$K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \quad (2.1.3)$$

ist. Die Konstante  $\epsilon_0$  heisst PERMITTIVITÄT DES VAKUUMS. Ihre Grösse ist

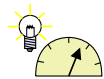
$$\epsilon_0 = 8.8544 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N}/\text{m}^2 \quad (2.1.4)$$

Indem man  $\epsilon_0$  festlegt, legt man die Grösse der Ladungseinheit fest. Im SI-System wurde der Zahlenwert  $K = 10^{-7} \text{ c}^2 = 8.98755 \cdot 10^9 \text{ m}^2/\text{s}^2$  gesetzt, damit die elektrischen Grössen einen handhabbaren Zahlenwert haben. Mit dieser Definition folgt der Wert von  $\epsilon_0$ .

Dieses Gesetz kann durch folgende Überlegung erraten werden:

- $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  ist ein VEKTORFELD.
- Der mathematische Fluss dieses Vektorfeldes durch ein Flächenelement  $d\mathbf{A}$  ist  $d\Phi(\mathbf{r}) = d\mathbf{A} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r})$ , wobei die Richtung von  $\mathbf{A}$  die Richtung der Normalen zu diesem Flächenelement ist.
- Der gesamte Fluss des Kraftfeldes durch die Kugeloberfläche  $A(r) = 4\pi r^2$  ist durch  $\Phi(r) = \iint_A d\Phi(\mathbf{r}) = \iint_A \mathbf{F}(\mathbf{r}) d\mathbf{A}$  gegeben.

- Da das Problem kugelsymmetrisch ist, kann  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  nicht von der Richtung abhängen und muss radial sein. Damit kann die Kraft vor das Integral genommen werden.
- $\Phi(r) = F(r) \iint_A dA = 4\pi r^2 F(r)$
- Wenn der Fluss des Vektorfeldes  $\mathbf{F}$  unabhängig von  $r$  sein soll, so muss die Kraft umgekehrt proportional zu  $r^2$  sein.



### Versuch 5: Versuch zur Vorlesung:

Coulomb-Gesetz (Versuchskarte ES-31, Video)

Das COULOMBSCHE GESETZ lautet

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 \cdot q_2}{r_{12}^2} \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}} \quad (2.1.5)$$

Das Coulombsche Gesetz ist mathematisch äquivalent zum Gravitationsgesetz. Alle Aussagen über die Gravitation gelten auch für LADUNGEN, mit der Abweichung, dass LADUNGEN zwei Vorzeichen haben können.

Elektrostatische Kräfte sind additiv.

Ladungen sind nicht beliebig teilbar. Versuche von MILLIKAN ergaben, dass die kleinste beobachtbare Ladung den Betrag  $1.6022 \cdot 10^{-19} \text{ C}$  hat. Diese Ladung ist auf

**Elektronen**  $q = -e = -1.6022 \cdot 10^{-19} \text{ C}$  (Masse:  $m_e = 9.1096 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ ) und

**Protonen**  $q = e = 1.6022 \cdot 10^{-19} \text{ C}$  (Masse:  $m_p = 1.6726 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ )

zu finden.  $e$  heisst die Elementarladung. In Kernbauteilen, den Quarks, gibt es Ladungen vom Betrage  $e/3$ . Diese Ladungen sind aber nicht frei zu beobachten. Ladungen werden im SI-System in COULOMB gemessen,  $[q] = \text{C}$ .

LADUNGEN können nur paarweise entstehen (jeweils die gleiche negative und positive LADUNG). Die Gesamtladung in einem abgeschlossenen System ist konstant.

## 2.2. Das elektrische Feld

Wir wollen eine Formulierung finden, die die Stärke der elektrostatischen Kraft als eine Feldgrösse mal die LADUNG der Testladung beschreibt, also  $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ . Damit haben wir eine Beschreibung der Elektrostatik, die unabhängig von der Testladung ist. Genauer formuliert hat man

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r})}{q} \quad (2.2.1)$$

Wir definieren:

Das elektrische Feld der LADUNG  $Q$  ist durch

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (2.2.2)$$

gegeben.

$\mathbf{E}$  ist das elektrische Feld und somit auch der Feldvektor des elektrischen Feldes<sup>3</sup>. Die Einheit von  $\mathbf{E}$  ist  $[\mathbf{E}] = \text{N C}^{-1} = \text{V m}^{-1}$ .<sup>4</sup>

	$E/(\text{N C}^{-1} = \text{V m}^{-1})$
Stromleitung in Wohnhäusern	$10^{-2}$
Radiowellen	$10^{-1}$
Atmosphäre	$10^2$
Sonnenlicht	$10^3$
Unter einer Gewitterwolke	$10^4$
In einer Röntgenröhre	$10^6$
Laser	bis $10^{12}$
Am Ort des Elektrons im Wasserstoffatom	$6 \cdot 10^{11}$
Auf der Oberfläche eines Urankerns	$2 \cdot 10^{21}$

Tab. 2.1.: Elektrisches Feld in der Natur

Eine Verteilung von  $N + 1$  Ladungen  $q_i(\mathbf{r}_i)$  hat das elektrische Feld

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{i=0}^N \mathbf{E}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=0}^N \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} \quad (2.2.3)$$

Die obige Gleichung gilt für alle  $\mathbf{r}_i \neq \mathbf{r}$ ,  $i = 0 \dots N$ . Für kontinuierliche Ladungsverteilungen führt man eine Ladungsdichte

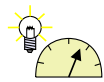
<sup>3</sup> $g$  ist der Feldvektor des Gravitationsfeldes

<sup>4</sup>Es ist  $\text{V A} = \text{W} = \text{N m s}^{-1}$  sowie  $\text{C s}^{-1} = \text{A}$ . Also ist  $\text{C V} = \text{A s V} = \text{J} = \text{N m}$  und damit  $\text{C} = \text{N m V}^{-1}$ .

$$\rho_{el}(\mathbf{r}) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta Q(\mathbf{r})}{\Delta V} \quad (2.2.4)$$

ein. Das resultierende elektrische Feld ist dann

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho_{el}(\mathbf{r})}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|^2} \frac{\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|} dV \quad (2.2.5)$$

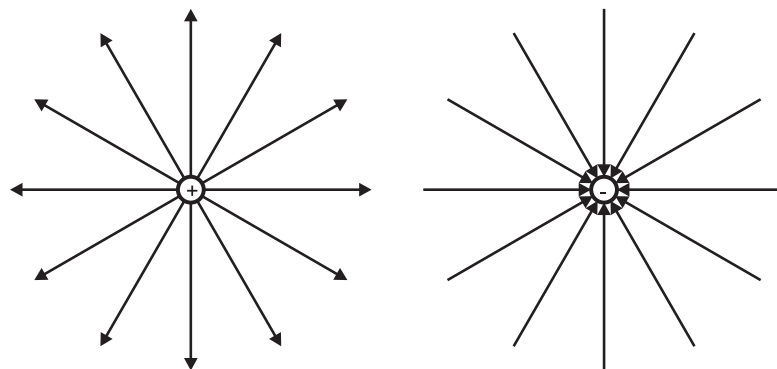


### Versuch 6: Versuch zur Vorlesung:

Elektrische Feldlinien (Versuchskarte ES-4, Video)

FELDLINIEN dienen zur Visualisierung des elektrischen Feldes. Formal konstruiert man eine Feldlinie, indem man von einem Ausgangspunkt aus den Vektor des elektrischen Feldes abträgt und dann vom neuen Startpunkt aus wieder gleich verfährt. Zeichnet man quer zu den Feldlinien eine Linie und zählt, wie viele Feldlinien man pro Längeneinheit hat, ist dies ein Mass für die Feldstärke. Das Konzept der Feldlinien stammen von MICHAEL FARADAY.

Feldlinien laufen von der positiven LADUNG zu der negativen LADUNG.



**Abb. 2.2.:** Feldlinien. Links von einer positiven LADUNG, rechts von einer negativen LADUNG. Die Feldlinien zeigen von der positiven LADUNG zu der negativen LADUNG.





Link zur Vorlesung: ([Applet: elektrostatische Felder](#))

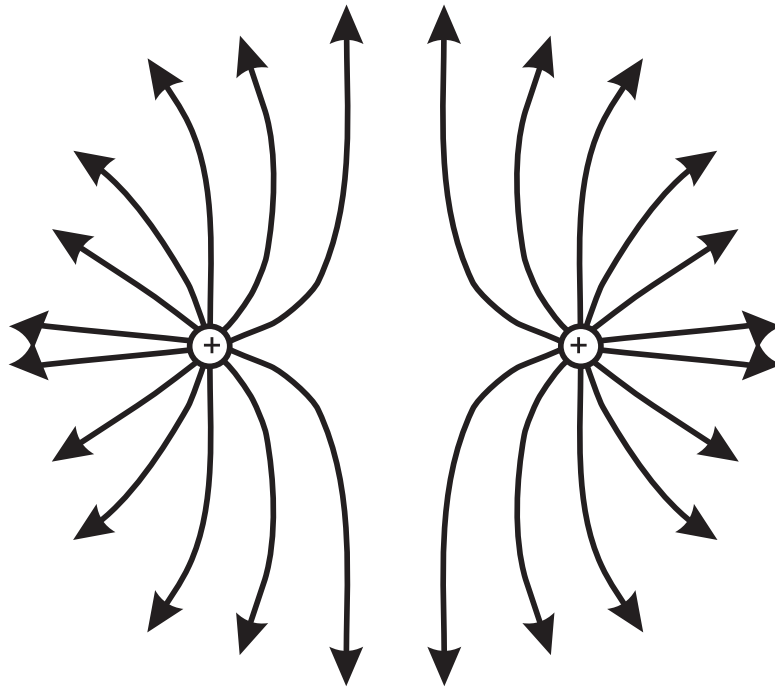
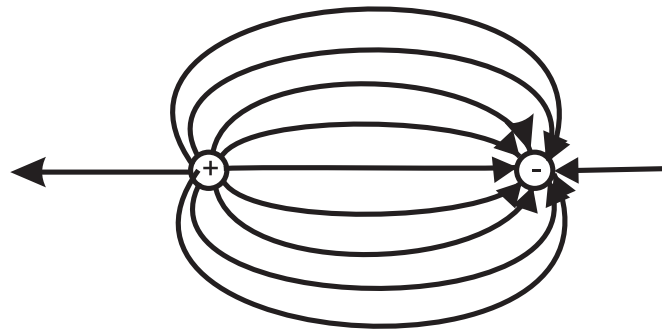


Abb. 2.3.: Feldlinien bei zwei gleichen positiven LADUNGEN.

1. Elektrische Feldlinien beginnen bei positiven LADUNGEN und enden bei negativen LADUNGEN.
2. Um eine einzelne Punktladung herum sind alle Feldlinien kugelsymmetrisch verteilt
3. Die Anzahl der Feldlinien, die von positiven LADUNGEN ausgehen, oder auf negativen LADUNGEN enden, ist proportional zu der Grösse der LADUNG.
4. An jedem Punkt des Raumes ist die Feldliniendichte proportional zur Feldstärke in diesem Punkt.
5. In grosser Entfernung wirkt ein System von LADUNGEN wie eine einzige Punktladung, deren Grösse der Gesamtladung des Systems entspricht.
6. Feldlinien schneiden sich nicht.



**Abb. 2.4.:** Feldlinien bei einer positiven LADUNG und einer vom Betrage her gleichgrossen negativen LADUNG.

Wenn das elektrische Feld die einzige Ursache der Beschleunigung ist, dann gilt

$$\mathbf{a} = \frac{q}{m} \mathbf{E} \quad (2.2.6)$$

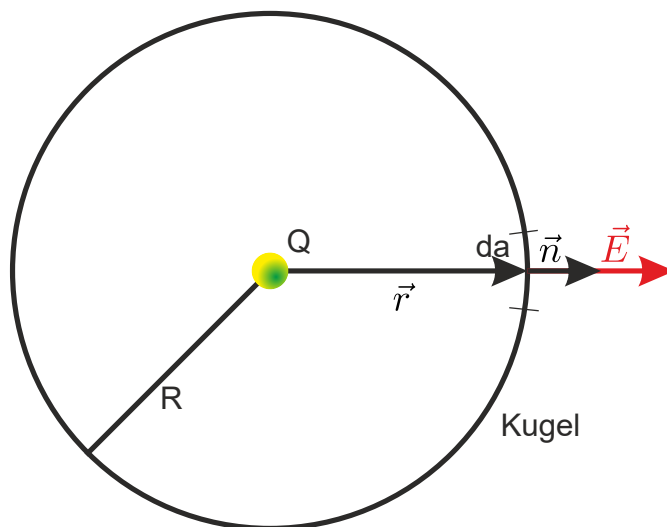
LADUNGEN, die aus der Ruhe durch ein elektrisches Feld beschleunigt werden, folgen den Feldlinien. Elektrische Felder, die eine LADUNG  $q$  mit der Masse  $m$  ablenken, erlauben  $q/m$  zu bestimmen.

## 2.3. Zusammenhang zwischen Ladung und Feld: das Gaussche Gesetz

Nach der Gleichung (2.2.4) kann die gesamte LADUNG in einem Raumgebiet begrenzt durch die Fläche  $A$  durch

$$Q = \iiint_{V(A)} \rho_{el}(\mathbf{r}) dV \quad (2.3.1)$$

ausgedrückt werden.



**Abb. 2.5.:** Integration über eine Kugeloberfläche mit einer Punktladung im Zentrum

Wir betrachten eine kugelsymmetrische Situation um eine Punktladung  $Q$ . Wir definieren den Normalenvektor am Ort  $\mathbf{r}$  als  $\mathbf{n} = \mathbf{r}/|\mathbf{r}| = \mathbf{r}/r$ . Das Oberflächenelement  $da$  ist  $da = r^2 \sin \Theta d\Theta d\varphi$ .

Das elektrische Feld an der Kugeloberfläche ist

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \quad (2.3.2)$$

Wir erhalten damit das GAUSSSCHE GESETZ

$$\begin{aligned} \int_{\text{Kugeloberfläche}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} da &= \int_{\text{Kugeloberfläche}} \left( \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}|^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \right) \cdot \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} r^2 \sin \Theta d\Theta d\varphi \\ &= \int_{\text{Kugeloberfläche}} \frac{Q r^2}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}|^2} \cdot \left( \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \cdot \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \right) \sin \Theta d\Theta d\varphi \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{Kugeloberfläche}} \sin \Theta d\Theta d\varphi \\ &= \frac{Q}{\epsilon_0} \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

Die Grösse

$$\Phi_{\mathbf{E}} = \int_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} \quad (2.3.4)$$

ist der FLUSS DES ELEKTRISCHEN FELDES  $\mathbf{E}$  durch die Fläche  $A$ .  $A$  kann offen oder geschlossen sein. Das Integral aus Gleichung (2.3.3) kann vereinfacht werden, indem wir die DIELEKTRISCHE VERSCHIEBUNG oder die ELEKTRISCHE FLUSSDICHTE

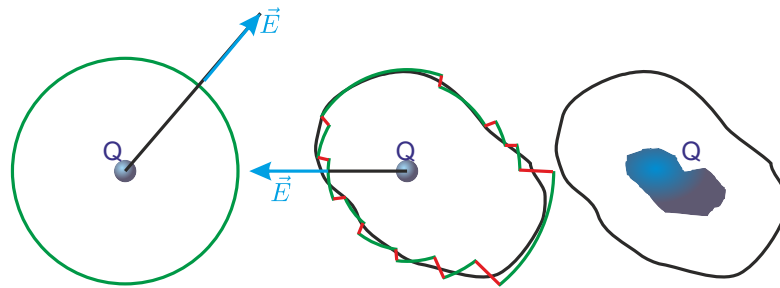
$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (2.3.5)$$

eingeführen. Die Gleichung (2.3.5) gilt im Vakuum. Die allgemeingültige Formulierung finden Sie in der Gleichung (2.9.15). Die Einheit der dielektrischen Verschiebung oder der elektrischen Flussdichte ist  $[\mathbf{D}] = \text{C/m}^2 = \text{As/m}^2$ .

Weiter ist

$$\int_{\text{Kugeloberfläche}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} = \int_{\text{Kugeloberfläche}} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} da = Q \quad (2.3.6)$$

Allgemein gilt die obige Gleichung für beliebige geschlossene Flächen  $S$ , die das Volumen  $V(S)$  einschliesst.



**Abb. 2.6.:** Approximation von beliebigen Oberflächen durch Kugelsegmente. Approximation einer kontinuierlichen Ladungsverteilung durch Punktladungen.

$$\begin{aligned} \iint_A \mathbf{D}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{a}(\mathbf{r}) &= \iint_A \mathbf{D}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) da(\mathbf{r}) \\ &= Q_{\text{in } A} = \iiint_{V(A)} \rho_{el}(\mathbf{r}) dV \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

Mit dem Gaußschen Satz (Gleichung (C.9.1)) kann die Gleichung umgeschrieben werden in

$$\iint_A \mathbf{D}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \iiint_{V(A)} \text{div } \mathbf{D}(\mathbf{r}) dV = \iiint_{V(A)} \rho_{el}(\mathbf{r}) dV \quad (2.3.8)$$

Diese Gleichung muss für alle Oberflächen  $S$  gelten. Deshalb müssen die Integranden gleich sein

$$\operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{r}) = \rho_{el}(\mathbf{r}) \quad (2.3.9)$$

Dies ist die Differentialform der Gleichung für die elektrische Verschiebung. Die physikalische Interpretation ist: die LADUNGEN sind die QUELLEN (DIVERGENZ) der elektrischen Verschiebung und damit des elektrischen Feldes.

Im ladungsfreien Raum lautet Gleichung (2.3.9):  $\operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{r}) = 0$ . Diese Gleichung ist mathematisch äquivalent zur Kontinuitätsgleichung strömender inkompressibler Flüssigkeiten. Für deren Geschwindigkeitsfeld  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$  gilt nämlich  $\operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{r}) = 0$ .

Die Grösse

$$\Phi_e = \Phi_D = \iint_A \mathbf{D}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{a}(\mathbf{r}) \quad (2.3.10)$$

über eine beliebige, nicht notwendigerweise geschlossene Fläche  $A$  heisst der ELEKTRISCHE FLUSS. Dies ist zu unterscheiden vom Fluss des elektrischen Feldes  $\Phi_E$  aus Gleichung (2.3.4).

Bei einer geschlossenen Fläche  $A$  ist nach den Gleichungen (2.3.7) und (2.3.10) der elektrische Fluss

$$\begin{aligned} \Phi_e|_{\text{durch geschlossene Fläche } A} &= \\ \Phi_D|_{\text{durch geschlossene Fläche } A} &= Q|_{\text{innerhalb der geschlossenen Fläche } A} \end{aligned} \quad (2.3.11)$$

### 2.3.1. Dipole in elektrischen Feldern

Es gibt Moleküle, bei denen die negativen und die positiven LADUNGEN getrennte Schwerpunkte haben. Eine negative LADUNG  $-q$  im Abstand  $\ell$  von einer positiven LADUNG  $q$  heisst DIPOL mit dem DIPOLMOMENT

$$\mathbf{p} = q\ell \quad (2.3.12)$$

Die Einheit des Dipolmoments ist  $[p] = \text{C m}$ . **Der Vektor des Dipole zeigt von  $-q$  nach  $+q$ .**

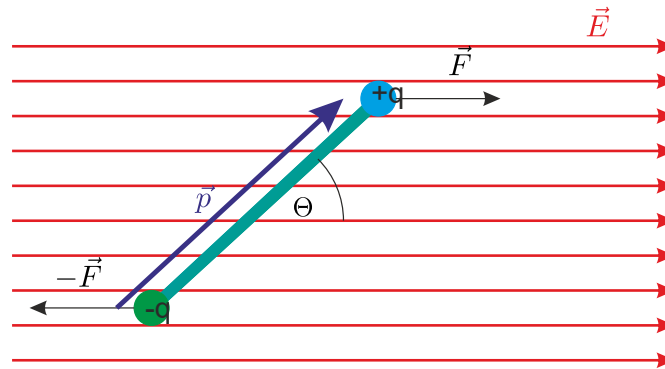
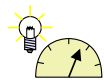


Abb. 2.7.: Kräfte auf einen DIPOL im homogenen elektrischen Feld.

Im homogenen elektrostatischen Feld  $\mathbf{E}$  wirkt auf die positive LADUNG die Kraft  $\mathbf{F}$  und auf die negative LADUNG  $-\mathbf{F}$ . Zusammen bilden diese beiden Kräfte ein Kräftepaar und erzeugen damit ein Drehmoment

$$\mathbf{T} = \boldsymbol{\ell} \times \mathbf{F} = (q\boldsymbol{\ell}) \times (\mathbf{F}/q) = \mathbf{p} \times \mathbf{E} \quad (2.3.13)$$

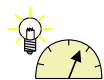


#### Versuch 7: Versuch zur Vorlesung:

Drehmoment auf einen elektrischen Dipol (Versuchskarte ES-30, Video)

## 2.4. Elektrische Felder von Leitern

**Literatur:** (Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 645])



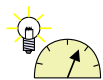
#### Versuch 8: Versuch zur Vorlesung:

Elektrische Feldlinien (Versuchskarte ES-4, Video)

Die elektrischen Felder

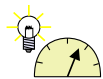
- in der Nähe eines ausgedehnten Leiters
- auf der Symmetrieachse eines Kreistrings
- auf der Symmetrieachse einer Kreisscheibe
- innerhalb und ausserhalb einer geladenen Zylinderfläche
- in allen Bereichen zweier coaxialer zylinderförmiger Leiter

werden im Anhang berechnet.



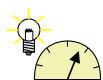
### Versuch 9: Versuch zur Vorlesung:

Faraday-Becher ([Versuchskarte ES-9](#), [Video](#))



### Versuch 10: Versuch zur Vorlesung:

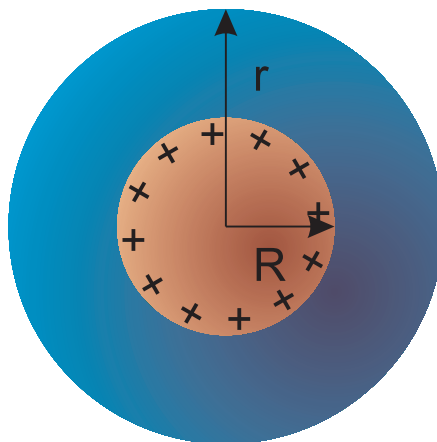
Faraday-Käfig ([Versuchskarte ES-21](#), [Video](#))



### Versuch 11: Versuch zur Vorlesung:

Van-de-Graaff-Generator ([Versuchskarte ES-19](#), [Video](#))

Wir berechnen das elektrische Feld innerhalb und ausserhalb einer Kugelschale.



**Abb. 2.8.:** Berechnung eines Feldes einer Kugelschale

Abbildung 2.8 zeigt die betrachtete Geometrie. Die gesamte Ladung  $Q$  ist homogen auf einer infinitesimal dünnen Kugelschale mit dem Radius  $R$  verteilt. Sowohl für  $r > R$  wie auch für  $r < R$  ist die elektrische Ladungsdichte  $\rho_{el} = 0$ . Auf der Kugelschale mit dem Radius  $R$  gibt es also eine Flächenladungsdichte  $\sigma = Q/(4\pi R^2)$ .

Aus der Definition des elektrischen Feldes in Gleichung (2.2.2), dem Gauss'schen Gesetz in Gleichung (2.3.3) und aus der Tatsache, dass wir eine kugelsymmetrische Situation haben ergibt sich für die eingeschlossene LADUNG aus dem ELEKTRISCHEN FLUSS durch die Kugelfläche mit dem Radius  $r > R$

$$Q = \iint_{\text{Kugel mit Radius } r} \varepsilon_0 E_r da = \varepsilon_0 E_r 4\pi r^2 \quad (2.4.1)$$

Somit haben wir auch

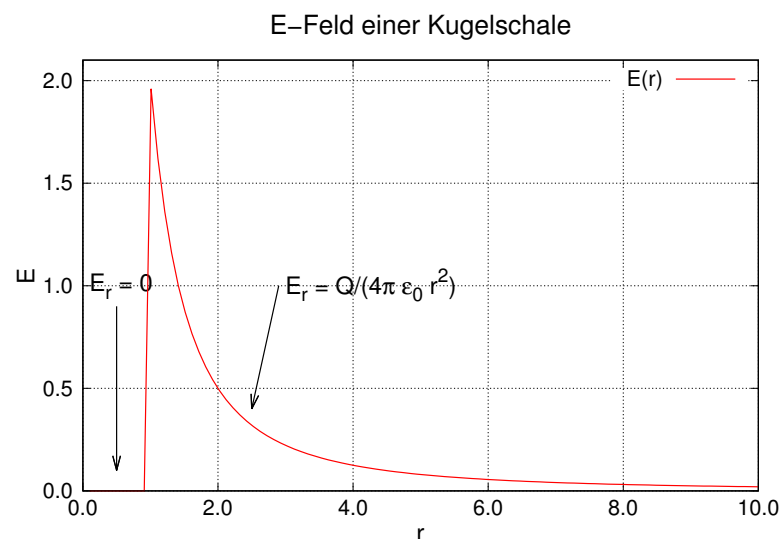
$$\frac{Q}{\varepsilon_0} = E_r 4\pi r^2 \quad (2.4.2)$$

Damit ist für  $r > R$

$$E_r(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} \quad (2.4.3)$$

Das elektrische Feld einer homogen geladenen Kugelschale ist also **ununterscheidbar** vom elektrischen Feld einer Punktladung. Für  $r < R$  ist die eingeschlossene LADUNG  $Q = 0$ . Damit ist auch  $\Phi_{ges} = E_r 4\pi r^2 = 0$  und folglich für  $r < R$

$$E_r = 0 \quad (2.4.4)$$



**Abb. 2.9.:** Die Feldverteilung einer homogen geladenen Kugelschale.

Das elektrische Feld einer homogen geladenen Kugel mit dem Radius  $R$  wird analog berechnet. Ausserhalb der Kugel für  $r > R$  ist wie oben  $\Phi_{ges} = E_r 4\pi r^2 = Q/\varepsilon_0$ . Also ist für  $r > R$

$$E_r(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} \quad (2.4.5)$$

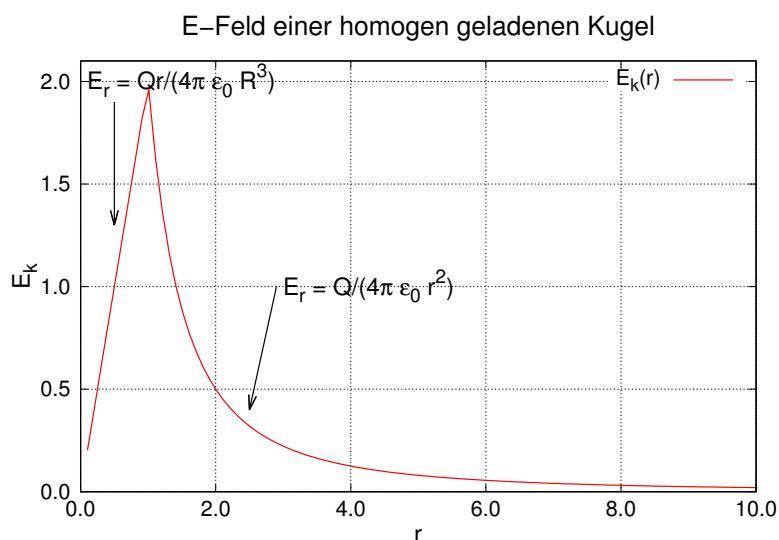
Wenn die Ladungsdichte  $\rho_{el} = Q/V = Q/(\frac{4\pi}{3} R^3)$  ist, ist die von einer zur homogen geladenen Kugel konzentrischen Kugelschale mit  $r < R$  umschlossene LADUNG  $Q' = \rho_{el} V(r) = \rho_{el} \frac{4\pi}{3} r^3$



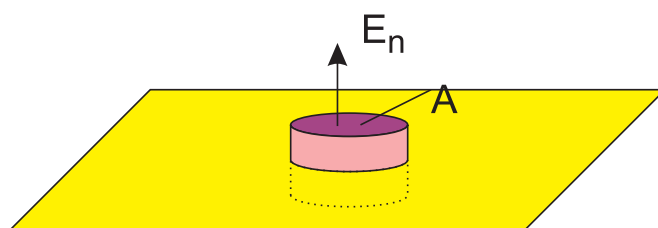
$$Q(r) = \frac{Q}{\frac{4\pi}{3}R^3} \frac{4\pi}{3}r^3 = Q \frac{r^3}{R^3} \quad (2.4.6)$$

Weiter haben wir  $E_r \cdot 4\pi\epsilon_0 r^2 = Q$ . Also ist für  $r < R$

$$E_r(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qr}{R^3} \quad (2.4.7)$$



**Abb. 2.10.:** elektrisches Feld einer homogen geladenen Kugel



**Abb. 2.11.:** Integrationsfläche zur Berechnung des elektrischen Feldes einer Ebene

Das elektrische Feld einer homogen geladenen Platte kann wie folgt berechnet werden.

- Da wir TRANSLATIONSINVARIANZ für jede Richtung in der Plattenebene haben, muss das elektrische Feld senkrecht auf der Platte stehen.

- Die elektrischen Felder auf den beiden gegenüberliegenden Seiten der Platte müssen entgegengesetzt gerichtet sein, da die Platte eine Ebene mit SPIEGELSYMMETRIE darstellt.
- Wir verwenden eine zylinderförmige Fläche parallel zur Platte. Die Seitenflächen können beliebig hoch sein, da die SYMMETRIEÜBERLEGUNGEN besagen, dass sie keinen Beitrag zum elektrischen Fluss liefern.

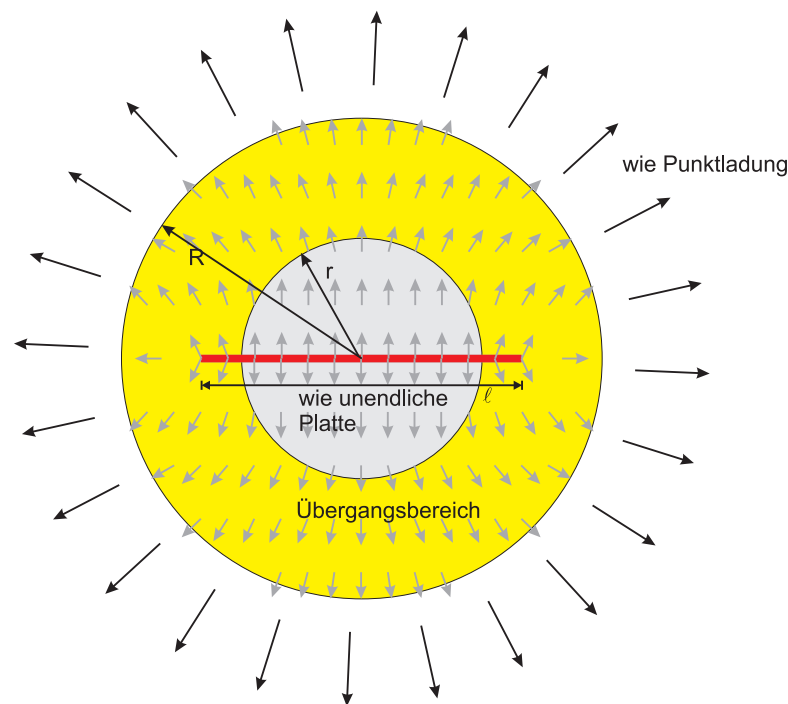
Wenn  $\sigma$  die LADUNGSDICHTE auf der Platte ist, dann ist

$$\frac{\sigma A}{\varepsilon_0} = \Phi_E = \iint E_n da = 2AE_n \quad (2.4.8)$$

da sowohl die Unterseite wie auch die Oberseite einen Beitrag liefern.  
Also ist

$$E_r = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \quad (2.4.9)$$

homogen im Raum.



**Abb. 2.12.:** Elektrisches Feld um eine endliche Platte.

Wir betrachten eine endliche ebene leitfähige Platte mit der Ausdehnung  $\ell$ . Wir können drei Fälle unterscheiden:

$r \ll \ell$  Das elektrische Feld ist von dem einer unendlich ausgedehnten ebenen leitfähigen Platte nicht unterscheidbar.

$r \approx \ell$  Das elektrische Feld befindet sich in einem Zwischenzustand.

$R \gg \ell$  Das elektrische Feld ist von dem einer Punktladung im Kugelmittelpunkt nicht unterscheidbar.

Ein Beispiel für diese Art Flächenladungen sind KLEBESTREIFEN. Andreas Döring [Dör01] gibt an, dass Haftklebematerialien spezifische Haftenergien von  $E_t = (30 \dots 300) \text{ J/m}^2$  haben. Die Definition von  $E_t$  ist

$$E_t = \frac{v_s}{A} \int F(t) dt \approx \frac{v_s F \Delta t}{A}$$

wobei  $v_s = 0.01 \text{ m s}^{-1}$  die Geschwindigkeit ist, mit der der Klebestreifen abgezogen wird und  $A$  die Kontaktfläche ist.  $\Delta t = 0.1 \text{ s}$  ist die Loslösezeit. Die Haftkraft rührt von LADUNGEN her. Bei einer Flächenladungsdichte  $\sigma$  ist  $E = \sigma/\varepsilon_0$ . Die Kraft auf eine Flächenladungsdichte  $\sigma$  ist dann  $F/A = \sigma^2/\varepsilon_0$ . Mit den Daten von Herrn Döring erhalten wir

$$\frac{F}{A} = \frac{\sigma^2}{\varepsilon_0} = \frac{E_t}{v_s \Delta t}$$

und daraus die Flächenladungsdichte

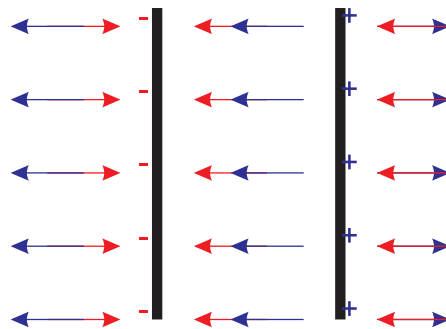
$$\sigma = \frac{e}{d^2} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 E_t}{v_s \Delta t}}$$

Dabei haben wir angenommen, dass Elementarladungen  $e$  im Abstand  $d$  angebracht sind.  $d$  ist dann

$$d = \sqrt{e \sqrt{\frac{v_s \Delta t}{\varepsilon_0 E_t}}}$$

Wenn wir  $E_t$  einsetzen erhalten wir  $d \approx (10 \dots 18) \text{ nm}$ . Dieser Abstand korreliert gut mit den bekannten Moleküldurchmessern.

Bei zwei homogen geladenen Platten, deren Flächenladungsdichte vom Betrage her gleich sind, aber unterschiedliches Vorzeichen haben, heben sich die Felder ausserhalb der Platten auf. Gleichzeitig verstärken sich die Felder im Inneren: Die elektrische Feldstärke wird  $E = \sigma/\varepsilon_0$ .



**Abb. 2.13.:** Elektrisches Feld entgegengesetzt gleich geladener Platten.

Sind die Platten jedoch gleich geladen (oder ist die Oberflächenladung der Platten gleich), kompensieren sich die elektrischen Felder im Innern der Platte, verstärken sich aber im Aussenraum. Wieder ist im Aussenraum  $E = \sigma/\varepsilon_0$ .

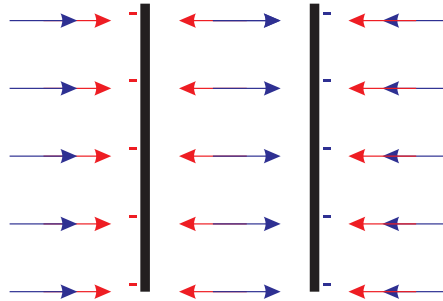


Abb. 2.14.: Elektrisches Feld gleich geladener Platten

**Leiter haben in ihrem Inneren keine statischen elektrischen Felder.**

Da LADUNGEN im Inneren eines Leiters beweglich sind, folgt, dass das elektrische Feld an einer beliebigen Oberfläche, die sich ganz im Inneren eines Leiters befindet, null ist. Damit ist die umschlossene LADUNG ebenso null. Daraus folgt, dass LADUNGEN sich nur an der Oberfläche eines Leiters befinden können.

Das elektrische Feld an der Oberfläche eines Leiters kann mit dem Gaußschen Gesetz berechnet werden. Wir betrachten eine zylinderförmige Fläche, deren eine Kreisfläche unter der Oberfläche des Leiters und deren andere über der Oberfläche des Leiters ist.

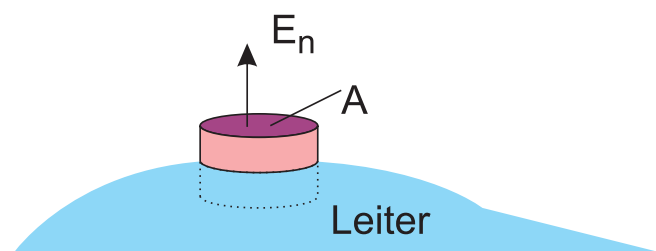


Abb. 2.15.: Integrationsfläche

Der gesamte Fluss des elektrischen Feldes ist

$$\Phi_{\text{ges}, E} = \iint E_n da = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad (2.4.10)$$

da das elektrische Feld im Inneren des Leiters null ist und die Höhe der Seitenflächen verschwinden soll, haben wir

$$\iint E_n da = E_n \oint_{\text{obere Fläche}} da = E_n A = \frac{1}{\varepsilon_0} A \sigma \quad (2.4.11)$$

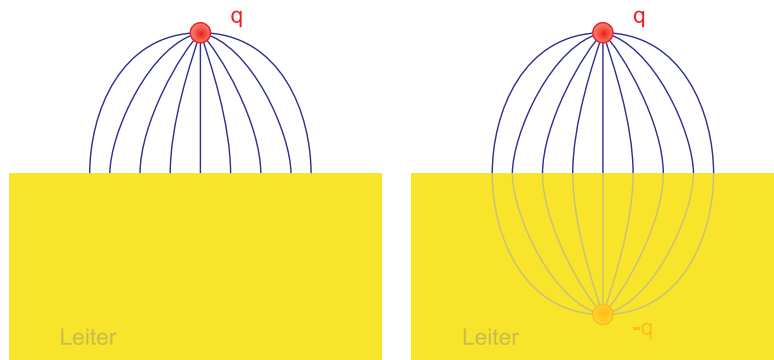
und

$$E_n = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad (2.4.12)$$

Aus dem Gaussschen Gesetz werden die zwei folgenden Schlüsse gezogen:

- Die makroskopisch beobachtbare elektrische LADUNG eines Leiters befindet sich auf seiner Oberfläche.
- Das elektrische Feld an der Oberfläche eines Leiters steht senkrecht zu dieser Oberfläche und hat die Grösse  $E_r = \sigma/\varepsilon_0$

### 2.4.1. Influenz und Bildladung



**Abb. 2.16.:** Links: Feldlinien in der Nähe eines Leiters. Rechts: Diese Feldlinien können mit einer Bildladung erklärt werden.

Da elektrische Feldlinien immer senkrecht auf der Oberfläche eines Leiters stehen müssen, sieht das Feldlinienbild einer Punktladung in der Nähe eines Leiters wie die Hälfte des Feldlinienbildes eines Dipols aus. Das elektrische Feld der Punktladung erzeugt an der Oberfläche die INFLUENZLADUNG  $\sigma(\mathbf{r})$ , die das äussere Feld im Leiter abschirmt. Formal kann das Feldlinienbild berechnet werden, indem man zu einer LADUNG  $q$  im Abstand  $a$  von der Oberfläche eines Leiter im Leiter innen

eine Bildladung  $-q$  auch im Abstand  $a$  von der Oberfläche verwendet. Das Konzept der Bildladung zeigt, dass eine LADUNG  $q$  im Abstand  $a$  von einem Leiter mit der Kraft

$$F(a) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{4a^2} \quad (2.4.13)$$

angezogen wird. Die Senkrechtkomponente ( $z$ -Komponente) des elektrischen Feldes ist im Abstand  $r$  vom Aufpunkt in der Leiteroberfläche

$$E_z(r, a) = -\frac{2}{4\pi\epsilon_0} \frac{qa}{(r^2 + a^2)^{3/2}} \quad (2.4.14)$$

Damit ist die Oberflächenladungsdichte

$$\sigma(r) = -\frac{1}{2\pi} \frac{qa}{(r^2 + a^2)^{3/2}} \quad (2.4.15)$$

Mit analogen Überlegungen kann auch die Bildladungsdichte von kontinuierlichen Ladungsverteilungen berechnet werden<sup>5</sup>.

## 2.5. Elektrostatisches Potential

**Literatur:** (Siehe Kneubühl, Repetitorium der Physik [Kne78, pp. 192]) (Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 681])

Die Arbeit ist durch

$$W(\mathbf{r}_1 \rightarrow \mathbf{r}_2) = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \quad (2.5.1)$$

definiert.

Die potentielle Energie eines Kraftfeldes  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  ist die Arbeit gegen diese Feldkraft. Nach dem 3. Newtonschen Axiom ist  $\mathbf{F}_{ext} = -\mathbf{F}$ . Also

$$E_{pot}(\mathbf{r}_2) = E_{pot}(\mathbf{r}_1) + \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F}_{ext}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \quad (2.5.2)$$

$$= E_{pot}(\mathbf{r}_1) - \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = E_{pot}(\mathbf{r}_1) - W(\mathbf{r}_1 \rightarrow \mathbf{r}_2) \quad (2.5.3)$$

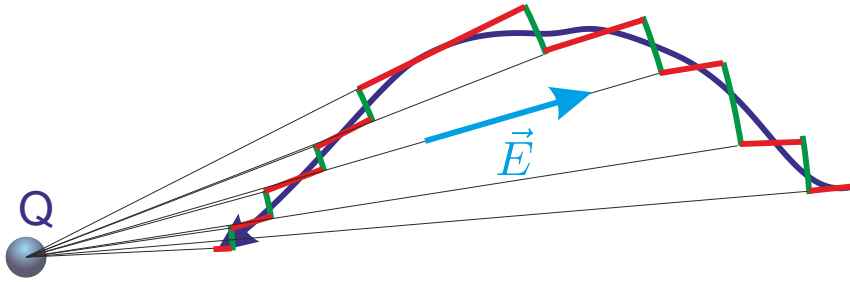
Eine potentielle Energie existiert, wenn

- Die Arbeit  $W(\mathbf{r}_1 \rightarrow \mathbf{r}_2)$  unabhängig vom Weg ist.
- Die Arbeit für jede geschlossene Bahn null ist (Die Bahn darf keine Singularitäten des Feldes umschliessen).
- $\text{rot } \mathbf{F}(\mathbf{r}) = 0$  für alle  $\mathbf{r}$

<sup>5</sup>Auch bei Dielektrika gibt es Bildladungen

Die potentielle Energie einer Probeladung  $q$  im Feld der LADUNG  $Q$  ist

$$E_{pot}(\mathbf{r}_2) = E_{pot}(\mathbf{r}_1) - \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot d\mathbf{r} \quad (2.5.4)$$



**Abb. 2.17.:** Approximation eines beliebigen Integrationsweges durch Kreissegmente. Auf den Kreissegmenten (grün) ist  $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0$ , entlang der radialen Teile ist  $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int E(r)ds$ .

Da wir jede Bahnkurve durch Stücke in radialer Richtung und durch Bahnen mit  $\mathbf{r} = \text{const}$  approximieren können, und da die Bahnen auf den Kugelflächen keinen Beitrag geben (sie sind senkrecht zur Kraft) können wir das Integral vereinfachen.

$$\begin{aligned} E_{pot}(\mathbf{r}_2) &= E_{pot}(\mathbf{r}_1) - \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} \\ &= E_{pot}(r_1) - \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \left( -\frac{1}{r} \right)_{r_1}^{r_2} = E_{pot}(r_1) + \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) \end{aligned} \quad (2.5.5)$$

Üblicherweise setzt man  $E_{pot}(r = \infty) = 0$ . Damit wird

$$E_{pot}(\mathbf{r}) = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} \quad (2.5.6)$$

Aus der potentiellen Energie kann die Kraft mit dem Gradienten

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\mathbf{grad} E_{pot}(\mathbf{r}) \quad (2.5.7)$$

berechnet werden. Für die potentielle Energie der Coulomb-Kraft bekommen wir

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{r}) &= -\mathbf{grad} \left( \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \right) = -\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \mathbf{grad} \frac{1}{r} = -\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left( -\frac{1}{r^2} \right) \mathbf{grad} r \\ &= \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \end{aligned} \quad (2.5.8)$$

In Komponenten ist  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  und  $\mathbf{grad} = \nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$

Also

$$\begin{aligned}
 \mathbf{grad} \left( \frac{1}{r} \right) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\
 &= -\frac{1}{2} \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} (x^2 + y^2 + z^2) \\
 &= -\frac{1}{2} \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \\
 &= -\frac{1}{r^3} \cdot \mathbf{r}
 \end{aligned} \tag{2.5.9a}$$

oder direkt

$$\begin{aligned}
 \mathbf{grad} \left( \frac{1}{r} \right) &= -\frac{1}{r^2} \mathbf{grad} (r) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \frac{\partial}{\partial y} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \frac{\partial}{\partial z} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \end{pmatrix} = \left( -\frac{1}{r^2} \right) \begin{pmatrix} -\frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ -\frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ -\frac{2z}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \end{pmatrix} \\
 &= \left( -\frac{1}{r^2} \right) \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \left( -\frac{1}{r^2} \right) \frac{\mathbf{r}}{r}
 \end{aligned} \tag{2.5.9b}$$

Ergänzend zu Coulomb-Kraft hatten wir das elektrische Feld als auf eine Einheitsladung normierte Grösse eingeführt.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \tag{2.5.10}$$

Die potentielle Energie der LADUNG  $q$  im Feld der LADUNG  $Q$ , normiert auf  $q = 1$  ist das ELEKTRISCHE POTENTIAL  $\varphi$ , auch SPANNUNG  $U$  genannt. Ich verwende in diesem Skript die Begriffe ELEKTRISCHES POTENTIAL und SPANNUNG austauschbar.

$$\varphi(\mathbf{r}) = U(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} = \frac{E_{pot}(\mathbf{r})}{q} \tag{2.5.11}$$

Wichtig ist die Beziehung

$$E_{pot}(r) = q\varphi(\mathbf{r}) = qU(\mathbf{r}) \tag{2.5.12}$$

Wie die Kraft aus der potentiellen Energie über die Gradientenbildung hervorgeht, wird das elektrische Feld mit

$$\mathbf{E} = -\mathbf{grad} \varphi = -\mathbf{grad} U \tag{2.5.13}$$

berechnet.

Folgende Relationen gelten



$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{F}(\mathbf{r}) & \xrightarrow[\cdot q]{\lim_{q \rightarrow 0} /q} & \mathbf{E}(\mathbf{r}) \\
 \downarrow -\int \mathbf{F} d\mathbf{r} & & \downarrow -\int \mathbf{E} d\mathbf{r} \\
 \uparrow -\text{grad } E_{\text{pot}} & & \uparrow -\text{grad } \varphi \\
 E_{\text{pot}}(\mathbf{r}) & \xrightarrow[\cdot q]{\lim_{q \rightarrow 0} /q} & \varphi(\mathbf{r}) = U(\mathbf{r})
 \end{array}
 \tag{2.5.14}$$

Wir merken uns

$$U(\mathbf{r}_2) = U(\mathbf{r}_1) - \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \tag{2.5.15}$$

analog zur potentiellen Energie.

Die Einheit des elektrostatischen Potentials oder der SPANNUNG ist

$$1 \text{ Volt} = 1 \frac{\text{Joule}}{\text{Coulomb}} = 1 \frac{J}{A \cdot s} = 1 \frac{W}{A}$$

Bem.: Beim elektrischen Feld ist der Feldvektor  $\mathbf{E}$ , bei der Gravitation  $\mathbf{g}$

Das Gravitationspotential ist  $U_{\text{grav}}(r) = -G \frac{m}{r}$ .

Da die Coulomb-Kräfte additiv sind, ist auch das elektrostatische Potential oder die elektrostatische potentielle Energie additiv. Das Potential von LADUNGEN  $q_i$  an den Orten  $\mathbf{r}_i$  ist also

$$U(\mathbf{r}) = \sum_{i=0}^N U_i(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=0}^N \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} \tag{2.5.16}$$

Für kontinuierliche Ladungsverteilungen  $\rho_{el}(\mathbf{r})$  ist das Potential

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho_{el}(\mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{dq(\mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} \tag{2.5.17}$$

### Versuch zur Vorlesung:

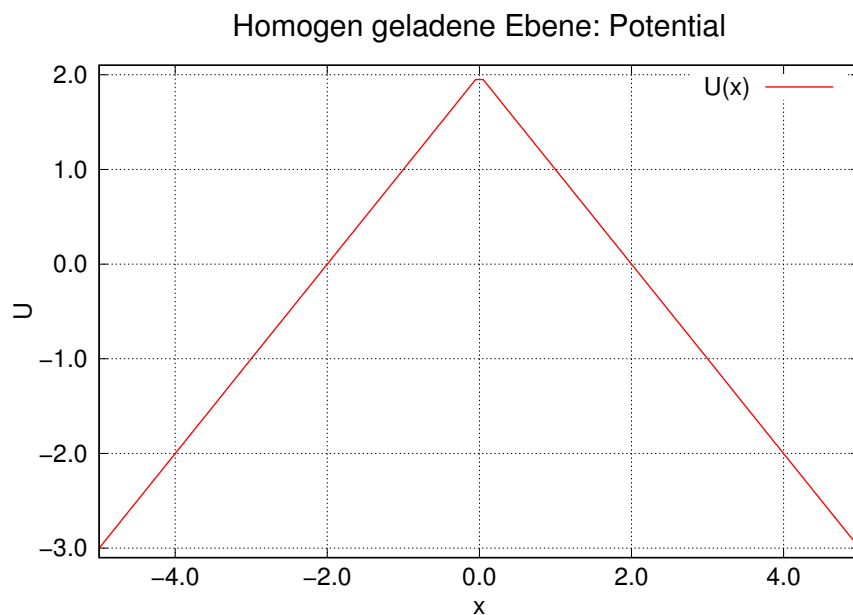
Flächenladungsdichte ([Versuchskarte ES-08](#), [Video](#))

Eine homogen mit der Flächenladungsdichte  $\sigma$  geladene Ebene erzeugt ein konstantes elektrisches Feld  $E = \sigma/(2\epsilon_0)$ . Das elektrostatische Potential eines Punktes  $P$  im Abstand  $x > 0$  von der Platte kann gefunden werden, indem wir entlang des Lots vom Punkt  $P$  auf die Ebene integrieren.

$$U(x) = U(0) - \int_0^x E d\xi = U(0) - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \int_0^x d\xi = U(0) - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} x \quad \text{für } x > 0 \quad (2.5.18)$$

Für  $x < 0$  berechnet man

$$U(x) = U(0) - \left(-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\right) x = U(0) + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} x \quad \text{für } x < 0 \quad (2.5.19)$$



**Abb. 2.18.:** Potential senkrecht zu einer homogen geladenen Ebene mit  $U_0 = 2$  und  $\sigma = 2\varepsilon_0$ .

Das elektrostatische Potential eines Kreisringes mit der LADUNG  $Q$  und dem Radius  $R$  im Abstand  $x$  auf der Symmetrieachse soll berechnet werden. Wir verwenden, dass

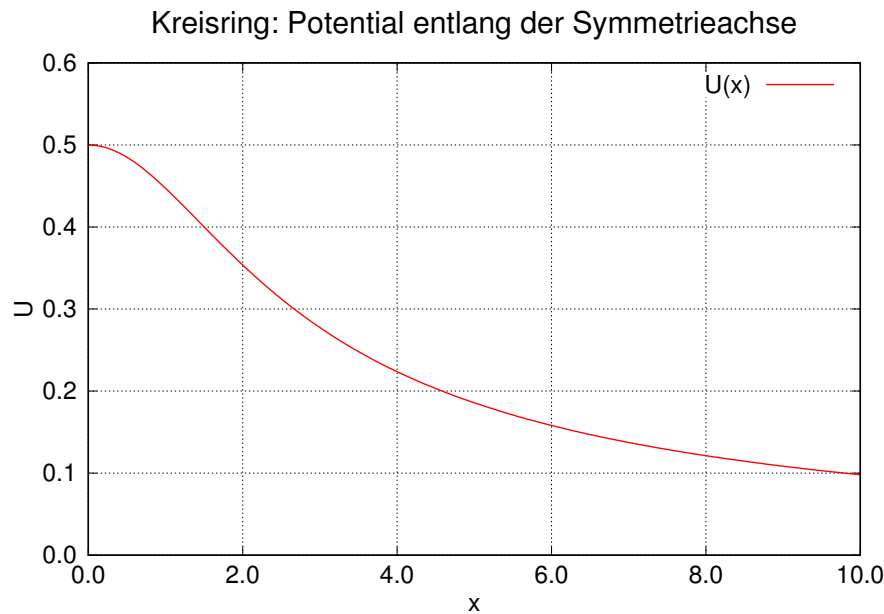
$$dU(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r} dq$$

ist, mit

$$\int_0^{2\pi} dq = Q$$

Wir erhalten

$$U(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{dq}{\sqrt{x^2 + R^2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{\sqrt{x^2 + R^2}} \quad (2.5.20)$$



**Abb. 2.19.:** Potential eines Kreisringes entlang der Symmetrieachse für eine positive LADUNG  $Q = 4\pi\epsilon_0$  und dem Radius  $R = 2$ .

Analog kann das Potential einer homogen geladenen Scheibe mit dem Radius  $R$  entlang ihrer Symmetrieachse  $x$  berechnet werden. Die Ladungsdichte der Scheibe sei  $\sigma = Q/(\pi R^2)$ . Ein Kreisring mit dem Radius  $a$  trägt die LADUNG  $dq = 2\pi a\sigma da$  und erzeugt dann das Potential

$$dU(a, x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{\sqrt{x^2 + a^2}} \quad (2.5.21)$$

Durch Integration über die gesamte Scheibe erhalten wir

$$U(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \frac{2\pi a\sigma da}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{a da}{\sqrt{x^2 + a^2}} \quad (2.5.22)$$

Dieses Integral ergibt nach Bronstein[Bro+08, Seite 309, Nr. 193]

$$U(x) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \sqrt{x^2 + a^2} \Big|_0^R = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{x^2 + R^2} - x) \quad (2.5.23)$$

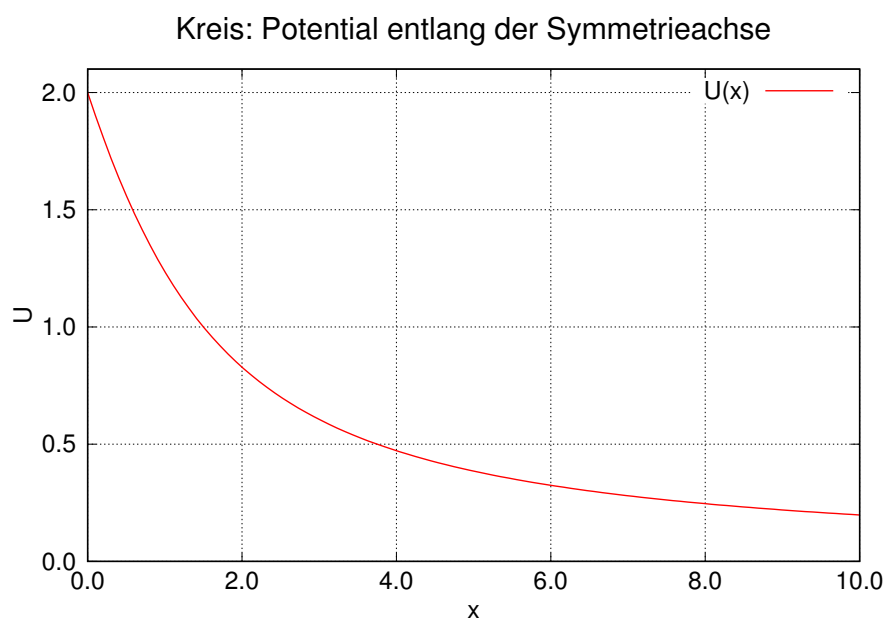
Asymptotisch verläuft auch dieses Potential für  $x \rightarrow \infty$  wie das Potential einer Punktladung, da

$$U(x) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( x \sqrt{1 + \frac{R^2}{x^2}} - x \right) \approx \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( x + \frac{R^2}{2x} - x \right) = \frac{\sigma}{4\epsilon_0} \frac{R^2}{x}$$

Für den anderen Grenzfall berechnen wir die Taylorreihe um 0 bis zum ersten Glied.

$$\begin{aligned}
 U(0) &= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} (\sqrt{0^2 + R^2} - 0) \\
 \left. \frac{d}{dx} U(x) \right|_{x=0} &= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left( \frac{1}{2} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + R^2}} - 1 \right) \Big|_{x=0} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \\
 U(x) &\approx \left( U(0) + \left. \frac{d}{dx} U(x) \right|_{x=0} x \right) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} (R - x)
 \end{aligned}$$

Die beiden Grenzfälle zeigen, dass sich die geladene Kreisscheibe für  $x \gg R$  wie eine Punktladung und für  $x \ll R$  wie eine unendlich ausgedehnte Platte verhält.



**Abb. 2.20.:** Elektrostatisches Potential einer homogen geladenen Kreisscheibe entlang ihrer Symmetrieachse mit  $R = 2$  und  $\sigma = 2\varepsilon_0$ .

Das Potential einer homogen geladenen Kugelschale wird mit dem elektrischen Feld berechnet. Das radiale elektrische Feld ist  $E_r(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2}$ . Damit ist das Potential

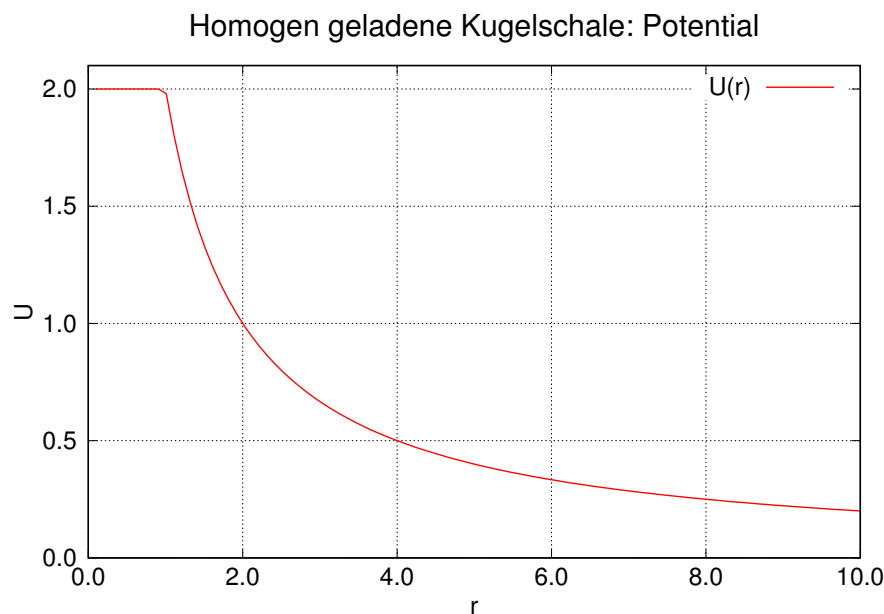
$$\begin{aligned}
 U(r) &= U(\infty) - \int_{\infty}^r \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} dr \\
 &= U(\infty) - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\infty}^r \frac{dr}{r^2} \\
 &= U(\infty) - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left( -\frac{1}{r} \right) \Big|_{\infty}^r \\
 &= U(\infty) + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r}
 \end{aligned} \tag{2.5.24}$$

Oder mit  $U(\infty) = 0$

$$U(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \quad \text{für } r > R \quad (2.5.25)$$

Innerhalb der Kugelschale ist das elektrische Feld null, das Potential also konstant.

$$U(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} \quad \text{für } r < R \quad (2.5.26)$$



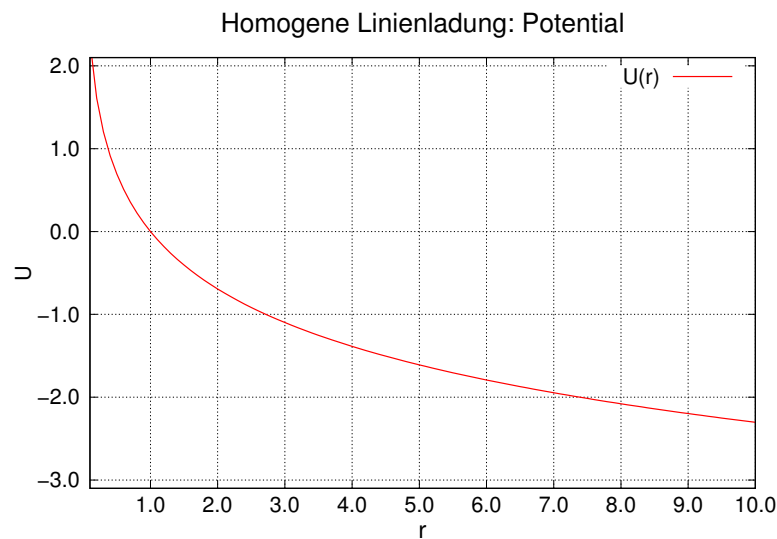
**Abb. 2.21.:** Potential einer homogen geladenen Kugelschale mit  $R = 1$  und  $Q = 8\pi\epsilon_0$ .

Schliesslich berechnen wir das elektrostatische Potential in der Nähe einer unendlich ausgedehnten Linienladung mit der Ladungsdichte  $\lambda$ . Das radiale elektrische Feld ist  $E = \lambda/(2\pi\epsilon_0 x)$ . Das Potential ist dann

$$U(r) = U(r_0) - \int_{r_0}^r \frac{\lambda dx}{2\pi\epsilon_0 x} = U(r_0) - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) \quad (2.5.27)$$

Wir setzen  $U(r_0) = 0$  und erhalten

$$U(r) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) \quad (2.5.28)$$



**Abb. 2.22.:** Potential in der Nähe einer unendlich ausgedehnten homogenen Linienladung mit  $r_0 = 1$  und  $\lambda = 2\pi\epsilon_0$ .

## 2.6. Poisson-Gleichung

**Literatur:** (Siehe Kneubühl, Repetitorium der Physik [Kne78, pp. 197]) (Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 703])

Wir hatten in Gleichung (2.3.9) gesehen, dass

$$\operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{r}) = \rho_{el}(\mathbf{r}) \quad (2.6.1)$$

ist.

Gleichung (2.5.13) besagt, dass

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\operatorname{grad} \varphi(\mathbf{r}) \quad (2.6.2)$$

ist. Mit der im Vakuum geltenden Beziehung  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$  erhalten wir die Poisson-Gleichung.

$$-\epsilon_0 \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi(\mathbf{r}) = \rho_{el}(\mathbf{r}) = -\epsilon_0 \Delta \varphi(\mathbf{r}) \quad (2.6.3)$$

oder

$$\Delta \varphi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho_{el}(\mathbf{r})}{\epsilon_0} \quad (2.6.4)$$

Dabei haben wir den Laplace-Operator  $\Delta = \operatorname{div} \operatorname{grad} = \nabla \cdot \nabla$  verwendet. In Komponentenschreibweise in einem kartesischen Koordinatensystem ist dies

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left( \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (2.6.5)$$

Die POISSONGLEICHUNG ermöglicht eine Berechnung der Potentiale ausgehend von Ladungsverteilungen.

**Bemerkung:**

Im allgemeinen Falle bei beliebigen Materialien lautet die Beziehung zwischen der dielektrischen Verschiebung  $D$  und dem elektrischen Feld  $E$

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \underline{\varepsilon} \varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (2.6.6)$$

Dabei ist die relative Dielektrizitätszahl  $\underline{\varepsilon}$  im einfachsten Falle eine Zahl und im allgemeinen Falle ein TENSOR zweiter Stufe. Die allgemeine POISSONGLEICHUNG (Gleichung (2.6.4)) wird dann wie folgt geschrieben

$$\operatorname{div} (\underline{\varepsilon} \varepsilon_0 \operatorname{grad} \varphi(\mathbf{r})) = -\rho_{el} = \nabla \cdot (\underline{\varepsilon} \varepsilon_0 \nabla \varphi(\mathbf{r})) \quad (2.6.7)$$

**Beispiel:** Ebene

Bei einer geladenen Ebene ist  $\rho_{el}(x, y, z) = \delta(z) \sigma(x, y) = \delta(z) \sigma_0$  mit  $\sigma(x, y) = \sigma_0$ . Die Poissongleichung wird, wegen der Translationssymmetrie in  $x$  und  $y$  zu

$$\Delta U = \frac{\partial^2}{\partial z^2} U = -\frac{\sigma_0 \delta(z)}{\varepsilon_0} \quad (2.6.8)$$

Daraus folgt, dass  $\frac{\partial U}{\partial z} = \text{const} \neq 0$  für  $z \neq 0$ .

Bei  $z = 0$  haben wir einen Sprung der Grösse  $\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}$  der symmetrisch von  $+\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}$  bis  $-\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}$  reichen muss. Nochmals integrieren ergibt

$$U(z) = \begin{cases} U_0 + \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0} z & \text{für } z < 0 \\ U_0 - \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0} z & \text{für } z > 0 \end{cases} \quad (2.6.9)$$

$U_0$  ist eine frei wählbare Integrationskonstante.

Das Innere eines Leiters ist ein Äquipotentialraum, da in einem Leiter LADUNGEN sich frei bewegen können. Da Feldlinien  $d\mathbf{E}$  senkrecht zu einer Metalloberfläche, die immer eine Äquipotentialfläche ist, stehen kann man schliessen (und mathematisch beweisen), dass Feldlinien senkrecht auf Äquipotentialflächen stehen.

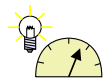
An Luft kann man nicht beliebige Potentialunterschied aufrechterhalten. Die möglichen Potentialdifferenzen werden durch Funkenüberschläge begrenzt. Für Luft unter Normalbedingungen muss

$$E < 3 \cdot 10^6 \text{ V m}^{-1} \quad (2.6.10)$$

sein.

## 2.7. Kapazität: eine geometrische Eigenschaft

**Literatur:** (Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 722]) (Siehe Kneubühl, Repetitorium der Physik [Kne78, pp. 202])



## Versuch 12: Versuch zur Vorlesung:

### Kapazität von Kugeln (Versuchskarte ES-27)

Wir wollen das folgende Problem lösen:

- Wieviel LADUNG kann auf einer Leiteranordnung gespeichert werden?

Wir wissen:

Im Inneren der Leiter ist  $U = \text{const}$  und  $\rho_{el} = 0$

- An der Oberfläche sind die  $\mathbf{E}$ -Felder senkrecht zur Oberfläche
- Zwischen den Leitern ist  $\rho_{el} = 0$ , also  $\Delta U = 0$
- Die LADUNGEN auf den Leitern sind Oberflächenladungsdichten.

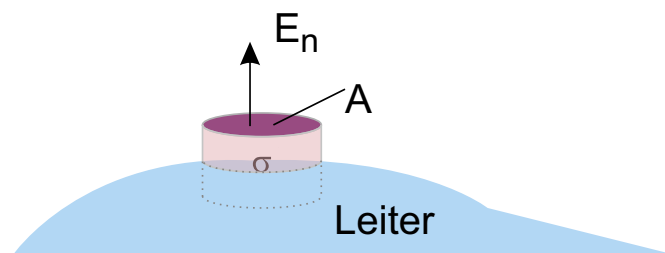


Abb. 2.23.: Integrationsoberfläche an der Grenze Metall-Vakuum.

Wir betrachten eine kleine zylinderförmige Oberfläche und verwenden

$$\iint_a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{q_{\text{eingeschlossen}}}{\varepsilon_0} \quad (2.7.1)$$

Da das Feld im Inneren des Leiters verschwindet und die Seitenflächen keinen Beitrag geben, ist

$$\varepsilon_0 \mathbf{E}_\perp = \sigma \quad (2.7.2)$$

Bei einer genügend grossen ebenen Fläche  $A$  ist die LADUNG dann

$$Q = \int_A \sigma da = \int_A \varepsilon_0 \mathbf{E}_\perp da \approx \varepsilon_0 \mathbf{E}_\perp A \quad (2.7.3)$$

$A$  repräsentiert hier die Geometrie, so dass man schliessen kann, dass die gesamte LADUNG von der Geometrie der Leiter abhängt [Jac75, S. 48]. Wenn wir die Leiter  $1, 2, \dots, n$  betrachten, ist

$$U_j - U_i = \frac{Q_j - Q_i}{C_{ji}} = U_{ji} = \varphi_{ji} \quad (2.7.4)$$



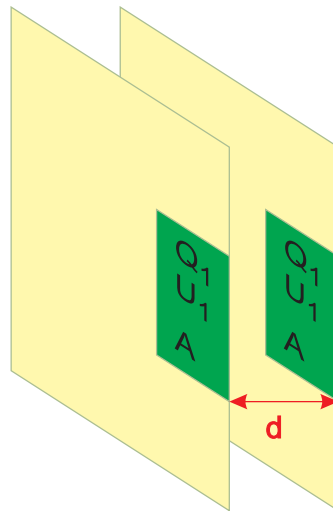
mit  $U_j$  dem Potential auf dem Leiter  $j$  und  $U_i$  dem Potential auf dem Leiter  $i$ .  $C_{ji}$  ist die Kapazität zwischen den Leitern  $i$  und  $j$ .

Da die Nummerierung in der Gleichung (2.7.4) willkürlich ist, muss  $C_{ij} = C_{ji}$  gelten.

Die Einheit der Kapazität ist

$$1 \text{ Farad} = 1 \text{ F} = 1 \text{ C V}^{-1} = 1 \text{ A s V}^{-1} \quad (2.7.5)$$

Als erstes Beispiel betrachten wir den Plattenkondensator



**Abb. 2.24.:** Geometrie eines Plattenkondensators. Wir betrachten auf beiden Seiten eine Fläche  $A$  die jeweils in eine unendlich ausgedehnte Fläche eingebettet ist.

Wir benutzen, dass das elektrische Feld einer unendlich ausgedehnten homogenen Flächenladung konstant  $E_{Ebene} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$  ist (Gleichung (2.4.8)).

Auf den Kondensatorplatten ist die LADUNG  $Q = A\sigma = 2\varepsilon_0 E_{Ebene} A$ .

Das elektrische Feld zwischen den beiden Platten stammt von beiden Platten, also ist

$$\mathbf{E} = 2\mathbf{E}_{Ebene} \quad (2.7.6)$$

Also ist  $Q = A\sigma = \varepsilon_0 EA$ . Deshalb ist das Potential am Ort der zweiten Platte gemessen von der ersten Platte

$$U_{2,1} = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{d} \implies |U_{2,1}| = 2E_{Ebene} \cdot d = 2 \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} d = \frac{\sigma d}{\varepsilon_0} \quad (2.7.7)$$

Damit ist die Potentialdifferenz zwischen den beiden Platten oder die angelegte SPANNUNG

$$U = \frac{\sigma d}{\varepsilon_0} = \frac{Qd}{A\varepsilon_0} \quad (2.7.8)$$

oder

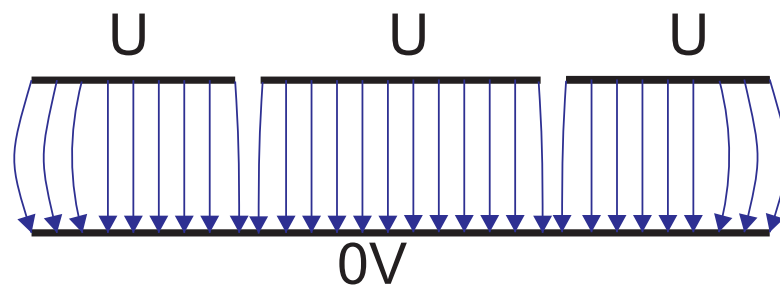
$$\frac{Q}{U} = \varepsilon_0 \frac{A}{d} = C \quad (2.7.9)$$

Damit haben wir die Kapazität eines Plattenkondensators berechnet. Wir haben dabei benutzt, dass  $\sigma$  die Flächenladungsdichte einer dünnen Platte ist. Hätten wir einen dicken Leiter genommen, mit den Oberflächenladungsdichten  $\sigma_+$  und  $\sigma_- = -\sigma_+$  auf jeweils leitenden Halbräumen, wäre das Resultat mit  $E_{\text{Halbraum}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

$$U_{2,1,\text{Halbräume}} = (E_{\text{Halbraum},+} - E_{\text{Halbraum},-}) \cdot d = \frac{\sigma_+}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma_-}{\varepsilon_0} = \frac{2\sigma_+}{\varepsilon_0} \quad (2.7.10)$$

Dies ist kompatibel mit Gleichung (2.7.4). Bei realen, nicht unendlichen Platten gibt es auch eine Wechselwirkung der Rückseiten. Weiter ist wegen der INFLUENZ die Ladung nicht gleichverteilt.

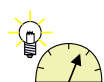
Beachte, dass wir einen endlichen Plattenkondensator, der in einen unendlichen Plattenkondensator eingebettet ist, betrachtet haben, um Randeffekte auszuschliessen.



**Abb. 2.25.:** Durch die Dreiteilung des Kondensators können bei einem realen Kondensator die Randeffekte minimiert werden. Die kleine Lücke stört das homogene Feld nur unwesentlich.

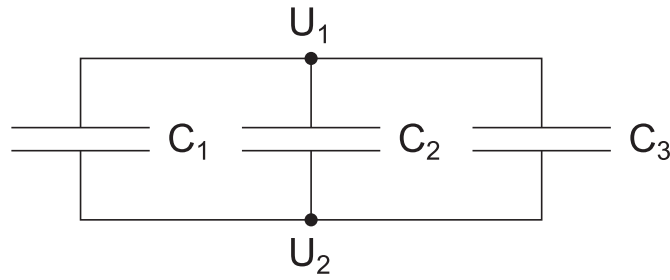
**Beispiel:** Ein Kondensator mit  $d = 0.1 \mu\text{m}$ ,  $A = 1 \text{ m}^2$  sei auf die Spannung  $U = 10 \text{ V}$  geladen. Dann ist  $C = 88.5 \mu\text{F}$ ,  $Q = 0.885 \text{ mC}$ ,  $\sigma = \frac{Q}{A} = 0.885 \text{ mC/m}^2$  und  $E = 10^8 \text{ V m}^{-1}$ .

Aus der Additivität der Ladung folgt, dass bei der PARALLELSCHALTUNG von KONDENSATOREN sich die Kapazitäten addieren.



### Versuch 13: Versuch zur Vorlesung:

Reihen- und Parallelschaltung von Kapazitäten (Versuchskarte EM-48)



**Abb. 2.26.:** PARALLELSCHALTUNG von Kondensatoren.

$$\begin{aligned} Q_1 &= C_1 U \\ Q_2 &= C_2 U \\ Q_3 &= C_3 U \end{aligned} \quad (2.7.11)$$

$$Q_{ges} = Q_1 + Q_2 + Q_3 = (C_1 + C_2 + C_3)U \quad (2.7.12)$$

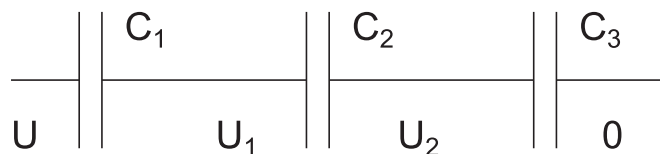
oder

$$\frac{Q_{ges}}{U} = C_{ges} = \frac{Q_1 + Q_2 + Q_3}{U} = C_1 + C_2 + C_3 \quad (2.7.13)$$

bei Parallelschaltung

$$C = \sum_{i=1}^n C_i \quad (2.7.14)$$

Bei der REIHENSCHALTUNG wird die angelegte SPANNUNG  $U$  auf die in Reihe geschalteten Kondensatoren aufgeteilt.



**Abb. 2.27.:** REIHENSCHALTUNG oder SERIENSCHALTUNG von Kondensatoren.

Auf den Kondensatoren sind die LADUNGEN

$Q = Q_1 = (U - U_1)C_1 = Q_2 = (U_1 - U_2)C_2 = Q_3 = U_2C_3$  gespeichert, da in diesem System nur LADUNGEN verschoben, aber nicht erzeugt oder vernichtet

werden können.  
Also ist

$$\begin{aligned}\frac{Q}{C_1} &= U - U_1 \\ \frac{Q}{C_2} &= U_1 - U_2 \\ \frac{Q}{C_3} &= U_2\end{aligned}\tag{2.7.15}$$

oder

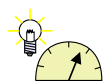
$$U = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \frac{Q}{C_3} = Q \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right) = \frac{Q}{C_{ges.}}\tag{2.7.16}$$

Für die Reihenschaltung gilt

$$\frac{1}{C_{ges}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}\tag{2.7.17}$$

## 2.8. Energie des elektrischen Feldes

**Literatur:** (Siehe Kneubühl, Repetitorium der Physik [Kne78, pp. 204]) (Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 729])



### Versuch 14: Versuch zur Vorlesung:

Energieumwandlung (Versuchskarte EM-157)

Ein Plattenkondensator der Kapazität  $C$  sei auf die SPANNUNG  $U = \frac{Q}{C}$  aufgeladen. Wir transportieren die LADUNG  $\Delta Q$  von einer Seite zur anderen. Die Arbeit ist

$$W(Q, Q + \Delta Q) = U \cdot \Delta Q = \frac{Q \Delta Q}{C}\tag{2.8.1}$$

Dabei haben wir die LADUNG  $\Delta Q$  über die Potentialdifferenz  $U$  transportiert.

$$W(0, Q) = \int_0^Q \frac{Q dQ}{C} = \frac{Q^2}{2C}\tag{2.8.2}$$

also

$$E_{pot}(C) = \frac{Q^2}{2C}\tag{2.8.3}$$

oder mit  $C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$

$$E_{pot}(d) = \frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 A} \quad (2.8.4)$$

oder mit  $Q = U \cdot C$

$$E_{pot}(U) = \frac{U^2 \cdot C}{2} \quad (2.8.5)$$

Das Integral über die Oberfläche eines Leiters verknüpft die Ladung  $Q = EA\varepsilon_0$  mit dem elektrischen Feld. Das Volumen ist  $V = A \cdot d$ . Zusammen ergibt sich

$$E_{pot} = \frac{E^2 \cdot A \cdot d \cdot \varepsilon_0}{2} = \frac{E^2 \cdot V \cdot \varepsilon_0}{2} = \frac{E \cdot D \cdot V}{2} \quad (2.8.6)$$

oder mit  $w_{el} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{E_{pot}}{V}$  der ENERGIEDICHTE DES ELEKTRISCHEN FELDES

$$w_{el} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{2} \quad (2.8.7)$$

Die Kraft  $\Delta \mathbf{F}_V$  auf ein Volumenelement  $\Delta V$  wird durch

$$\mathbf{F}_V(\mathbf{r}) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}_V(\mathbf{r})}{\Delta V} = \rho_{el}(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (2.8.8)$$

beschrieben, da

$$\Delta \mathbf{F}_V(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \Delta Q = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \rho_{el} \cdot \Delta V \quad (2.8.9)$$

Das elektrische Feld übt eine MECHANISCHE SPANNUNG aus

$$\sigma_{Maxwell} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}}{\Delta V} \quad (2.8.10)$$

Diese Spannung wird MAXWELLSPANNUNG genannt. Sie hat die Einheit des Druckes.  $\mathbf{n}$  ist der Normalenvektor der Oberfläche.

Die OBERFLÄCHENLADUNGSDICHTE eines Metalls sei die Ursache des elektrischen Feldes. Wir hatten die potentielle Energie im Feld des Plattenkondensators ausgerechnet:  $E_{pot} = \frac{Q^2}{2C}$ . Die Arbeit, den Kondensator von  $d$  auf  $d + \Delta d$  zu bringen ist.

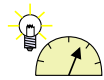
$$\begin{aligned} W(d, d + \Delta d) &= F \Delta d &= E_{pot}(d + \Delta d) - E_{pot}(d) \\ &= \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 A} (d + \Delta d) - \frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 A} &= \frac{Q^2 \Delta d}{2\varepsilon_0 A} \\ &= \frac{Q^2}{A^2} \cdot \frac{\Delta d A}{2\varepsilon_0} &= \sigma^2 \frac{\Delta d A}{2\varepsilon_0} \\ &= \varepsilon_0^2 E^2 \cdot \frac{A \Delta d}{2\varepsilon_0} &= \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 A \Delta d \end{aligned} \quad (2.8.11)$$

und damit

$$\sigma_{Maxwell} = \frac{F}{A} = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 = \frac{\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}}{2} \quad (2.8.12)$$

Beispiel: In einem Laser können Felder von  $10^{12} \text{ V m}^{-1}$  auftreten. Dies entspricht einer Maxwell-Spannung von  $4.43 \cdot 10^{12} \text{ Pa} \simeq 4.43 \cdot 10^7 \text{ bar}$ .

**Wichtig: Energiedichten haben die Einheit des Druckes. In jedem Raumgebiet, in dem Energie gespeichert wird, herrscht Druck.**

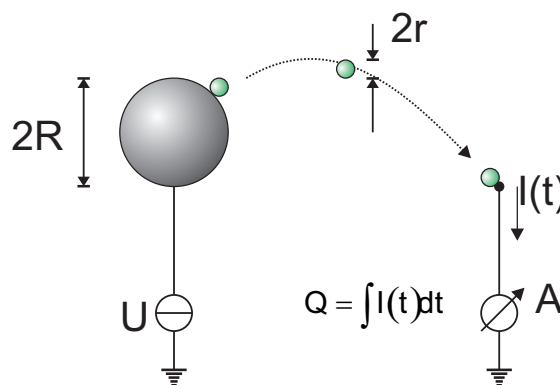


### Versuch 15: Versuch zur Vorlesung:

Spannungswaage (Kirchhoffsche Waage) (Versuchskarte ES-16, Video)

### 2.8.1. Diskussion Versuch Flächenladungsdichte

Im Versuch **Flächenladungsdichte** wird die Flächenladungsdichte gemessen, indem eine kleine Kugel in Kontakt mit verschieden grossen Kugeln auf einem konstanten Potential  $\varphi = U$  gebracht werden.



**Abb. 2.28.:** Schematische Darstellung des Flächenladungsversuches.

In der Abbildung 2.28 wird der Messprozess schematisch gezeigt. Eine Kugel mit dem Radius  $R$  wird auf die SPANNUNG  $U$  aufgeladen. Die kleine Kugel mit dem Radius  $r$  wird mit der grossen Kugel in Kontakt gebracht. Nach kurzer Zeit haben beide Kugeln gegen Erde (unendlich) das Potential  $\varphi_0 = U$ . Wenn wir annehmen, dass die kleine Kugel eine unwesentliche Störung der grossen Kugel ist, ist die Kapazität der beiden Kugeln

$$C_{\text{gemeinsam}} \approx C_R = 4\pi\epsilon_0 R \quad (2.8.13)$$

Die Flächenladungsdichte der beiden Kugeln im Kontakt ist durch

$$Q_R = 4\pi (R^2 + r^2) \sigma_{\text{gemeinsam}} = C_{\text{gemeinsam}} U \approx C_R U = 4\pi\epsilon_0 R U \quad (2.8.14)$$

gegeben. Durch die Trennung der beiden Kugeln wird die Flächenladungsdichte  $\sigma_{\text{gemeinsam}}$  auf beiden Kugeln eingefroren. Für die kleine Kugel haben wir dann

$$q_r = 4\pi r^2 \sigma_{\text{gemeinsam}} \quad (2.8.15)$$

Die Kugel hat nach der Trennung ein anderes Potential gegen unendlich, nämlich

$$q_r = 4\pi r^2 \sigma_{\text{gemeinsam}} = C_r U_r = 4\pi \varepsilon_0 r U_r \Rightarrow U_r = \frac{r \sigma_{\text{gemeinsam}}}{\varepsilon_0}$$

Aus dem Potential an der grossen Kugel  $U = \frac{R \sigma_{\text{gemeinsam}}}{\varepsilon_0}$  bekommt man

$$\sigma_{\text{gemeinsam}} = \frac{\varepsilon_0 U}{R} \quad (2.8.16)$$

und

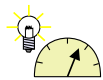
$$U_r = U \frac{r}{R} \quad (2.8.17)$$

Aus Gleichung (2.8.15) und Gleichung (2.8.16) erhalten wir

$$q_r = 4\pi r^2 \frac{\varepsilon_0 U}{R} = \frac{4\pi \varepsilon_0 r^2}{R} U = 4\pi r^2 \sigma_{\text{gemeinsam}} \quad (2.8.18)$$

Die Kugel wird schliesslich auf das Ladungsmessgerät (eigentlich ein Strom-Integrierer) aufgebracht. Die gemessene Ladung ist proportional zu  $1/R$  und damit proportional zu  $\sigma_{\text{gemeinsam}}$ .

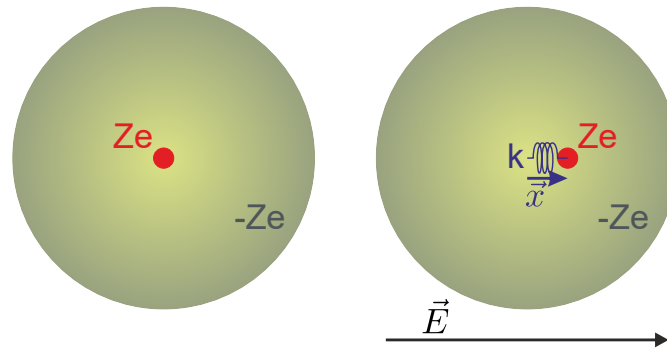
## 2.9. Elektrische Eigenschaften der Materie



### Versuch 16: Versuch zur Vorlesung:

Influenzversuch: Verschiebungsdichte im Kondensator (Versuchskarte ES-018, Video)

Wir betrachten ein Modellatom bestehend aus einem KERN der LADUNG  $Ze$  und einer Elektronenwolke der LADUNG  $-Ze$ . Ohne äusseres Feld liegen die Ladungsschwerpunkte übereinander. Dabei ist hier  $Z$  die Anzahl der PROTONEN im Kern, die KERNLADUNGSZAHL.



**Abb. 2.29.:** Schematisches Bild eines ATOMS mit seiner ELEKTRONENHÜLLE.

Auf den positiven Kern wirkt die Kraft

$$\mathbf{F}_+ = Z e \mathbf{E} \quad (2.9.1)$$

Auf die negative Elektronenwolke wirkt

$$\mathbf{F}_- = -Z e \mathbf{E} \quad (2.9.2)$$

Die Federkraft wirkt auf die positive Ladung wie

$$\mathbf{F}_{+, \text{Feder}} = -k \mathbf{x} \quad (2.9.3)$$

Auf die negative Ladung wirkt die Federkraft

$$\mathbf{F}_{-, \text{Feder}} = -k (-\mathbf{x}) \quad (2.9.4)$$

Das Kräftegleichgewicht für die positive Ladung lautet:

$$\mathbf{F}_+ + \mathbf{F}_{+, \text{Feder}} = 0 = Ze\mathbf{E} - k\mathbf{x} \Rightarrow Ze\mathbf{E} = k\mathbf{x} \quad (2.9.5)$$

Alternativ kann das Kräftegleichgewicht für die negative Ladung angegeben werden:

$$\mathbf{F}_- + \mathbf{F}_{-, \text{Feder}} = 0 = -Ze\mathbf{E} - k(-\mathbf{x}) \Rightarrow Ze\mathbf{E} = k\mathbf{x} \quad (2.9.6)$$

Das INDUZIERTES DIPOLMOMENT ist

$$\mathbf{p}_{\text{ind}} = Ze\mathbf{x} \quad (2.9.7)$$

und damit

$$\mathbf{p}_{\text{ind}} = \frac{(Ze)^2}{k} \cdot \mathbf{E} = \alpha \mathbf{E} \quad (2.9.8)$$

Dabei ist  $\alpha$  die ATOMARE POLARISIERBARKEIT (Einheit  $[\alpha] = \text{Fm}^2 = \text{Cm}^2/\text{V} =$



Asm<sup>2</sup>/V).

---

Atom oder Molekül	$\alpha / (10^{-40} \text{ Asm}^2/\text{V})$
He	0.2
Li <sup>+</sup>	0.03
Ne	0.4
K <sup>+</sup>	0.9
Xe	3.5
O <sup>++</sup>	3.5
CCl <sub>4</sub>	10
Cl <sup>-</sup>	4
I <sup>-</sup>	7

**Tab. 2.2.:** Gefüllte Elektronenschale

---



---

Atom oder Molekül	$\alpha / (10^{-40} \text{ Asm}^2/\text{V})$
H	0.7
Li	13
K	38
Cs	46

**Tab. 2.3.:** Nicht gefüllte Elektronenschale

---

Die potentielle Energie des induzierten Dipols im homogenen Feld  $\mathbf{E}$  ist

$$E_{\text{pot}} = \frac{\alpha}{2} \mathbf{E}^2 = \frac{\mathbf{p}_{\text{ind}}^2}{2\alpha} = \frac{1}{2} \mathbf{E} \mathbf{p}_{\text{ind}} \quad (2.9.9)$$

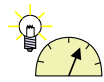
da

$$\Delta E_{\text{pot}} = W(\mathbf{p}, \mathbf{p} + \Delta \mathbf{p}) = Q \mathbf{E} \cdot \Delta \mathbf{x} = \mathbf{E} \cdot \Delta \mathbf{p} = \frac{\mathbf{p}}{\alpha} \cdot \Delta \mathbf{p} \quad (2.9.10)$$

und damit

$$E_{\text{pot}} = \int_0^{\mathbf{p}} \frac{\mathbf{p}}{\alpha} d\mathbf{p} = \frac{\mathbf{p}^2}{2\alpha} \quad (2.9.11)$$

### 2.9.1. Dielektrika



#### Versuch 17: Versuch zur Vorlesung:

Plattenkondensator mit Dielektrikum (Versuchskarte ES-3, Video)

Bis jetzt haben wir angenommen, dass das elektrische Feld im Vakuum gemessen wurde. Dann gilt

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} \quad (2.9.12)$$

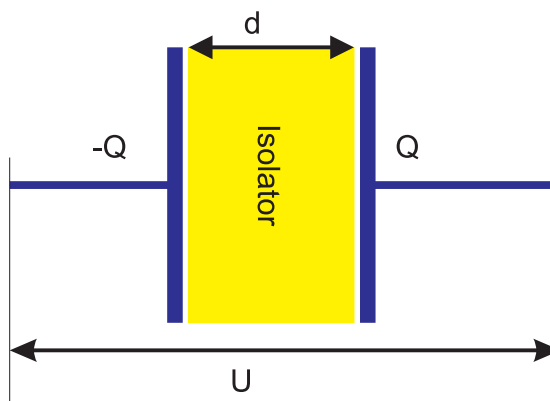


Abb. 2.30.: Isolatoren in einem Kondensatoren

Die Beziehung zwischen angelegter SPANNUNG und dem elektrischen Feld ist

$$E = \frac{U}{d} \quad (2.9.13)$$

unabhängig von den Eigenschaften des Isolationsmaterials.

Andererseits ist

$$D = \varepsilon_0 E = \frac{\varepsilon_0 U}{d} = \frac{\varepsilon_0 Q}{Cd} = \frac{\varepsilon_0 Q}{\varepsilon_0 \frac{A}{d} d} = \frac{Q}{A} \quad (2.9.14)$$

abhängig von der gespeicherten LADUNG. Am Kondensator können  $D$  und  $E$  unabhängig bestimmt werden.

In vielen Fällen sind  $\mathbf{D}$  und  $\mathbf{E}$  linear voneinander abhängig.

$$\mathbf{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \mathbf{E} = (1 + \chi_e) \varepsilon_0 \mathbf{E} \quad (2.9.15)$$

mit  $\varepsilon \geq 1$  und  $\chi_e \geq 0$ .

$\varepsilon$  heisst die Permittivität,  $\chi_e$  die dielektrische Suszeptibilität.

Im Allgemeinen sind  $\varepsilon$  und  $\chi_e$  Tensoren.

---

Material	$\varepsilon$	$\alpha/(10^{-40} \text{ Asm}^2/\text{V})$
Vakuum	1	0
Luft	1.0006	2.00332
Paraffin	2.1	38.7601
Diamant	5.6	0.912181
Glas	5-9	5.71864 - 7.27827
Silizium	11.9	4.16924
Wasser (291K, 0Hz)	81	7.65901
Wasser (291K, 1PHz)	1.77	1.62297
Rutil ( $\perp$ )	90	7.9997
Rutil ( $\parallel$ )	170	8.12512

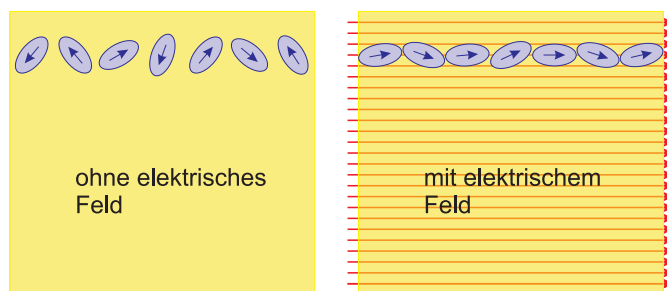
**Tab. 2.4.:** Einige relative Permittivitäten

---

Alle Formeln der Elektrostatik können auf isotrope und homogene DIELEKTRIKA angewandt werden, indem  $\varepsilon_0$  durch  $\varepsilon\varepsilon_0$  ersetzt wird.

### 2.9.1.1. Woher rührt $\varepsilon > 1$ ?

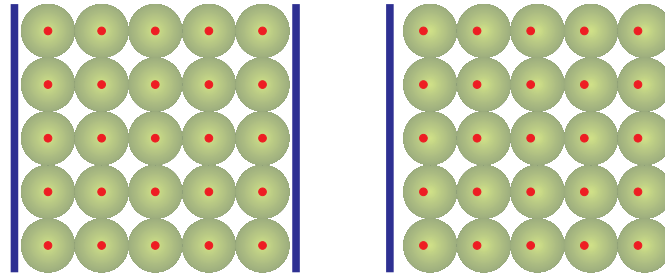
Wenn ein Material ortsfeste permanente elektrische **Dipole** besitzt, dann werden diese im extremen Feld ausgerichtet. Die **LADUNGEN** im Inneren des Materials kompensieren sich. An der Oberfläche treten **LADUNGEN** auf, die das äussere Feld schwächen.



**Abb. 2.31.:** Anordnung permanenter Dipole ohne und mit elektrischem Feld.

---

Dabei werden die positiven **LADUNGEN** an der Oberfläche angereichert, in die das elektrische Feld zeigt. Die negativen **LADUNGEN** werden auf der Gegenseite angereichert. Diese Polarisation heisst **ORIENTIERUNGSPOLARISATION**.



**Abb. 2.32.:** Links: unpolares Medium ohne äusseres elektrisches Feld. Rechts: mit einem nach links gerichteten elektrischen Feld.

Ein unpolares Medium wird durch das äussere Feld nach Gleichung (2.9.8) polarisiert. Die Ladungsschwerpunkte der Elektronen verschieben sich und wieder entsteht ein inneres elektrisches Feld, das dem äusseren Feld entgegen wirkt. Diese Polarisation ist die VERSCHIEBUNGSPOLARISATION.

### 2.9.1.2. Stetigkeitsbedingungen an der Grenze zweier Dielektrika

Wir verwenden das GAUSSSCHE GESETZ. Im ladungsfreien Raum gilt  $\text{div } \mathbf{D} = 0$  (siehe Gleichung (2.3.9)). Da das elektrostatische Feld ein konservatives Feld ist, gilt auch  $\text{rot } \mathbf{E} = 0$ . Wir betrachten eine Oberfläche  $A$ , die ein Stück  $\Delta A$  der Grenzfläche umschliesst. Dann ist

$$\int_A \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} = -D_{1\perp} \Delta A + D_{2\perp} \Delta A = 0$$

und damit gilt für die DIELEKTRISCHE VERSCHIEBUNG die folgende Stetigkeitsbedingung

$$D_{1\perp} = D_{2\perp} \quad (2.9.16)$$

Wir verwenden weiter eine Schlaufe  $s$ , die die Grenzfläche zweimal durchdringt und erhalten

$$\int_{A(s)} \text{rot } \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \oint_s \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = E_{1\parallel} \frac{s}{2} - E_{2\parallel} \frac{s}{2} = 0$$

und damit gilt für das ELEKTRISCHE FELD die folgende Stetigkeitsbedingung

$$E_{1\parallel} = E_{2\parallel} \quad (2.9.17)$$

An der Grenzfläche zweier Dielektrika gilt

- die Komponente der dielektrischen Verschiebung senkrecht zur Grenzfläche und
- die Komponente des elektrischen Feldes parallel zur Grenzfläche sind stetig.

Mit  $\mathbf{grad} \varphi = -\mathbf{E}$  können diese Stetigkeitsbedingungen auch für das POTENTIAL  $\varphi$  umgeschrieben werden

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_2 \\ \varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} &= \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \end{aligned} \quad (2.9.18)$$

### 2.9.1.3. Das Gesetz von Clausius und Mosotti

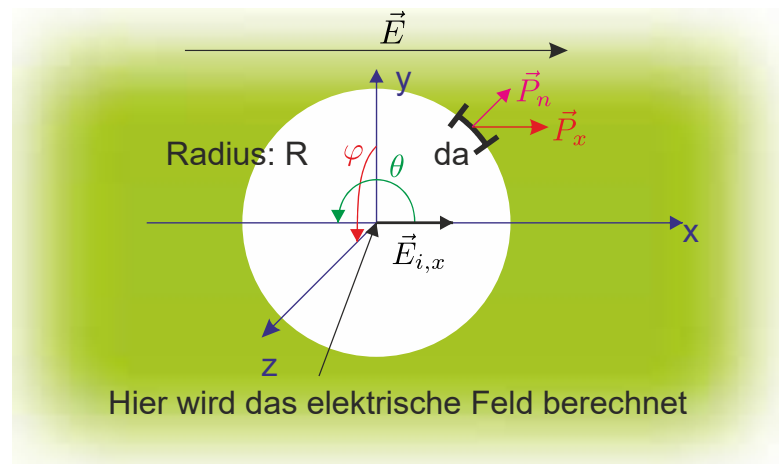
In diesem Abschnitt wollen wir aus einer mikroskopische Betrachtung einen Zusammenhang zwischen der relativen PERMITTIVITÄT und der POLARISIERBARKEIT ableiten. Die POLARISATION eines Atoms oder Moleküls hängt von der POLARISIERBARKEIT  $\alpha$  sowie vom lokalen elektrischen Feld  $\mathbf{E}_{\text{lokal}}$  ab. Dieses lokale Feld ist die Summe aus dem externen Feld  $\mathbf{E}$  sowie dem Feld aller anderen Dipole am Beobachtungsort,  $\mathbf{E}_i$ .

$$\mathbf{E}_{\text{lokal}} = \mathbf{E} + \mathbf{E}_i \quad (2.9.19)$$

Die POLARISATION hängt vom lokalen Feld  $\mathbf{E}_{\text{lokal}}$  wie folgt ab:

$$\mathbf{P} = n\mathbf{p}_{\text{ind}} = n\alpha\mathbf{E}_{\text{lokal}} \quad (2.9.20)$$

wobei  $n$  die Dichte der induzierten Dipole ist. Die Polarisation  $\mathbf{P}$  hat dann die Einheit  $[\mathbf{P}] = \text{C/m}^2$ .



**Abb. 2.33.:** Berechnung des Gesetzes von Clausius-Mosotti

Zur Berechnung von  $\mathbf{E}_i$  und damit  $\mathbf{E}_{\text{lokal}}$  betrachten wir ein homogenes Dielektrikum mit  $\varepsilon$ , bei dem ein kugelförmiges kleines Volumen mit dem Radius  $R$  entfernt wurde. In diesem Volumen berechnen wir das lokale Feld [Som78, S. 68], [LL85], das von einem externen Feld  $\mathbf{E}$  in der  $x$ -Richtung hervorgerufen wird.

Das externe elektrische Feld erzeugt im Inneren des Dielektrikums eine Polarisation, die das externe elektrische Feld schwächt. Deshalb gibt es an der Oberfläche eine Oberflächenladungsdichte, die durch die Polarisation im Inneren des Dielektrikums hervorgerufen wird.

Die Polarisation steht senkrecht auf der Kugeloberfläche (analoge Argumentation wie bei  $\mathbf{E}$ ). Das Die Polarisation des Dielektrikums erzeugt deshalb an der Oberfläche des Hohlraums eine Ladungsdichte  $\sigma(\Theta) = P_n = P_x \cos \theta$ , analog wie eine Ladungsdichte und ein elektrisches Feld mit  $E = \sigma/\varepsilon_0$  zusammenhängt. Nach dem Coulombgesetz (Gleichung (2.1.5)) ist der Beitrag von  $\sigma da$  gegeben durch

$$dE_{i,r} = \frac{\sigma da}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{P_x \cos \theta}{4\pi\varepsilon_0 R^2} da \quad (2.9.21)$$

gegeben. Die  $x$ -Komponente ist dann

$$dE_{i,x} = \frac{P_x \cos^2 \theta}{4\pi\varepsilon_0 R^2} da, \quad (2.9.22)$$

da  $dE_{i,r}$  auf die  $x$ -Achse projiziert werden muss. Wir integrieren über die ganze Kugel und beachten, dass  $da = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$  ist. Die Integration über  $\varphi$  (Faktor  $2\pi$ ) und diejenige über  $r$  (Faktor 1, da die LADUNG an der Oberfläche konzentriert ist) sind sofort ausführbar, so dass wir mit  $\int \cos^2(\theta) \sin(\theta) d\theta = -\frac{1}{3} \cos^3(\theta)$

$$E_{i,x} = \frac{P_x}{4\pi\varepsilon_0} 2\pi \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = \frac{1}{3\varepsilon_0} P_x \quad (2.9.23)$$

erhalten. Da die  $x$ -zufällig gewählt wurde, gilt die LORENTZ-BEZIEHUNG auch

allgemein

$$E_i = \frac{1}{3\varepsilon_0} P \quad (2.9.24)$$

Mit

$$\mathbf{P} = (\varepsilon - 1) \varepsilon_0 \mathbf{E} = \chi_e \varepsilon_0 \mathbf{E} \quad (2.9.25)$$

wird aus der Kombination von Gleichung (2.9.20) und Gleichung (2.9.24) die CLAUSIUS-MOSOTTI-BEZIEHUNG

$$\frac{\chi_e}{\chi_e + 3} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{n\alpha}{3\varepsilon_0} \quad (2.9.26)$$

die die Polarisierbarkeit  $\alpha$  mit der relativen Permittivität  $\varepsilon$  verknüpft.  $n$  ist die Dichte der induzierten Dipole.

Die Rechnung verläuft folgendermassen

$$\begin{aligned} P &= (\varepsilon - 1) \varepsilon_0 E & E &= \frac{P}{(\varepsilon - 1) \varepsilon_0} \\ P &= n\alpha E_{\text{lokal}} & E_{\text{lokal}} &= E + E_i \\ E_{\text{lokal}} &= \frac{P}{n\alpha} & & \\ \frac{P}{n\alpha} &= \frac{P}{(\varepsilon - 1) \varepsilon_0} + \frac{P}{3\varepsilon_0} & & \\ \frac{1}{n\alpha} &= \frac{1}{(\varepsilon - 1) \varepsilon_0} + \frac{1}{3\varepsilon_0} & & = \frac{1}{\varepsilon_0} \left( \frac{1}{(\varepsilon - 1)} + \frac{1}{3} \right) \\ &= \frac{1}{\varepsilon_0} \left( \frac{3 + \varepsilon - 1}{3(\varepsilon - 1)} \right) & & = \frac{1}{\varepsilon_0} \left( \frac{2 + \varepsilon}{3(\varepsilon - 1)} \right) \\ \frac{n\alpha}{3\varepsilon_0} &= \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} & & \varepsilon = \frac{3\varepsilon_0 + 2n\alpha}{3\varepsilon_0 - n\alpha} \end{aligned}$$

#### 2.9.1.4. Kondensator gefüllt mit Dielektrikum

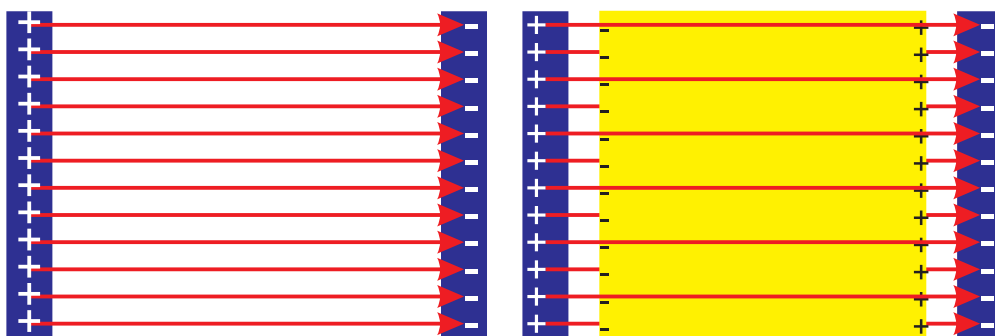


Abb. 2.34.: Links: Kondensator ohne und rechts: mit Dielektrikum

Wir betrachten einen Kondensator, dessen Platten die konstante LADUNG  $Q$  tragen. Das Feld im Inneren des Kondensators sei um den Faktor  $\varepsilon$  geringer als das Feld  $E_0$  ohne Dielektrikum

$$E = \frac{E_0}{\varepsilon} \quad (2.9.27)$$

Bei einem Plattenkondensator mit dem Abstand  $d$  ist

$$U = Ed = \frac{E_0 d}{\varepsilon} = \frac{U_0}{\varepsilon} \quad (2.9.28)$$

Die Kapazität ist

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{\frac{U_0}{\varepsilon}} = \varepsilon \frac{Q}{U_0} = \varepsilon C_0 \quad (2.9.29)$$

Also ist beim Plattenkondensator

$$C = \varepsilon \varepsilon_0 \frac{A}{d} \quad (2.9.30)$$

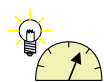
Die dielektrische Verschiebung ist im obigen Falle konstant

$$D = \frac{Q}{A} \quad (2.9.31)$$

Hält man die SPANNUNG fest, wenn ein Dielektrikum in den Kondensator eingebracht wird ist,

$$Q = \varepsilon Q_0 \quad (2.9.32)$$

## 2.9.2. Elektrische Phänomene



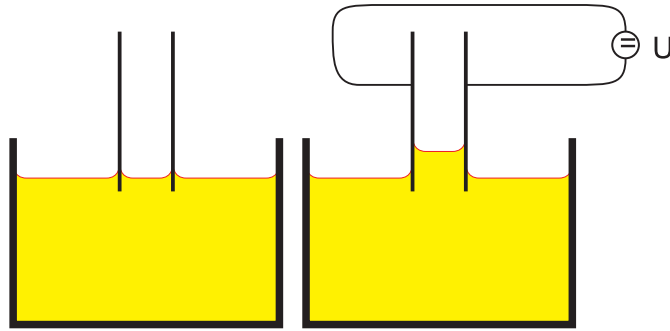
### Versuch 18: Versuch zur Vorlesung:

Steighöhe im Kondensator (Versuchskarte ES-12)

Die Energiedichte im Kondensator ist

$$w_{el} = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \quad (2.9.33)$$

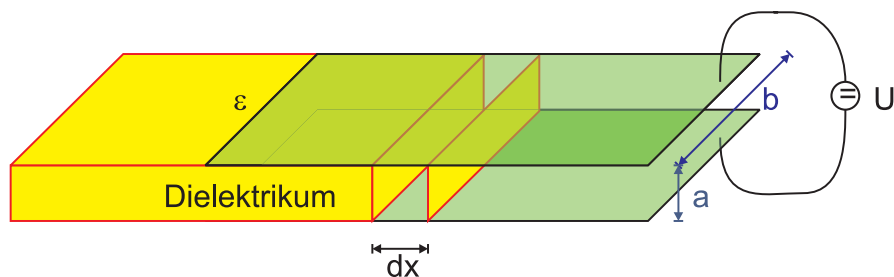




**Abb. 2.35.:** Links eine dielektrische Flüssigkeit im Kondensator ohne angelegtes Feld. Rechts mit angelegtem Feld.

Wenn wir das obige Experiment durchführen, steigt die dielektrische Flüssigkeit. Dabei erhöht sich die im elektrischen Feld gespeicherte Energie und auch die potentielle Energie.

Wie geht das?



**Abb. 2.36.:** Skizze der Änderungen beim Anlegen einer SPANNUNG

Zur Berechnung müssen wir auch die Batterie oder Spannungsquelle mit betrachten [Kän78].

### 1. Mechanische Arbeit:

$$dW_{\text{mech}} = F dx$$

2. **Elektrostatische Energie** im Volumen  $a b dx$ : Die SPANNUNG  $U$  wird konstant gehalten, und damit auch

$$E = \frac{U}{a}$$

Dabei nehmen wir ein homogenes Feld an

$$\begin{aligned}
 dW_{el} &= \left( \frac{1}{2} \varepsilon \varepsilon_0 E^2 - \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \right) ab dx \\
 &= \frac{1}{2} (\varepsilon - 1) \varepsilon_0 \frac{U^2}{a^2} ab dx \\
 &= \frac{1}{2} (\varepsilon - 1) \varepsilon_0 U^2 \frac{b}{a} dx
 \end{aligned} \tag{2.9.34}$$

3. Die **Batterie** liefert elektrische Energie, da die Ladungsmenge sich ändert. Die Kapazität ändert sich um

$$\begin{aligned}
 dC &= \varepsilon \varepsilon_0 \frac{b dx}{a} - \varepsilon_0 \frac{b dx}{a} \\
 &= (\varepsilon - 1) \varepsilon_0 \frac{b dx}{a}
 \end{aligned} \tag{2.9.35}$$

Die SPANNUNG  $U_0$  wird aufrecht erhalten und die LADUNG  $dQ$  transportiert ( $E_{pot} = qU$ )

Also

$$\begin{aligned}
 dW_{Batt} &= U dQ \\
 &= U \cdot U dC \\
 &= (\varepsilon - 1) \varepsilon_0 U^2 \frac{b dx}{a}
 \end{aligned} \tag{2.9.36}$$

4. Die **Energiebilanz** ist

$$dW_{mech} + dW_{el} = dW_{Batt} \tag{2.9.37}$$

$$F dx + \frac{1}{2} (\varepsilon - 1) \varepsilon_0 U^2 \frac{b}{a} dx = (\varepsilon - 1) \varepsilon_0 U^2 \frac{b}{a} dx \tag{2.9.38}$$

und somit

$$F = \frac{1}{2} (\varepsilon - 1) \varepsilon_0 \frac{b}{a} U^2 \tag{2.9.39}$$

### 2.9.2.1. Dielektrische Flüssigkeit im Kondensator bei konstanter Ladung

Wenn der Kondensator von allen Spannungsquellen getrennt ist, bleibt die Ladung auf seinen Platten,  $Q$ , konstant. Die dielektrische Verschiebung  $\mathbf{D}$  und nicht das elektrische Feld  $\mathbf{E}$  bleiben konstant.

1. **Mechanische Arbeit:**

$$dW_{mech} = F dx$$

2. **Elektrostatische Energie** im Volumen  $a b dx$ : Die Ladung  $Q$  wird konstant gehalten, und damit auch

$$D = \frac{Q}{A}$$

$A$  ist die effektive Plattenfläche des Kondensators. Dabei nehmen wir ein homogenes Feld an

$$\begin{aligned} dW_{el} &= \left( \frac{1}{2\varepsilon\varepsilon_0} D^2 - \frac{1}{2\varepsilon_0} D^2 \right) abdx \\ &= \frac{1-\varepsilon}{2\varepsilon\varepsilon_0} \frac{Q^2}{A^2} abdx \end{aligned} \quad (2.9.40)$$

$dW_{el}$  ist negativ, da  $1-\varepsilon < 0$  ist.

3. Die **Energiebilanz** ist

$$dW_{mech} + dW_{el} = 0 \quad (2.9.41)$$

$$Fdx + \frac{1-\varepsilon}{2\varepsilon\varepsilon_0} \frac{Q^2}{A^2} abdx = 0 \quad (2.9.42)$$

und somit

$$F = \frac{1}{2} \frac{(\varepsilon-1)}{\varepsilon\varepsilon_0} \frac{Q^2}{A^2} ab \quad (2.9.43)$$

Der alternative Weg zur Lösung geht so: Der Kondensator habe eine gesamte Fläche von  $A = Lb$ . Auf der Länge  $x$  ist das Dielektrikum, Dann ist die Kapazität (Parallelschaltung)

$$C = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{xb}{a} + \varepsilon_0 \frac{(L-x)b}{a} \quad (2.9.44)$$

Wenn die Ladung  $Q = \text{const}$  auf den Platten ist, ist die resultierende Spannung

$$U = \frac{Q}{C} = \frac{aQ}{b\varepsilon_0(L+x(\varepsilon-1))} \quad (2.9.45)$$

Die Platten sind Äquipotentialflächen, also können wir das elektrische Feld berechnen

$$E = \frac{U}{a} = \frac{Q}{b\varepsilon_0(L+x(\varepsilon-1))} \quad (2.9.46)$$

Dieses ist gleich im leeren wie im gefüllten Bereich. Damit können wir die Energiedichten mit und ohne Dielektrikum bestimmen:

$$w_{el,D} = \frac{1}{2} \varepsilon \varepsilon_0 E^2 = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 Q^2}{b^2 \varepsilon_0^2 (L+x(\varepsilon-1))^2} = \frac{\varepsilon Q^2}{b^2 \varepsilon_0 (L+x(\varepsilon-1))^2} \quad (2.9.47a)$$

$$w_{el,o} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 = \frac{\varepsilon_0 Q^2}{b^2 \varepsilon_0^2 (L+x(\varepsilon-1))^2} = \frac{Q^2}{b^2 \varepsilon_0 (L+x(\varepsilon-1))^2} \quad (2.9.47b)$$

Die gesamte Energie im Kondensator ist die Summe aus den potentiellen Energien im leeren und gefüllten Teil.

$$E_{tot} = w_{el,D} x a b + w_{el,o} (L - x) a b = \frac{a Q^2}{2b \varepsilon_0 (L + x(\varepsilon - 1))} \quad (2.9.48)$$

Schliesslich kann die Kraft am Ort  $\ell$  berechnet werden

$$F = - \left. \frac{d}{dx} E_{pot} \right|_{x=\ell} = \frac{(\varepsilon - 1) Q^2 a}{2 \varepsilon_0 b (L - \ell(\varepsilon - 1))^2} \quad (2.9.49)$$

## 2.10. Zusammenfassung: die Grundgleichungen der Elektrostatik

**Ladung** Symbol  $q$  oder  $Q$ , Einheit  $[q] = \text{C} = \text{A s} = \text{Coulomb}$

**Permittivität** Gleichung (2.1.4)

$$\varepsilon_0 = 8.8544 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2}$$

**Coulomb-Gesetz** Gleichung (2.1.5)

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 \cdot q_2}{r_{12}^2} \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}}$$

**Elektrisches Feld** Gleichung (2.2.2)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r_{12}^2} \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}}$$

Symbol  $\mathbf{E}$ , Einheit  $[\mathbf{E}] = \text{N C}^{-1} = \text{V m}^{-1}$

**Elektrische Feldlinien** • Elektrische Feldlinien beginnen bei der positiven LADUNG und enden bei der negativen LADUNG.

- Die Anzahl der von einer LADUNG ausgehenden oder auf einer LADUNG endenden Feldlinien ist proportional zur Ladungsmenge.
- Ihre Dichte ist proportional zum elektrischen Feld.

**Elektrisches Feld einer kontinuierlichen Ladungsverteilung** Gleichung (2.2.5)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint \frac{\rho_{el}(\mathbf{r})}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|^2} \frac{\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|} dV$$

**Ladung in einem Raumgebiet** Gleichung (2.3.1)

$$Q = \int_{V(S)} \rho_{el}(\mathbf{r}) dV$$

**dielektrische Verschiebung** Gleichung (2.3.5)

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \varepsilon \varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r})$$

**elektrische Flussdichte** Gleichung (2.3.5)

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \varepsilon \varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r})$$

**elektrischer Fluss** Gleichung (2.3.10)  $\Phi_e = \Phi_D = \int_A \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a}$

**Fluss des elektrischen Feldes** Gleichung (2.3.4)  $\Phi_E = \int_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a}$

**Gauss'sches Gesetz für eine Punktladung** Gleichung (2.3.3)

$$\begin{aligned} \int_{\text{Kugeloberfläche}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} da &= \int_{\text{Kugeloberfläche}} \left( \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 |\mathbf{r}|^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \right) \cdot \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} r^2 \sin \Theta d\Theta d\varphi \\ &= \int_{\text{Kugeloberfläche}} \frac{Q r^2}{4\pi\varepsilon_0 |\mathbf{r}|^2} \cdot \left( \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \cdot \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \right) \sin \Theta d\Theta d\varphi \\ &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\text{Kugeloberfläche}} \sin \Theta d\Theta d\varphi \\ &= \frac{Q}{\varepsilon_0} \end{aligned}$$

**Gauss'sches Gesetz für eine Ladungsverteilung** Gleichung (2.3.7)

$$\begin{aligned} \iint_A \mathbf{D}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{a}(\mathbf{r}) &= \iint_A \mathbf{D}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) da(\mathbf{r}) \\ &= Q_{\text{in } A} \\ &= \iiint_{V(A)} \rho_{el}(\mathbf{r}) dV \end{aligned}$$

**Differentialform des Gaussschen Gesetzes** Gleichung (2.3.9)

$$\text{div } \mathbf{D}(\mathbf{r}) = \rho_{el}(\mathbf{r})$$

**Leiter** Leiter haben in ihrem Inneren keine statischen elektrischen Felder.

**Potentielle Energie einer Probeladung** Gleichung (2.5.4)

$$E_{pot}(\mathbf{r}_2) = E_{pot}(\mathbf{r}_1) - \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qQ}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot d\mathbf{r}$$

**Elektrostatisches Potential und Spannung** Gleichung (2.5.11)

$$\varphi(\mathbf{r}) = U(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r} = \frac{E_{pot}(\mathbf{r})}{q}$$

**Potentielle Energie und Potential** Gleichung (2.5.14)

$$\begin{array}{ccc}
 & \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\quad}{q} & \\
 & \longrightarrow & \\
 \mathbf{F}(\mathbf{r}) & & \mathbf{E}(\mathbf{r}) \\
 & \longleftarrow & \\
 & \lim_{q \rightarrow 0} \cdot q & \\
 \\
 - \int \mathbf{F} d\mathbf{r} & \uparrow & - \int \mathbf{E} d\mathbf{r} \\
 \downarrow & -\mathbf{grad} E_{pot} & \downarrow -\mathbf{grad} U \\
 \\
 E_{pot}(\mathbf{r}) & \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\quad}{q} & U(\mathbf{r}) = U(r) \\
 & \longrightarrow & \\
 & \longleftarrow & \\
 & \lim_{q \rightarrow 0} \cdot q & 
 \end{array}$$

**Potential einer kontinuierlichen Ladungsverteilung** Gleichung (2.5.17)

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho_{el}(\mathbf{r})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq(\mathbf{r})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}$$

**Poisson-Gleichung** Gleichung (2.6.4)

$$\Delta U(\mathbf{r}) = -\frac{\rho_{el}(\mathbf{r})}{\epsilon_0}$$

**Kapazität** Gleichung (2.7.4)

$$U_j - U_i = \frac{Q}{C_{ji}} = U_{ji} = \varphi_{ij}$$

**Parallelschaltung von Kondensatoren** Gleichung (2.7.14)

$$C = \sum_{i=1}^n C_i$$

**Reihenschaltung von Kondensatoren** Gleichung (2.7.17)

$$\frac{1}{C_{ges}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}$$

**Energiedichte des elektrostatischen Feldes** Gleichung (2.8.7)

$$w_{el} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} = \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{2}$$

**Maxwell-Spannung** Gleichung (2.8.10) und Gleichung (2.8.12)

$$\sigma_{Maxwell} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}}{\Delta V}$$

$$\sigma_{Maxwell} = \frac{F}{V} = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 = \frac{\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}}{2}$$

**induziertes Dipolmoment** Gleichung (2.9.8)

$$\mathbf{p}_{ind} = \frac{(Ze)^2}{k} \cdot \mathbf{E} = \alpha \mathbf{E}$$

**Lorentz-Beziehung** Gleichung (2.9.24)

$$E_i = \frac{1}{3\varepsilon_0} P$$

**dielektrische Suszeptibilität** Gleichung (2.9.15)

$$\mathbf{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \mathbf{E} = (1 + \chi_e) \varepsilon_0 \mathbf{E}$$

**Stetigkeit der Feldkomponenten** An der Grenzfläche zweier Dielektrika gilt

- die Komponente der dielektrischen Verschiebung senkrecht zur Grenzfläche und
- die Komponente des elektrischen Feldes parallel zur Grenzfläche

sind stetig.

**Stetigkeitsbedingung für das Potential**

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_2 \\ \varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} &= \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \end{aligned}$$

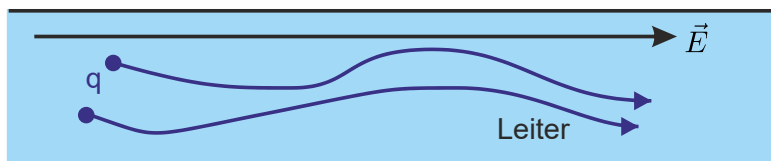




### 3. Elektrische Ströme

Ströme und Magnetfelder beschreiben

- die Funktionsweise von Motoren,
- die Funktionsweise von Fernsehröhren,
- die Funktionsweise von Beschleunigern,
- die Arbeitsweise von Magnetbändern und Festplatten und
- die Funktionsweise von Lautsprechern



**Abb. 3.1.:** Kräfte auf LADUNGEN in einem Leiter

Bei Anlegen eines elektrischen Feldes werden LADUNGEN beschleunigt. Die Wechselwirkung der LADUNGEN mit dem Medium ergibt eine Begrenzung der DRIFTGESCHWINDIGKEIT. Medien für den LADUNGSTRANSPORT können sein:

- Metalle
- Ionische Materialien
- Plasmen

Die LADUNGSTRÄGER sind

- Elektronen
- Ionen
- Positronen

- Protonen

also alle geladenen Teilchen oder Moleküle.

Der STROM wird als

$$I = \left. \frac{\Delta Q}{\Delta t} \right|_{\text{Fläche}} \quad (3.0.1)$$

die in einer bestimmten Zeit durch eine Fläche  $A$  fließende Ladungsmenge definiert.<sup>1</sup>

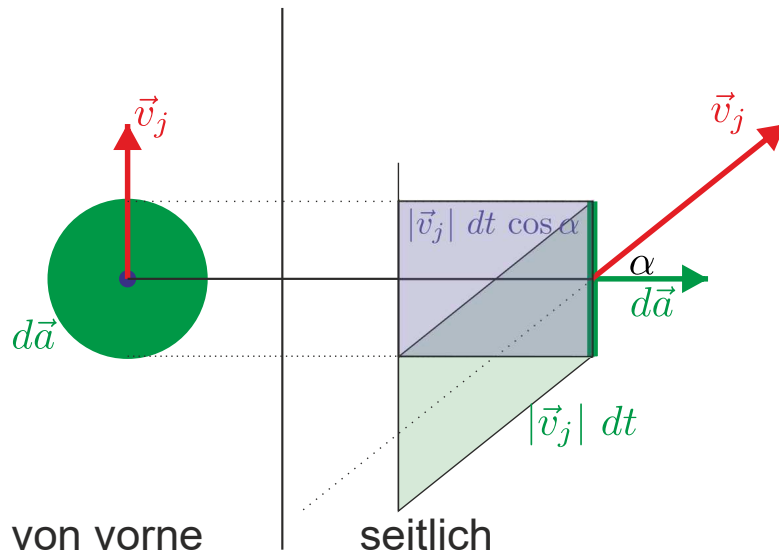
Der ELEKTRISCHE STROM  $I$  beschreibt den Fluss von Ladung. Deshalb fließt der STROM von „+“ nach „-“. Der ELEKTRISCHE STROM  $I$  darf nicht mit dem Massenstrom  $\dot{m}$  verwechselt werden. Bei positiver Ladung ist die Geschwindigkeit des die Ladung tragenden Masseteilchens **parallel** zur Stromrichtung. Bei negativer Ladung ist die Geschwindigkeit des die Ladung tragenden Masseteilchens **antiparallel** zur Stromrichtung.

Man beobachtet, dass  $I$  proportional zu  $U = E\ell$ , der angelegten SPANNUNG über der Strecke  $\ell$  ist.

### 3.1. Die Kontinuitätsgleichung und der Begriff des Stromes

(Siehe Leisi, Klassische Physik II [Lei98, pp. 64])

<sup>1</sup>Der an Gymnasien propagierte physikalische Strom von „-“ nach „+“ ist ein Massenstrom, aber nicht ein Strom von Ladung. Wir beschäftigen uns hier mit Ladungsströmen und nicht mit Massenströmen. Die gymnasiale Unterscheidung von physikalischer und technischer Stromrichtung ist unsinnig. Die physikalische Stromrichtung ist das gleiche wie die technische Stromrichtung, also so wie hier definiert.



**Abb. 3.2.:** Berechnung des Stromes in einem Medium

Wir betrachten LADUNGSTRÄGER mit der einheitlichen LADUNG  $q$ . Die Ladungsträgerdichte  $n_j$  habe die Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_j$ .

Der STROM  $\delta I_j$  durch das Flächenelement  $d\mathbf{a}$  ist

$$\delta I_j = \frac{\delta Q_j}{dt} \quad (3.1.1)$$

Die LADUNGSMENGE ist

$$\delta Q_j = q n_j |\mathbf{v}_j| \cdot dt \cdot \cos \alpha \cdot |d\mathbf{a}| \quad (3.1.2)$$

und damit

$$\delta I_j = q n_j |\mathbf{v}_j| \cos \alpha |d\mathbf{a}| = q n_j \mathbf{v}_j \cdot d\mathbf{a} \quad (3.1.3)$$

Der gesamte STROM der LADUNGSTRÄGER  $q$  ist dann

$$dI(d\mathbf{a}) = nq \frac{1}{n} \left( \sum_j n_j \mathbf{v}_j \right) \cdot d\mathbf{a} \quad (3.1.4)$$

wobei  $n = \sum n_j$  ist.

Die mittlere Geschwindigkeit der LADUNGSTRÄGER ist

$$\langle \mathbf{v} \rangle = \frac{1}{n} \sum_j n_j \cdot \mathbf{v}_j \quad (3.1.5)$$

Wir definieren das VEKTORFELD der STROMDICHTEN

$$\mathbf{i} = nq \langle \mathbf{v} \rangle \quad (3.1.6)$$

$\mathbf{i}$  ist abhängig vom Ort, da auch  $n$  und  $\langle \mathbf{v} \rangle$  ortsabhängig sind.

Der STROM bezüglich  $d\mathbf{a}$  ist dann

$$dI(d\mathbf{a}) = \mathbf{i} \cdot d\mathbf{a} \quad (3.1.7)$$

und, integriert,

$$I(A) = \int_A \mathbf{i} \cdot d\mathbf{a} \quad (3.1.8)$$

Diese Gleichung besagt, dass der STROM gleich dem FLUSS des STROMDICHTEFELDES durch eine Fläche  $A$  ist.

Wird der STROM durch mehrere Arten von LADUNGSTRÄGERN gebildet, schreibt man

$$\mathbf{i} = \sum_k n_k q_k \langle \mathbf{v}_k \rangle \quad (3.1.9)$$

### Beispiel:

Driftgeschwindigkeit in einem Kupferdraht mit 10 mm Durchmesser und  $I = 100$  A

Annahme: 1 Elektron pro Cu - Atom

Anzahl Cu - Atome pro Volumen

$$\begin{aligned} n_a &= \frac{\rho N_A}{M_{Mol}} = \frac{8930 \text{ kg m}^{-3} \cdot 6.02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}}{0.0635 \text{ kg mol}^{-1}} \\ &= 8.47 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3} = n_e \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

Und mit  $q_k = e$

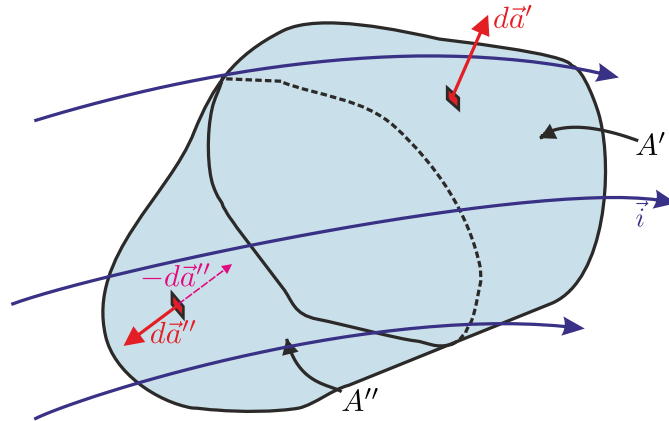
$$\begin{aligned} \langle v \rangle &= \frac{I}{n_e e A} = \\ &= \frac{100 \text{ A}}{8.47 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3} \cdot \frac{\pi}{4} (0.01 \text{ m})^2 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}} \\ &\approx 1 \text{ } \mu\text{m s}^{-1} \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

Mit  $v(t) = v_0 \cos(2\pi\nu t)$  und  $x(t) = \int v(t) dt$  hat man

$$x(t) = \frac{v_0}{2\pi\nu} \sin(2\pi\nu t) + \text{const}$$

Die maximale Strecke erhält man wenn der Sinus von  $-1$  nach  $+1$  geht.

Folgerung: bei  $\nu = 50$  Hz Wechselstrom zittern die Elektronen einige  $\frac{1 \text{ } \mu\text{m s}^{-1}}{2\pi \cdot 50 \text{ Hz}} \cdot 2 \approx 6.4 \text{ nm}$  weit.



**Abb. 3.3.:** Berechnung des Flusses eines Stromdichtefeldes durch ein geschlossenes Gebiet

Wir betrachten eine geschlossene Fläche  $A$ , die wir in zwei Teilflächen  $A'$  und  $A''$  aufteilen, so dass auf der Fläche  $A'$  die Feldlinie aus der Fläche austreten und auf der Fläche  $A''$  sie eindringen.

Die LADUNGSERHALTUNG fordert:

$$I_{aus} - I_{ein} = -\frac{d}{dt}Q_{innen} \quad (3.1.12)$$

Wir schreiben die Gleichung mit der STROMDICHTe um

$$\iint_{A'} \mathbf{i} \cdot d\mathbf{a}' - \iint_{A''} \mathbf{i} \cdot (-d\mathbf{a}'') = -\frac{d}{dt} \iiint_{V(A)} \rho_{el} dV \quad (3.1.13)$$

oder

$$\iint_A \mathbf{i} \cdot d\mathbf{a} = -\frac{d}{dt} \iiint_V \rho_{el} dV \quad (3.1.14)$$

Dies ist die Integralform der KONTINUITÄTSGLEICHUNG.

Mit dem Gausschen Satz bekommen wir

$$\iint_A \mathbf{i} \cdot d\mathbf{a} = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{i} dV = -\iiint_V \frac{d}{dt} \rho_{el} dV \quad (3.1.15)$$

Die Differentialform der Kontinuitätsgleichung lautet demnach:

$$\operatorname{div} \mathbf{i}(\mathbf{x}, t) = -\frac{d}{dt} \rho_{el}(\mathbf{x}, t) \quad (3.1.16)$$

Bei stationären Strömen hängen  $\mathbf{i}$  und  $\rho_{el}$  nicht von der Zeit ab, so dass

$$\operatorname{div} \mathbf{i} = 0 \quad (3.1.17)$$

ist.

$$\iint_A \mathbf{i} \cdot d\mathbf{a} = 0 \quad (3.1.18)$$

Beispiel:

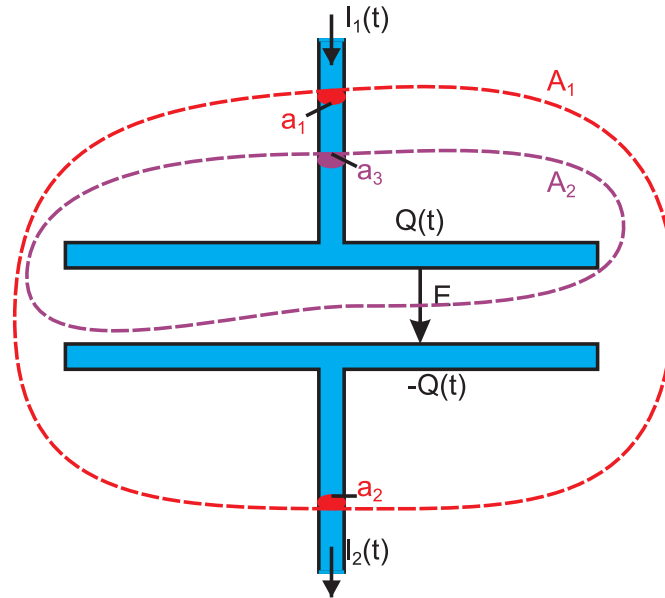


Abb. 3.4.: Stromfluss in einem Kondensator

Wir betrachten eine quasistationäre Änderung am Kondensator

$$\iint_{A_1} \mathbf{i} \cdot d\mathbf{a} = \iint_{a_1} \mathbf{i} \cdot d\mathbf{a} + \iint_{a_2} \mathbf{i} \cdot d\mathbf{a} = 0 \quad (3.1.19)$$

Mit  $I_1 = -\iint_{a_1} \mathbf{i} \cdot d\mathbf{a}$  und  $I_2 = \iint_{a_2} \mathbf{i} \cdot d\mathbf{a}$  folgt

$$I_1 = I_2 \quad (3.1.20)$$

d.h. es scheint, als ob der STROM durch den Kondensator hindurch fließen würde. Wenn wir die Kontinuitätsgleichung auf  $A_2$  anwenden, bekommen wir

$$\iint_{a_3} \mathbf{i} \cdot d\mathbf{a} = -I_1(t) = -\frac{dQ(t)}{dt} \quad (3.1.21)$$

oder

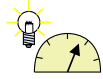
$$I(t) = \frac{dQ(t)}{dt} \quad (3.1.22)$$

Die Einheit der Stromstärke ist Ampère  $[I] = \text{A}$

$$1 \text{ A} = 1 \text{ C s}^{-1} \quad (3.1.23)$$

## 3.2. Das Ohmsche Gesetz

**Literatur:** (Siehe Leisi, Klassische Physik II [Lei98, pp. 71]) (Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 751])



### Versuch 19: Versuch zur Vorlesung:

Strom-Spannungs-Kennlinie (Versuchskarte EM-83, Video (VPN oder intern))

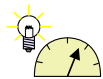
Allgemein gilt für einen Leiter, dass

$$\mathbf{i}(\mathbf{E}) = f(\mathbf{E}) \quad (3.2.1)$$

eine beliebige Funktion des angelegten Feldes  $\mathbf{E}$  ist. Im linearen Fall

$$\mathbf{i}(\mathbf{E}) = \sigma \mathbf{E} \quad (3.2.2)$$

spricht man von einem OHMSCHEN LEITER.



### Versuch 20: Versuch zur Vorlesung:

Ohmscher Leiter (Versuchskarte EM-117, Video (VPN oder intern))

$\sigma$  ist die LEITFÄHIGKEIT. Ihre Einheit ist

$$[\sigma] = \text{A m}^{-2} \cdot \text{m V}^{-1} = \text{A V}^{-1} \text{m}^{-1} = \Omega^{-1} \text{m}^{-1}$$

Das Gesetz nach Gleichung (3.2.2) heisst das lokale Ohmsche Gesetz. Für homogene Medien ist  $\sigma$  eine Zahl. Für inhomogene Medien wie GRAPHIT ist  $\sigma$  ein TENSOR. Indem wir die differentielle Form des Ohmschen Gesetzes integrieren, erhalten wir

$$\int_A \mathbf{i} d\mathbf{a} = I = \int_A \sigma \mathbf{E} d\mathbf{a} = \int_A \sigma \frac{U}{d} d\mathbf{a} = \sigma \frac{A}{d} U \quad (3.2.3)$$

Dabei haben wir angenommen, dass  $\mathbf{i}$  und  $\sigma$  konstant über  $A$  sind. Das integrale Ohmsche Gesetz kann auch als

$$I = G \cdot U \quad (3.2.4)$$

geschrieben werden.  $G$  ist der LEITWERT. Die Einheit ist

$$[G] = \text{Siemens} = \text{S} = \text{A V}^{-1} \text{m}^{-1} \cdot \text{m}^2 \text{m}^{-1} = \text{A V}^{-1}$$

$G$  und  $\sigma$  stehen in der Beziehung

$$G = \sigma \frac{A}{\ell}, \quad (3.2.5)$$

wobei  $\ell$  die Länge des zylinderförmigen Leiters und  $A$  dessen Querschnitt ist. Bekannt ist die Form

$$U = \frac{1}{G} \cdot I = R \cdot I \quad (3.2.6)$$

$R = \frac{1}{G}$  ist der WIDERSTAND. Seine Einheit ist das Ohm

$$[R] = \Omega = \text{S}^{-1} = \text{V A}^{-1} = \text{W A}^{-2}$$

Die zu  $R$  gehörende mikroskopische Grösse ist der SPEZIFISCHE WIDERSTAND

$$\rho = \frac{1}{\sigma} \quad (3.2.7)$$

$R$  und  $\rho$  hängen über

$$R = \rho \frac{\ell}{A} \quad (3.2.8)$$

zusammen. Dabei ist  $\ell$  die Länge des zylinderförmigen Leiters und  $A$  dessen Querschnitt.

Die Einheit des spezifischen Widerstandes ist

$$[\rho] = \text{V m A}^{-1} = \Omega \text{ m} = \text{m S}^{-1}$$

sowie die der Leitfähigkeit

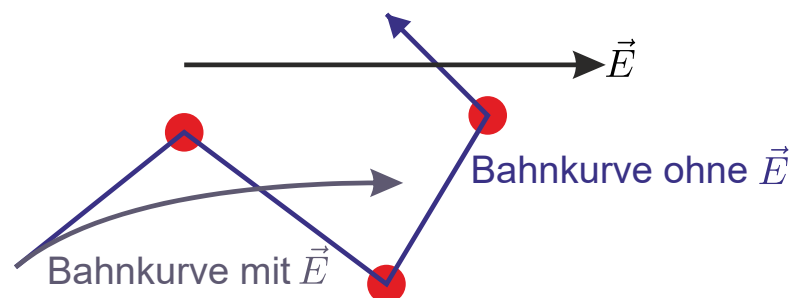
$$[\sigma] = \text{A V}^{-1} \text{ m}^{-1} = \text{S m}^{-1} = \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$$



### Versuch 21: Versuch zur Vorlesung:

Ohmsches Gesetz ([Versuchskarte Applet](#))

Um einen Zusammenhang zwischen einem mikroskopischen Bild und makroskopischen Grössen zu bekommen betrachten wir die Bewegung von Ionen ( $\langle v \rangle \approx 100 \text{ m s}^{-1}$ ) in einer Umgebung von nicht ionisierten Molekülen



**Abb. 3.5.:** Bahnkurven ohne und mit elektrischem Feld.



Die Masse eines Ions sei  $M$ , ihre LADUNG  $q$  und die Gesamtzahl im betrachteten Volumenelement  $N$ .

Die Newtonsche Bewegungsgleichung lautet

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad (3.2.9)$$

oder

$$\Delta\mathbf{p} = q\mathbf{E}\Delta t \quad (3.2.10)$$

wobei  $\Delta t$  die freie Flugzeit ist.

Der mittlere Impuls eines Ions ist

$$M \langle \mathbf{v} \rangle_t = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N [M \mathbf{v}_j^{(k)} + q\mathbf{E}\Delta t_j] \quad (3.2.11)$$

$\langle \mathbf{v} \rangle$  ist die mittlere DRIFTGESCHWINDIGKEIT,  $\mathbf{v}_j^{(k)}$  die Geschwindigkeit nach dem letzten Stoss.

Sind die Geschwindigkeiten  $\mathbf{v}_j^{(k)}$  isotrop verteilt, mittelt sich der erste Summand zu null. Unter dieser Annahme ist

$$M \cdot \langle \mathbf{v} \rangle_t = q\mathbf{E} \left( \frac{1}{N} \sum \Delta t_j \right) = q\mathbf{E} \cdot \langle \Delta t \rangle_t \quad (3.2.12)$$

wobei  $\langle \Delta t \rangle_t = \tau$  die mittlere Zeit zwischen den Zusammenstößen ist. Mit  $\mathbf{i} = nq \langle \mathbf{v} \rangle_t$  bekommen wir

$$\langle \mathbf{v} \rangle_t = \frac{q \cdot \langle \Delta t \rangle_t}{M} \mathbf{E} = \frac{q\tau}{M} \mathbf{E} = \mu \mathbf{E}. \quad (3.2.13)$$

Hier ist  $\mu = \frac{q \cdot \langle t \rangle}{M} = \frac{q\tau}{M}$  die BEWEGLICHKEIT der Ladungsträger mit der Ladung  $q$  und der Masse  $M$ . Die Einheit der Beweglichkeit ist

$$[\mu] = \text{m}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1} = \text{C s kg}^{-1}$$

Weiter ist

$$\mathbf{i} = n \frac{q^2 \cdot \langle \Delta t \rangle_t}{M} \mathbf{E} = n \frac{q^2 \tau}{M} \mathbf{E} = n q \mu \mathbf{E} \quad (3.2.14)$$

Dabei ist  $n$  die Dichte der LADUNGSTRÄGER.

Somit ist bei einer Mischung verschiedener LADUNGSTRÄGER

$$\sigma = \sum_k n_k \frac{q_k^2 \tau_k}{M_k} = \sum_k n_k q_k \mu_k \quad (3.2.15)$$

Von Gleichung (3.2.13) an wurde  $\tau = \langle t \rangle$  gesetzt.

Das Ohmsche Gesetz gilt, wenn  $\tau_k$ ,  $n_k$  und  $\mu_k$  unabhängig vom elektrischen Feld  $\mathbf{E}$  sind.

### Beispiel: Metall

Wir nehmen an, dass  $m_e \ll m_{\text{Kern}}$  ist. Dann sind die Geschwindigkeiten nach dem Stossen isotrop verteilt. Die mittlere Geschwindigkeit der Elektronen ist  $\langle v_e \rangle = 10^5 \text{ m s}^{-1}$  (kinetische Gastheorie [Mar15, Kap. 2.2.]). Mit

$$\frac{1}{\rho_{\text{exp}}} = \sigma = n_e \frac{e^2 \tau}{m_e} \quad (3.2.16)$$

bekommen wir

$$\tau = \frac{m_e}{\rho_{\text{exp}} n_e e^2} = 3.3 \cdot 10^{-14} \text{ s} \quad (3.2.17)$$

(mit  $\rho_{\text{exp}} = 4.3 \cdot 10^{-8} \Omega \text{ m}$  und  $n_e = 2.5 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$  für Na-Metall)  
Die mittlere freie Weglänge ist dann

$$\lambda = \langle v_e \rangle \tau = 3.3 \text{ nm} \quad (3.2.18)$$

im Widerspruch zum Ionenabstand von 0.1 nm  $\Rightarrow$  Lösung: **Quantenmechanik**



### Versuch 22: Versuch zur Vorlesung:

Leitfähigkeit ([Versuchskarte EM-172](#), [Video](#))



### Versuch 23: Versuch zur Vorlesung:

Temperaturabhängigkeit der Leitfähigkeit ([Versuchskarte TH-122](#), [Video](#))

Bei einem homogenen Ohmschen Leiter mit einer stationären Stromverteilung ist  $\rho_{el} = 0$  im Inneren. Dies folgt aus

1. **Ohmsches Gesetz**  $\mathbf{i}(x, y, z) = \sigma \mathbf{E}(x, y, z)$
2. **Kontinuitätsgleichung**  $\text{div } \mathbf{i} = 0$ , also  $\text{div } (\sigma \mathbf{E}) = 0$   
und damit  $\text{div } \mathbf{E} = 0$
3. das **Gauss'sche Gesetz** sagt  $\text{div } \mathbf{E} = \frac{\rho_{el}}{\epsilon_0}$
4. damit folgt die Behauptung, dass  $\rho_{el} = 0$ .

Aus der Eigenschaft

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi = -\text{grad } U \quad (3.2.19)$$

erhalten wir im Inneren eines Leiters

$$\text{div } \mathbf{E} = -\text{div } \text{grad } \varphi = -\Delta \varphi = 0 \quad (3.2.20)$$

Dies bedeutet, dass  $\varphi$  im Inneren eines homogenen Ohmschen Leiters das Potential eines Potentialfeldes ist. Die Lösung von

$$\Delta \varphi = 0 \quad (3.2.21)$$

ist durch die Randbedingungen

1.  $U = \varphi = \text{const}$  an den Elektrodenflächen (bei den Anschlüssen nach aussen)
2.  $\mathbf{i}_\perp = 0$  sonst (entlang des Leiters, Drahtoberfläche!)

gegeben<sup>2</sup>.

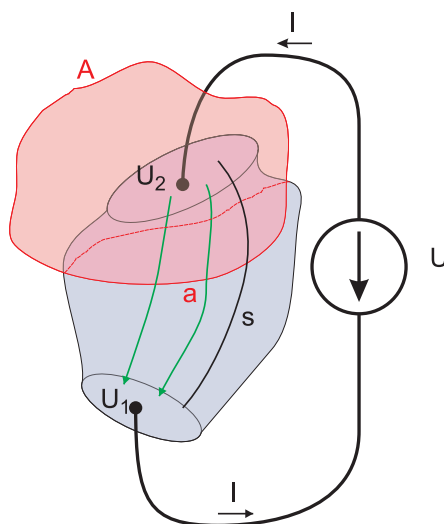
Mit diesen Gleichungen kann man zum Beispiel den WIDERSTAND eines homogenen Leiters berechnen. Bei inhomogenen Leitern müssen wir das Ohmsche Gesetz in seiner Differentialform verwenden. Aus der Kontinuitätsgleichung für stationäre Stromverteilungen Gleichung (3.1.17) und dem lokalen Ohmschen Gesetz Gleichung (3.2.2) bekommen wir

$$\text{div } \mathbf{i}(x, y, z) = \text{div } [\sigma(x, y, z) \mathbf{E}(x, y, z)] = 0 \quad (3.2.22)$$

Wir ersetzen nun  $\mathbf{E}$  und erhalten

$$\text{div } [\sigma(x, y, z) \mathbf{grad } U(x, y, z)] = 0 \quad (3.2.23)$$

Bei einem homogenen Leiter könnte  $\sigma(x, y, z)$  vor die Divergenz gezogen werden.



**Abb. 3.6.:** Berechnung des Widerstandes bei einem inhomogenen Leiter

Wir verwenden die Definition des Stromes in Gleichung (3.1.8) und wenden Sie auf die Fläche  $A$ , beziehungsweise auf den Teil, der den Leiter durchschneidet  $a$ , an.

$$\iint_A \sigma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \iint_a \sigma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = I \quad (3.2.24)$$

wobei  $a$  die durch  $A$  aus dem Leiter herausgeschnittene Fläche ist. Die Spannungsdifferenz ist

$$U_2 - U_1 = \int_s \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \quad (3.2.25)$$

<sup>2</sup>Im Gegensatz zum Kondensator ist hier  $\mathbf{E} \neq 0$  in einem endlichen Gebiet.

Wenn nun  $\varphi_1(x, y, z)$  eine Lösung von Gleichung (3.2.23) ist, dann ist aufgrund der Linearität dieser Gleichung auch

$$U_2(x, y, z) = kU_1(x, y, z) \quad (3.2.26)$$

eine Lösung. Dabei kann  $k$  eine beliebige, auch komplexzahlige Zahl sein. Da  $\mathbf{E} = -\mathbf{grad} U$  auch eine lineare Gleichung ist, muss also auch

$$\mathbf{E}_2 = -\mathbf{grad} U_2 = -k \mathbf{grad} U_1 = k \mathbf{E}_1 \quad (3.2.27)$$

eine Lösung sein. Nach Gleichung (3.2.24) ist dann auch

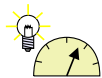
$$I_2 = \iint_a \sigma \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{a} = \iint_a \sigma k \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{a} = k \iint_a \sigma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = k I_1 \quad (3.2.28)$$

Damit haben wir, dass bei einem beliebigen inhomogenen Leiter

$$\frac{U_2}{I_2} = \frac{U_1}{I_1} = \text{const} = R \quad (3.2.29)$$

ist. Die Proportionalitätskonstante ist der WIDERSTAND  $R$ . Um den WIDERSTAND eines beliebigen Leiters zu berechnen, muss man  $\mathbf{E}(x, y, z)$  im Inneren kennen. Dies kann man erreichen, indem man die Laplacegleichung löst.

Im statischen Falle ist  $\mathbf{E}(x, y, z) = 0$  im Inneren eines Leiters. Bei einem stromdurchflossenen Leiter liefert die Batterie die notwendige Energie, um das elektrische Feld im Inneren des Leiters aufrecht zu erhalten.



#### Versuch 24: Versuch zur Vorlesung:

Kombination von Widerständen (Versuchskarte Applet)

Aus den Gesetzen dieses Kapitels können die folgenden Berechnungen für Ersatzwiderstände abgeleitet werden:

**Reihenschaltung von Widerständen** Wenn zwei Widerstände in Reihe oder Serie geschaltet werden, fließt durch beide der gleiche Strom, aber die Spannungen teilen sich auf. Wenn wir uns Widerstände als Drähte mit gleichem Querschnitt  $A$  und gleichem spezifischen Widerstand  $\rho$  vorstellen, haben wir  $R_1 = \frac{\rho}{A} \ell_1$  und  $R_2 = \frac{\rho}{A} \ell_2$ . Die Serieschaltung heisst, dass wir einen Draht der Länge  $\ell = \ell_1 + \ell_2$  haben. Damit ist  $R = \frac{\rho}{A} \ell_1 + \frac{\rho}{A} \ell_2 = \frac{\rho}{A} \ell$ .

$$R_{\text{Serie}} = R_1 + R_2 \quad \text{bei } N \text{ Widerständen in Serie} \quad R_{\text{Serie}} = \sum_{i=1}^N R_i \quad (3.2.30)$$

Mit  $N$  Leitwerten in Serie:

$$\frac{1}{G_{\text{Serie}}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{G_i} \quad (3.2.31)$$

**Parallelschaltung von Widerständen** Wenn zwei Widerstände parallel geschaltet werden, ist die anliegende Spannung bei beiden Widerständen gleich. Die Ströme addieren sich. Wenn wir uns Widerstände als Drähte mit gleicher Länge  $\ell$  und gleichem spezifischen Widerstand  $\rho$  vorstellen, haben wir  $R_1 = \rho \ell \frac{1}{A_1}$  und  $R_2 = \rho \ell \frac{1}{A_2}$ . Die Parallelschaltung heisst nun, dass die Flächen addiert werden. Die Rechnung ist einfacher mit Leitwerten  $G_1 = \frac{\sigma}{\ell} A_1$  und  $G_2 = \frac{\sigma}{\ell} A_2$  (mit  $\sigma = 1/\rho$ ). dann wird die Fläche addiert  $A = A_1 + A_2$ . Damit ist  $G = \frac{\sigma}{\ell} A_1 + \frac{\sigma}{\ell} A_2 = \frac{\sigma}{\ell} A$ .

$$G_{\text{parallel}} = G_1 + RG_2 \quad \text{bei } N \text{ Leitwerten in Serie} \quad G_{\text{parallel}} = \sum_{i=1}^N G_i \quad (3.2.32)$$

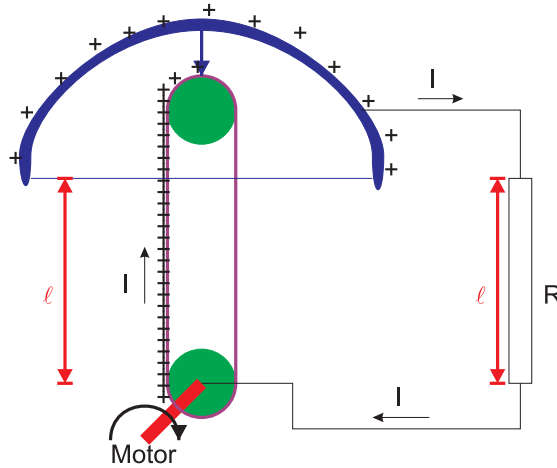
Mit  $N$  Widerständen in Serie:

$$\frac{1}{R_{\text{parallel}}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i} \quad (3.2.33)$$

### 3.3. Elektromotorische Kraft und Joulsche Wärme

(Siehe Leisi, Klassische Physik II [Lei98, pp. 85]) (Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 756])

Ein elektrisches Feld im Inneren eines Leiters bewirkt einen STROM. Wird dieses elektrische Feld durch LADUNGEN erzeugt, bewirkt der resultierende STROM einen Ausgleich dieser LADUNG. Durch Influenz werden die Oberflächenladungen so umgeschichtet, dass der STROM abnimmt und schliesslich verschwindet.



**Abb. 3.7.:** Ladungstransport in einem mit einem WIDERSTAND  $R$  kurzgeschlossenen VAN DE GRAAFF-GENERATOR.

Nehmen wir an, dass im stationären Betrieb eine SPANNUNG  $U$  zwischen der Kugel und dem Fuss des van-de-Graaff-Generators liegen. Das elektrische Feld entlang des Bandes ist dann, in erster Näherung,

$$E = U/\ell \quad (3.3.1)$$

Die Arbeit, eine Ladungseinheit  $dQ$  gegen dieses elektrische Feld zur Halbkugel zu bringen, ist<sup>3</sup>

$$dW_M = dQ \cdot U \quad (3.3.2)$$

Die Leistung des Motors, der hier als Spannungsquelle wirkt, ist

$$P_M = \frac{dW_M}{dt} = \frac{dQ}{dt} U = I \cdot U \quad (3.3.3)$$

Das elektrische Feld leistet im WIDERSTAND auf der anderen Seite in der Zeit  $dt$  die Arbeit

$$dW_E = E \cdot dQ \cdot \ell \quad (3.3.4)$$

oder, mit Gleichung (3.3.1),

$$dW_E = dQ \cdot U \quad (3.3.5)$$

Damit ist die Leistung des  $E$ -Feldes

$$P_E = \frac{dW_E}{dt} = \frac{dQ}{dt} U = I \cdot U = P_M \quad (3.3.6)$$

Die Energie des elektrischen Stromes wird im WIDERSTAND in JOULSCHE WÄRME umgesetzt, also ist die Leistung der Wärmequelle auch

$$P_J = P_M = P_E = I \cdot U \quad (3.3.7)$$

<sup>3</sup>Wir vernachlässigen dabei die Gravitationsarbeit. Frage: Ist dies für das Problem wichtig (prinzipiell und praktisch)?

Bei einem Ohmschen Leiter erhalten wir

$$P = R \cdot I^2 = \frac{U^2}{R} \quad (3.3.8)$$

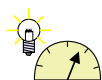
Wenn wir eine Probeladung  $q_0$  langsam um den Stromkreis herumführen, ist die geleistete Arbeit grösser als null. Diese Arbeit nennen wir ELEKTROMOTORISCHE KRAFT der Stromquelle. Wir definieren also

$$U_{EMK} = \frac{1}{q_0} \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \quad (3.3.9)$$

Diese elektromotorische Kraft<sup>4</sup> ist die Arbeit, die beim Herumführen einer kleinen LADUNG  $q_0$  von der Stromquelle geleistet wird. Beim van-de-Graaff-Generator besteht diese Arbeit aus zwei Teilen:

- Auf dem Band wird an jedem Punkt die Kraft des elektrostatischen Feldes durch die Kraft des Motors kompensiert. Auf diesem Zweig ist die Arbeit null.
- Die Arbeit, die im WIDERSTAND in JOULSCHE WÄRME umgewandelt wird.

Die elektromotorische Kraft einer Stromquelle ist die Quelle der Energie (Arbeit), die einen konstanten Stromfluss in einem Stromkreis aufrecht erhält. Neben der elektromotorischen Kraft können auch magnetische Kräfte und andere Quellen einen Stromfluss in einem Leiter aufrecht erhalten.



#### Versuch 25: Versuch zur Vorlesung:

EMK des Daniell-Elementes ([Versuchskarte TH-44](#), [Video](#))

### 3.4. RC-Stromkreise

(Siehe Leisi, Klassische Physik II [[Lei98](#), pp. 88]) (Siehe Tipler, Physik [[TM04](#), pp. 761]) (Siehe Tipler, Physik [[TM04](#), pp. 790])



#### Versuch 26: Versuch zur Vorlesung:

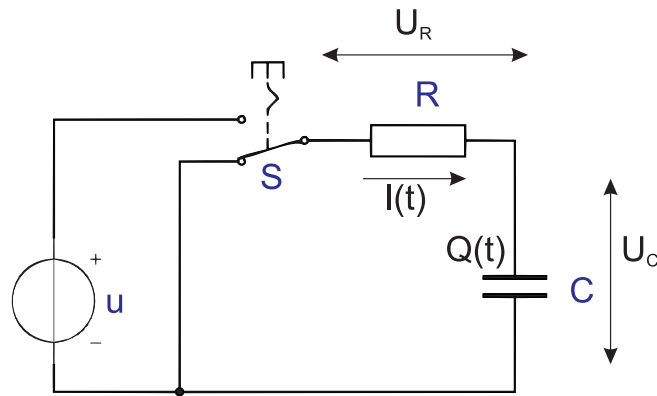
Entladen eines Kondensators ([Versuchskarte EM-145](#), [Video](#))

Ohne ein Verständnis von Stromkreisen sind moderne elektronische Schaltungen nicht verständlich. Wir betrachten deshalb Schaltungen aus Kondensatoren und Widerständen. Zur Erinnerung: die relevanten Gleichungen sind

<sup>4</sup>Die elektromotorische Kraft ist keine Kraft im Sinne der Mechanik!

- $U = R \cdot I = R \cdot \frac{dQ}{dt}$  für Widerstände
- $Q = \int I dt = U \cdot C$  für Kondensatoren

Wir betrachten die folgende Schaltung



**Abb. 3.8.:** Aufladen und Entladen eines Kondensators über einen WIDERSTAND.

Für die Zeit  $t < 0$  soll der Schalter  $S$  in der gezeigten Stellung sein. Die SPANNUNG am Kondensator ist  $U_C = 0$ . Damit ist auch  $Q = 0$  und  $I(t) = 0$ . Für  $t \geq 0$  wird der Kondensator  $C$  mit der SPANNUNGSQUELLE  $U$  verbunden. Da Spannungen im quasistationären Falle sich wie potentielle Energien verhalten, kann man für

$$U_R(t) = U - U_C(t) = I(t) \cdot R \quad (3.4.1)$$

schreiben. Ebenso gilt

$$U_C(t) = \frac{Q(t)}{C} = \frac{\int_0^t I(\tau) d\tau}{C} \quad (3.4.2)$$

Zusammen erhalten wir die Differentialgleichung

$$\dot{Q}(t) \cdot R + \frac{Q(t)}{C} = U \quad (3.4.3)$$

oder

$$\dot{Q}(t) + \frac{Q(t)}{C \cdot R} = \frac{U}{R} \quad (3.4.4)$$

mit der Anfangsbedingung  $U_C(0) = 0 = Q(0)$ .

Zur Lösung dieser Differentialgleichung machen wir den Ansatz

**Partikuläre Lösung**  $Q = C \cdot U$

**Allgemeine Lösung**  $Q(t) = C \cdot U \cdot e^{-t/(RC)}$

Die Lösung der Differentialgleichung ist



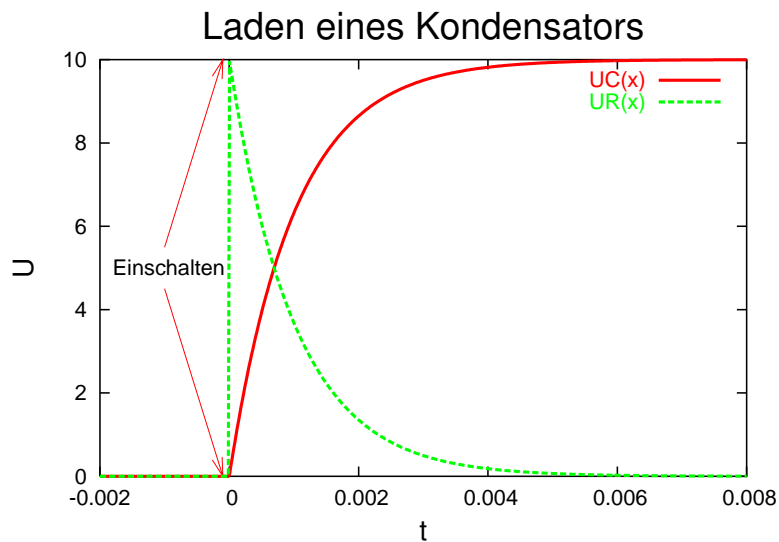
$$Q(t) = U \cdot C \left(1 - e^{-t/(RC)}\right) \quad (3.4.5)$$

für  $U_C(t)$  ist also

$$U_C(t) = \frac{Q(t)}{C} = U \left(1 - e^{-t/(RC)}\right) \quad (3.4.6)$$

und

$$U_R(t) = I(t) \cdot R = \dot{Q}(t) \cdot R = U e^{-t/(RC)} \quad (3.4.7)$$



**Abb. 3.9.:** Ladekurven am Kondensator. Die verwendeten Werte sind  $U = 10 \text{ V}$  und  $R \cdot C = 0.001 \text{ s}$ .

Die Differentialgleichung für das Entladen lautet

$$\dot{Q}(t) \cdot R + \frac{Q(t)}{C} = 0 \quad (3.4.8)$$

wobei die Anfangsbedingung nun  $U_C(0) = U$  oder  $Q(0) = C \cdot U$  ist. Die Lösung dieser Differentialgleichung ist

**Partikuläre Lösung**  $Q = 0$

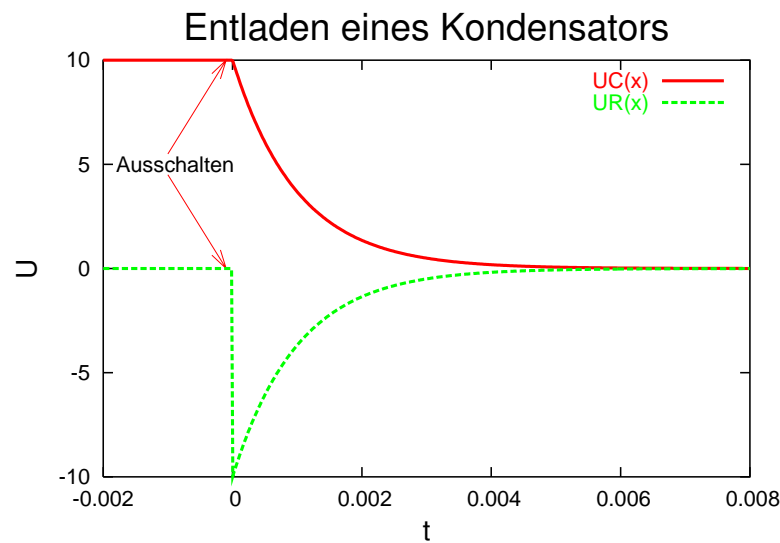
**Allgemeine Lösung**  $Q(t) = C \cdot U \cdot e^{-t/(RC)}$

Damit erhalten wir

$$U_C(t) = \frac{Q(t)}{C} = U \cdot e^{-t/(RC)} \quad (3.4.9)$$

und

$$U_R(t) = I(t) \cdot R = \dot{Q}(t) \cdot R = -U \cdot e^{-t/(RC)} \quad (3.4.10)$$



**Abb. 3.10.:** Entladekurven am Kondensator. Die verwendeten Werte sind  $U = 10 \text{ V}$  und  $R \cdot C = 0.001 \text{ s}$ .

Die Grösse  $\tau = R \cdot C$  ist die Zeitkonstante der Schaltung. In der Zeit  $\tau$  steigt  $U_C$  beim Einschalten von 0 auf 63 %. Ebenso fällt beim Ausschalten die Spannung in der Zeit  $\tau$  von 100 % auf 37 % ab.

Eine alternative Ableitung dieser Gleichung verwendet eine Leistungsbetrachtung. Die Leistung der Joulschen Wärme im WIDERSTAND und die zeitliche Änderung der Energie im Kondensator müssen gleich der von der Batterie gelieferten Leistung sein.

$$U \cdot I = R \cdot I^2 + \frac{d}{dt} \left( \frac{Q^2}{2C} \right) \quad (3.4.11)$$

oder

$$U \cdot \frac{dQ}{dt} = R \cdot \left( \frac{dQ}{dt} \right)^2 + \frac{1}{C} \cdot Q \cdot \frac{dQ}{dt} \quad (3.4.12)$$

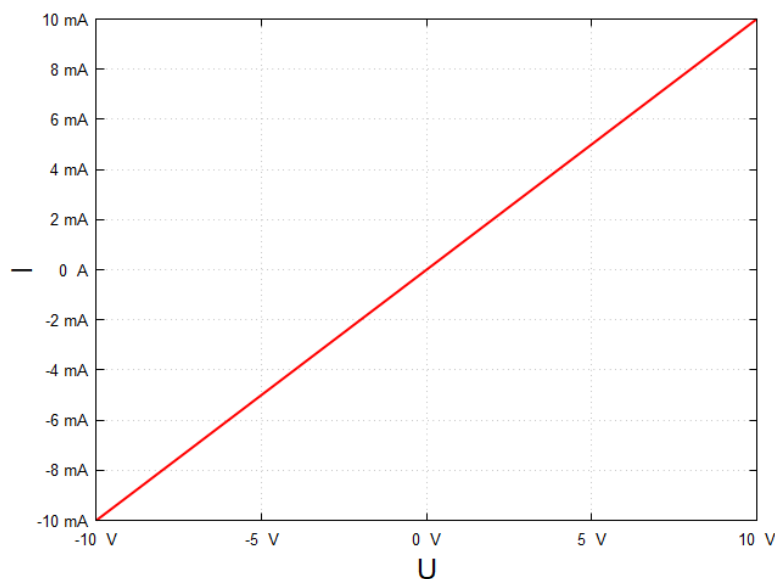
und damit

$$U = R \cdot \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} \cdot Q \quad (3.4.13)$$

### 3.5. Schaltungen und Bauelemente

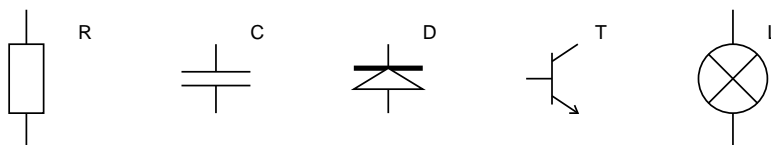
Wir kennen bis jetzt zwei Typen von BAUELEMENTEN, den WIDERSTAND und den KONDENSATOR. Beim WIDERSTAND haben wir die Beziehung

$$I(U) = \frac{1}{R} U$$



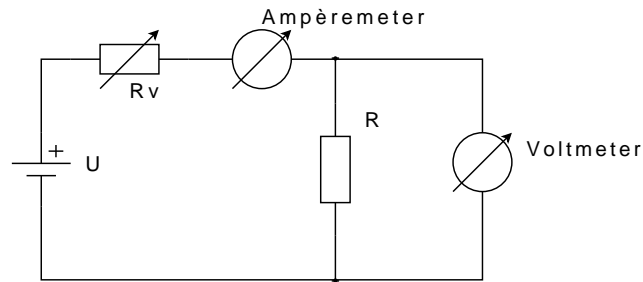
**Abb. 3.11.:** Kennlinie eines  $1000\Omega$ -Widerstands.

Abbildung 3.11 zeigt die Kennlinie eines Widerstandes. Neben Widerständen und Kondensatoren gibt es andere passive und aktive Bauelemente. Die Kennlinien sind meistens nicht linear. Abbildung 3.12 zeigt verschiedene Bauelemente.



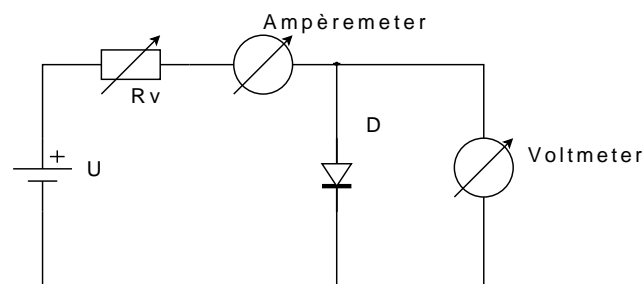
**Abb. 3.12.:** Symbole für einen WIDERSTAND (Zeichen: R), einen Kondensator (Zeichen: C), eine Diode (Zeichen: D), einen NPN-Transistor (Zeichen: T) und eine Lampe (Zeichen: L). Bei der Diode zeigt der Pfeil von der Anode zur Kathode (mit Querstrich). Beim Transistor heisst der Anschluss mit Pfeil EMITTER, derjenige links BASIS und der Anschluss oben KOLLEKTOR. Die Lampe, der WIDERSTAND und der Kondensator sind symmetrische Objekte.

Diese Bauelemente sind sowohl linear wie nichtlinear. Wenn man die genaue physikalische Funktionsweise eines Bauelementes nicht kennt, dann helfen Kennlinien, trotzdem mit dem Bauelement Schaltungen zu berechnen.

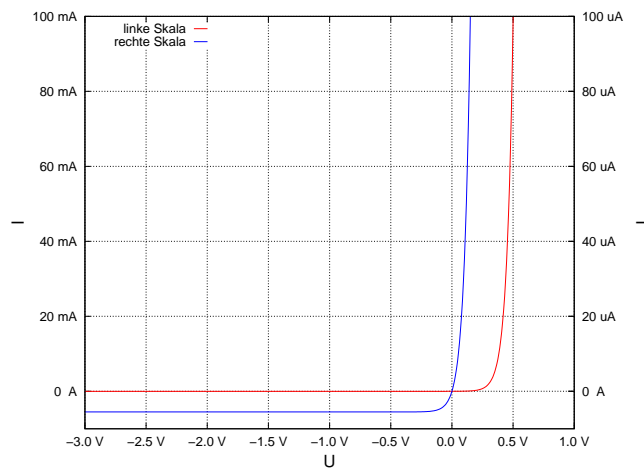


**Abb. 3.13.:** Messung der Kennlinie eines Widerstandes.

Abbildung 3.13 zeigt wie die Messung geht. Die SPANNUNG  $U$  wird über das Potentiometer  $R_V$ , ein gebräuchlicher Name für einen veränderbaren WIDERSTAND, an den zu testenden WIDERSTAND  $R$  angeschlossen. Mit einem (idealen) Voltmeter wird die SPANNUNG  $U_R$  am WIDERSTAND  $R$  gemessen. Das ideale Ampèremeter misst den Strom durch  $I_R$  durch den WIDERSTAND  $R$ . Diese beiden Größen werden denn wie in Abbildung 3.11 aufgezeichnet.

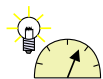


**Abb. 3.14.:** Messschaltung zur Bestimmung der Kennlinie einer Diode vom Typ 1N4148.



**Abb. 3.15.:** Kennlinie einer Diode vom Typ 1N4148 gemessen mit der Schaltung nach Abbildung 3.14.

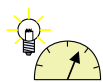
Als Beispiel eines nichtlinearen Bauelementes zeigt Abbildung 3.14 die Messschaltung und Abbildung 3.15 die Kennlinie der Diode 1N4148. Für positive Spannungen  $U$  ist die Diode in DURCHLASSRICHTUNG gepolt. Deshalb sind die Ströme bei kleinen Spannungen sehr gross. In der SPERRRICHTUNG Sind die Ströme viel kleiner. Diese können an der rechten Skala abgelesen werden.



#### Versuch 27: Versuch zur Vorlesung:

Dioden-Kennlinie: Halbleiterdiode, Germanium (Versuchskarte EM-024, Video (VPN oder intern))

### 3.5.1. Grafische Methode zur Bestimmung von Arbeitspunkten



#### Versuch 28: Versuch zur Vorlesung:

Potentiometerschaltung (Versuchskarte Applet)

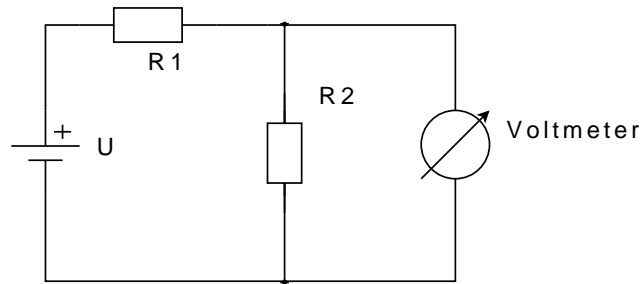


Abb. 3.16.: Spannungsteiler.

Abbildung 3.16 zeigt einen Spannungsteiler bestehend aus den Widerständen  $R_1$  und  $R_2$ . Die SPANNUNG an  $R_1$  und die SPANNUNG an  $R_2$  sind in Serie. Es muss gelten

$$U = U_{R_1} + U_{R_2} \quad (3.5.1)$$

Andererseits fließt der gleiche STROM durch  $R_1$  und  $R_2$  und durch den Ersatzwiderstand  $R = R_1 + R_2$ . Also hat man

$$I = \frac{U}{R} = \frac{U}{R_1 + R_2} = \frac{U_{R_2}}{R_2} = \frac{U_{R_1}}{R_1} \quad (3.5.2)$$

und daraus

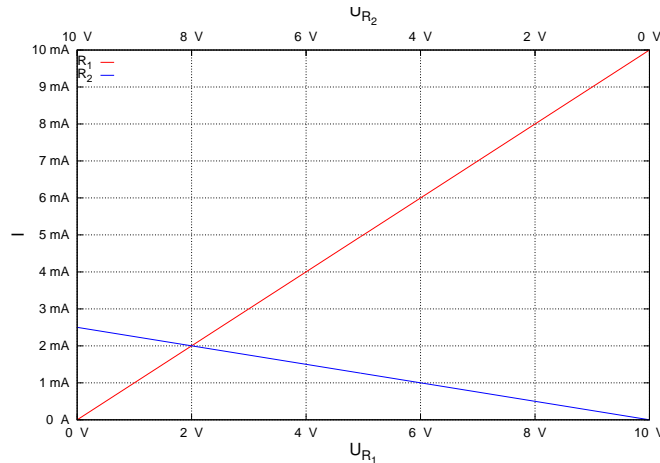
$$U_{R_2} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U \quad (3.5.3)$$

$$U_{R_1} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} U \quad (3.5.4)$$

Die SPANNUNG an der Batterie  $U$  ist vorgegeben. Wenn die SPANNUNG  $U_{R_2}$  an  $R_2$  steigt, muss die SPANNUNG  $U_{R_1}$  an  $R_1$  um den gleichen Betrag sinken. Wenn  $U_{R_1} = 0$  ist, ist  $U_{R_2} = U$ , und umgekehrt. Dies bedeutet, dass

$$U_{R_2} = U - U_{R_1} \quad (3.5.5)$$

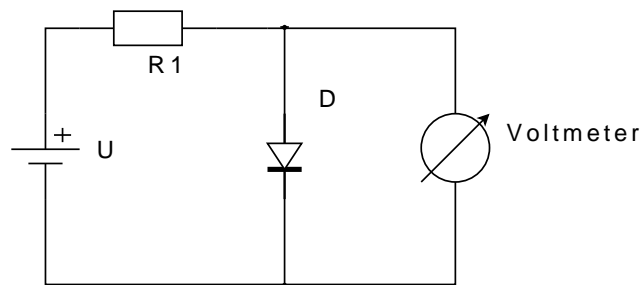
ist. Wir können also beide Kennlinien in einem Diagramm aufzeichnen.



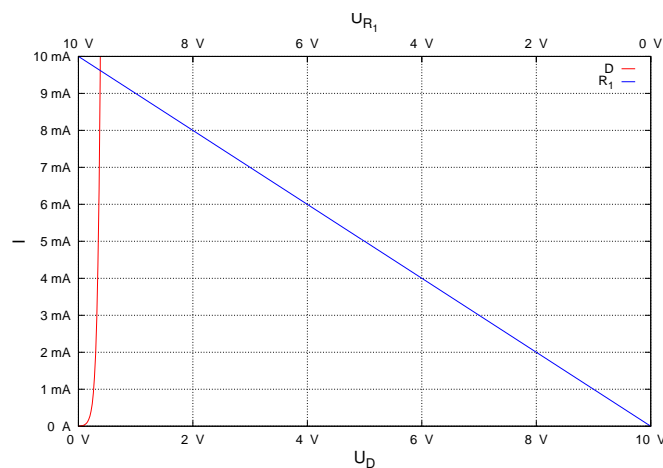
**Abb. 3.17.:** Gemeinsame Auftragung der Kennlinien zweier in Reihe geschalteter Widerstände  $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$  und  $R_2 = 4 \text{ k}\Omega$  mit einer Batteriespannung  $U = 10 \text{ V}$ .

Die beiden Kennlinien in Abbildung 3.17 schneiden sich bei  $U_{R_1} = 2 \text{ V}$  und  $U_{R_2} = 8 \text{ V}$ . Nur an diesem Punkt stimmt an beiden Widerständen die Beziehung zwischen STROM und SPANNUNG (Ohmsches Gesetz) und gleichzeitig ist die Summe der Spannungsabfälle gleich der Batteriespannung. Setzt man in Gleichung (3.5.3) und Gleichung (3.5.4) die Werte für  $U$ ,  $R_1$  und  $R_2$  ein, erhält man das gleiche Ergebnis. Das Verfahren zur Bestimmung des Arbeitspunktes ist unabhängig von der Tatsache, dass Widerstände lineare Bauelemente sind. Es funktioniert auch mit Dioden und jeglichen anderen nichtlinearen Bauelementen.

Um grafisch die Spannungsabfälle an zwei in Serie geschalteten Bauelementen zu bestimmen, trägt man die Kennlinien einmal mit zunehmender und für das andere Bauelement mit abnehmender SPANNUNG übereinander auf. Der Schnittpunkt ist der gesuchte Arbeitspunkt. Die Spannungen an den zwei Bauelementen können an der entsprechenden Skala direkt abgelesen werden.



**Abb. 3.18.:** Serieschaltung einer Diode  $D$  mit einem WIDERSTAND  $R$ .



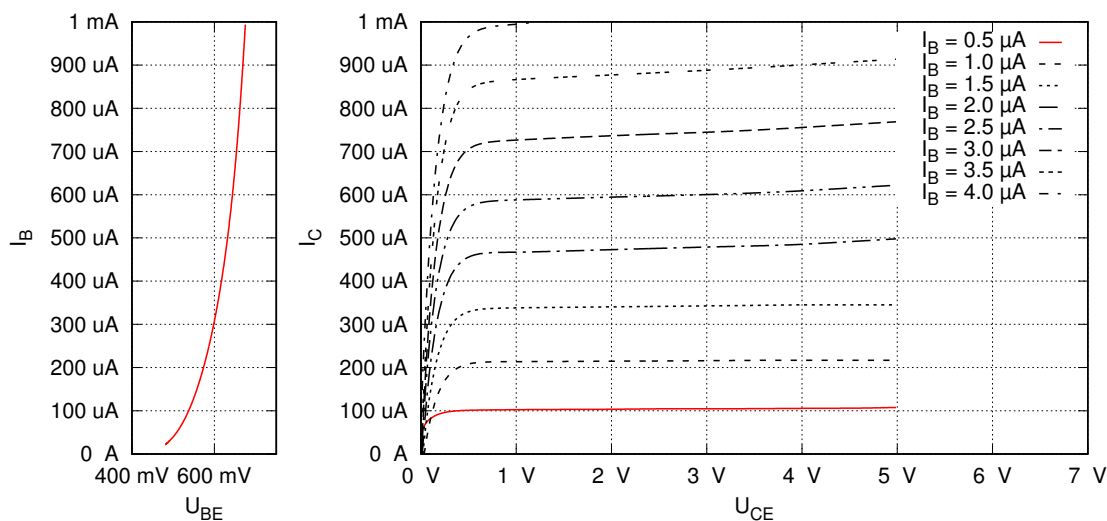
**Abb. 3.19.:** Arbeitspunkt einer Diode vom Typ 1N4148 in Serie mit einem WIDERSTAND  $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$  (Schaltung nach Abbildung 3.18).

Aus der Abbildung 3.19 liest man ab, dass am Arbeitspunkt der Schaltung nach Abbildung 3.18 die SPANNUNG  $U_D = 0.376 \text{ V}$  und an dem WIDERSTAND die SPANNUNG  $U_{R_1} = 9.624 \text{ V}$  abfällt. Durch beide Bauteile fließt der STROM  $I = 9.57 \text{ mA}$ . Das Verfahren nach Abbildung 3.19 ist universell anwendbar.

### 3.5.2. Transistoren

Ein Transistor hat drei Anschlüsse, den Emitter (E), den Kollektor (C) und die Basis (B). Im Schaltschema ist der Anschluss mit dem Pfeil der Emitter, derjenige auf der gleichen Seite ohne Pfeile der Kollektor und derjenige auf der anderen Seite die Basis.

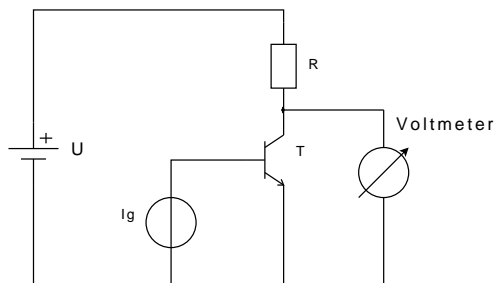




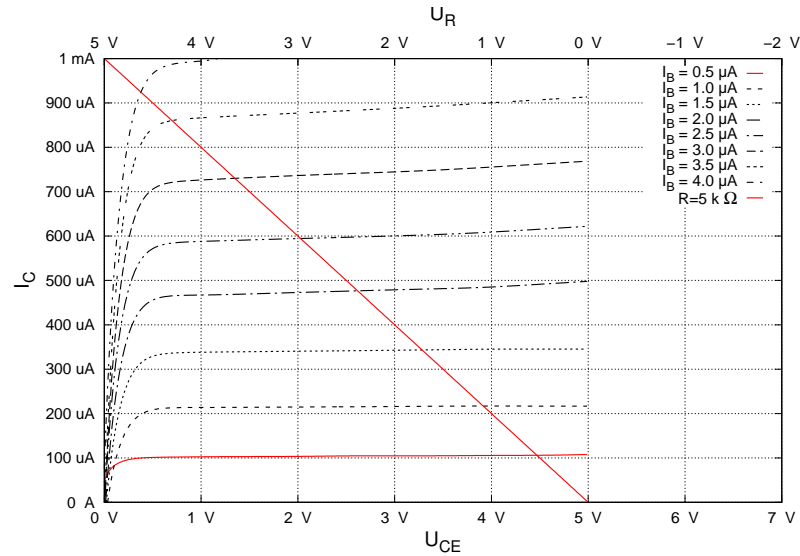
**Abb. 3.20.:** Links: Basis-Emitter-Kennlinie des Transistors BC107, rechts: Kollektor-Kennlinie des Transistors BC107 mit dem Basisstrom  $I_B$ .

Die BASIS-EMITTER-KENNLINIE in Abbildung 3.20 ist die gewöhnliche Diodenkennlinie. Die rechte Seite von Abbildung 3.20 zeigt das KOLLEKTOR-KENNLINIENFELD des Transistors. Dieses Kennlinienfeld wird manchmal auch das Ausgangskennlinienfeld genannt. Beim Ausgangskennlinienfeld wird der Basisstrom  $I_B$  als Parameter verwendet. Die Abbildung 3.20 zeigt die Kennlinien bei festgehaltenem Basisstrom, wobei die Basisströme von  $I_B = 0.5 \mu A$  bis  $I_B = 4 \mu A$  in Schritten von  $0.5 \mu A$  variieren.

Bei vorgegebener Kollektor-Emitter-Spannung  $U_{CE}$  kann man so den Ausgangsstrom am Kollektor bestimmen. Analog kann bei vorgegebenem Kollektorstrom die SPANNUNG zwischen Emitter und Kollektor als Funktion des Basisstroms abgelesen werden. Dies ist wichtig, wenn der Transistor als Schalter verwendet werden soll.

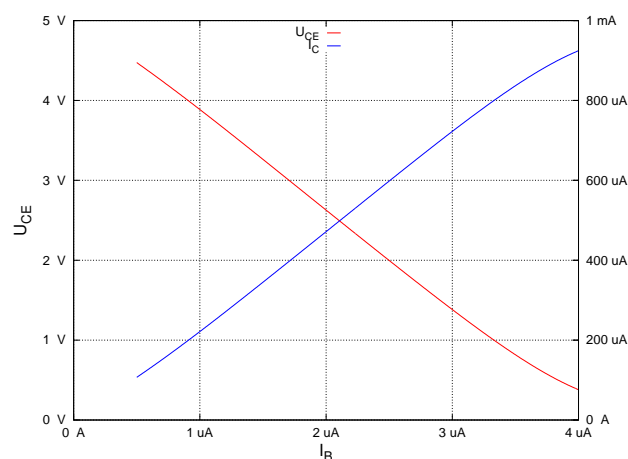


**Abb. 3.21.:** Schaltung zur Messung des Ausgangskennlinie des Transistors BC107 mit einem Kollektorwiderstand von  $5k\Omega$ .



**Abb. 3.22.:** Arbeitskennlinie des Transistors BC107 mit einem Kollektorwiderstand von  $5\text{ k}\Omega$  gemessen mit der Schaltung nach Abbildung 3.21.

Die Abbildung 3.21 zeigt die Schaltung eines Transistorverstärkers. Der STROM in die Basis  $I_B$  steuert den STROM im Kollektor  $I_C$ . Der Kollektorstrom fließt durch den WIDERSTAND  $R$ . Die Summe der Spannungsabfälle an beiden Bauelementen muss der Batteriespannung  $U$  entsprechen. Wir können also analog wie bei der Diode vorgehen (siehe Abbildung 3.19): Wir zeichnen die Kennlinie des Widerstandes wie bei der Diode rückläufig ein. Die Schnittpunkte der Kennlinie des Widerstandes mit den verschiedenen, basisstromabhängigen Ausgangskennlinien des Transistors sind die Kurve, die die Strom- oder Spannungsverstärkung angibt.



**Abb. 3.23.:** Verstärkung eines Transistors in der Emitterschaltung (Der Emitter wird sowohl vom Eingang wie vom Ausgang verwendet.)

Abbildung 3.23 zeigt sowohl die Kollektor-Emitterspannung  $U_{CE}(I_B)$  wie auch den Kollektorstrom  $I_C(I_B)$ . Die Verstärkung ist für den Basisstrombereich  $0.5 \mu\text{A} < I_B < 3 \mu\text{A}$  linear. Die Verstärkungswerte sind in Tabelle 3.1 angegeben.

---

Stromverstärkung	$\frac{I_C}{I_B} = 0.252 \text{ mA } \mu\text{A}^{-1} = 252 \mu\text{A } \mu\text{A}^{-1} = 252 \text{ A A}^{-1}$
Spannungsverstärkung	$\frac{U_{CE}}{I_B} = 1.28 \text{ V } \mu\text{A}^{-1}$

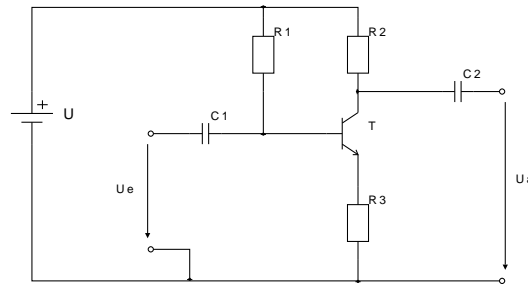
---

**Tab. 3.1.:** Verstärkungen der Schaltung 3.21.

---

Wenn das Eingangssignal nicht ein STROM, sondern eine SPANNUNG sein soll, muss die SPANNUNG mit einem WIDERSTAND in einen STROM umgewandelt werden.

---



**Abb. 3.24.:** Verstärkerschaltung mit BC107.

---

Zum Schluss dieses Abschnittes wollen wir die Schaltung nach Abbildung 3.24 besprechen. Wir verwenden die Daten aus Abbildungen 3.22 und 3.23. Der WIDERSTAND  $R_2$  ist der Arbeitswiderstand  $R$  aus Abbildung 3.21. Wir hatten immer eine SPANNUNG von 5 V über dem Arbeitswiderstand  $R$  (oder  $R_2$  hier) und dem Transistor. Wir wollen dies beibehalten und gleichzeitig einen Spannungsabfall von 0.2 V über  $R_3$  haben. Bei unseren vorherigen Berechnungen war  $R_2 = 5 \text{ k}\Omega$ . Den Arbeitspunkt setzen wir in etwa in die Mitte des linearen Bereiches, bei  $I_B = 2 \mu\text{A}$  und bei  $I_C = 500 \mu\text{A}$ . Damit ist

$$R_3 = \frac{U_{R_3}}{I_B + I_C} = \frac{0.2 \text{ V}}{500 \mu\text{A} + 2 \mu\text{A}} = 398 \Omega \approx 400 \Omega$$

Die Grösse des Widerstandes  $R_1$  finden wir, wenn wir aus Abbildung 3.20 ablesen  $U_{BE}(2 \mu\text{A}) \approx 0.5 \text{ V}$ . Die SPANNUNG über  $R_1$  ist dann 4.5 V und wir haben

$$R_1 = \frac{4.5 \text{ V}}{2 \mu\text{A}} = 2.25 \text{ M}\Omega$$

Was ist die Funktion von  $R_3$ ?  $R_3$  stabilisiert die Schaltung gegen Temperaturänderungen und setzt gleichzeitig die Verstärkung fest. Wenn nämlich die Eingangsspannung  $U_e$  und damit die Basis-Spannung  $U_B$  steigt, steigt der Basisstrom  $I_B$  und

der Kollektorstrom  $I_C$  und damit die SPANNUNG über  $R_3$ . Dieser Spannungsanstieg verringert aber den Anstieg der Basis-Emitter-Spannung, da  $U_{BE} = U_e - U_{R_3}$  ist. Die Spannungsverstärkung der Schaltung ist

$$A = \frac{R_2}{R_3} = 12$$

Die Kondensatoren werden so gewählt, dass die tiefsten Frequenzen der zu verstärkenden Signale noch kaum geschwächt werden. Für Signale zwischen 100 Hz und 4 kHz (Telefonbandbreite klassischer Telefone) würde man erhalten  $C_1 > 0.7$  pF und  $C_2 > 320$  nF. Der so berechnete Wert für  $C_1$  ist falsch: Wir haben vergessen, dass auch der WIDERSTAND Basis-Emitter-Diode (grob abgeschätzt aus der Steigung  $r_{BE} = 1 \text{ mV}/2 \text{ }\mu\text{A} \approx 500 \text{ }\Omega$  wechsellspannungsmässig parallel zu  $R_1$  ist. Zu  $r_{BE}$  ist noch  $R_3$  in Serie geschaltet. Die modifizierte Berechnung für  $C_1$  ergibt dann  $C_1 > 2$  nF.  $C_1$  kann ohne Probleme 10 bis 100 mal grösser gewählt werden.

---

$U$	$R_1$	$R_2$	$R_3$	$C_1$	$C_2$	$A$
5.2 V	2.25 M $\Omega$	5 k $\Omega$	400 $\Omega$	1 $\mu\text{F}$	330 nF	12

---

**Tab. 3.2.:** Dimensionierung der Schaltung nach Abbildung 3.24

---

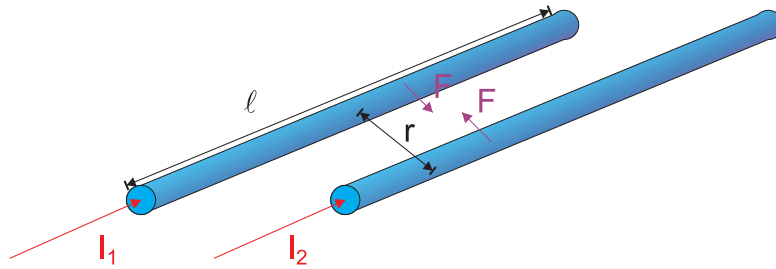
Weiterführende Informationen finden Sie im **Skript Physikalische Elektronik und Messtechnik** [Mar09].

## 3.6. Magnetfeld und Lorentzkraft



### Versuch 29: Versuch zur Vorlesung:

Kraft zweier stromdurchflossener Leiter (Versuchskarte EM-63, Video (VPN oder intern))



**Abb. 3.25.:** STROM in zwei parallelen Leitern. Die Leiter haben die Länge  $\ell$  und sind im Abstand  $r$ . Sie sind von den Strömen  $I_1$  und  $I_2$  durchflossen.

Wenn in zwei parallelen Stromkreisen Ströme fließen, so gibt es eine Kraft zwischen den beiden Leitern.

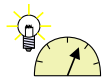
$$F_M = \text{const} \cdot \frac{\ell \cdot I_1 \cdot I_2}{r} \quad (3.6.1)$$

Die beobachtete Kraft hat die in der Gleichung (3.6.1) angegebene Form. Sie wird grösser, wenn längere Leiterstücke parallel sind. Sie nimmt ab, wenn der Abstand zunimmt. Sie hängt vom Produkt der beiden Ströme ab und ist **anziehend**, wenn die beiden Ströme in die gleiche Richtung fließen.

Die Kraft  $F_M$  ist nicht eine elektrostatische Kraft, da eine geerdete Metallplatte die Kraft, anders als bei der Coulomb-Kraft, nicht abschirmt.

Die Kraft  $F_M$  wirkt auf bewegte LADUNGEN!

Die Kraft  $F_M$  wirkt auch auf Elektronenstrahlen.



### Versuch 30: Versuch zur Vorlesung:

Lorentzkraft auf stromdurchflossenen Leiter ([Versuchskarte](#) [Applet](#))

## 3.7. Die magnetische Kraft

(Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 812]) (Siehe Leisi, Klassische Physik II [Lei98, pp. 91])

Um die Magnetische Kraft zu berechnen gehen wir in zwei Schritten vor:

1. Wir zeigen, dass elektrostatische Gesetze auch in bewegten BEZUGSSYSTEMEN gelten.
2. Wir berechnen mit den Gesetzen der RELATIVITÄTSTHEORIE die magnetische Kraft.

### 3.7.1. Ladungsinvarianz bewegter Bezugssysteme

(Siehe Leisi, Klassische Physik II [Lei98, pp. 91])

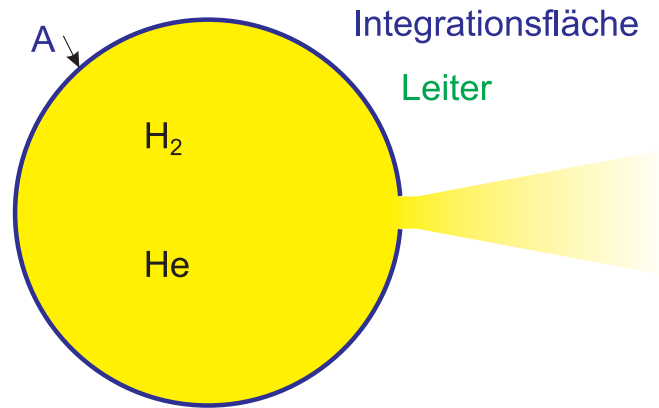


Abb. 3.26.: Metallischer Gastank mit Ausströmöffnung.

Mit zwei Gedankenexperimenten soll geklärt werden, ob die LADUNG von der Geschwindigkeit abhängt. Zuerst schliessen wir eine grosse Menge  $H_2$ -Gas in den metallischen Tank ein, entladen ihn, und lassen das Gas ausströmen. Die LADUNG des leeren Tanks ist unmessbar klein. Daraus schliesst man:

$$q_{Elektron} = -q_{Proton} \quad (3.7.1)$$

mit einer Genauigkeit von  $|q_{Elektron}|/N = 10^{-20} q_{Elektron}$ .

Dies folgt aus dem Gausschen Gesetz Gleichung (2.3.3)

$$\iint_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = 0 \pm a |q_{Elektron}| = \frac{1}{\epsilon_0} [NQ(H_2) + q] \quad (3.7.2)$$

wobei  $q$  eine eventuell vor dem Ausströmen vorhandene LADUNG,  $Q(H_2)$  die LADUNG eines Wasserstoffmoleküls und  $N$  die Anzahl der eingeschlossenen Wasserstoffmoleküle ist.  $a$  ist die Ungenauigkeit der Ladungsmessung. Aus der Tatsache, dass der Metallbehälter nach dem Ausströmen im Rahmen der Messgenauigkeit ungeladen ist, folgt, dass das  $H_2$ -Molekül ungeladen ist.

Der Versuch wird mit  $He$ -Gas wiederholt. Das Resultat ist das gleiche. Nun bewegen sich aber die zwei Protonen im  $He$ -Atom mit sehr grosser Geschwindigkeit. Das bedeutet, dass die LADUNG DES PROTONS unabhängig von der Geschwindigkeit ist. Die LADUNG muss insbesondere in jedem INERTIALSYSTEM gleich sein. Wir betrachten zwei Inertialsysteme  $S$  und  $S'$ <sup>5</sup>

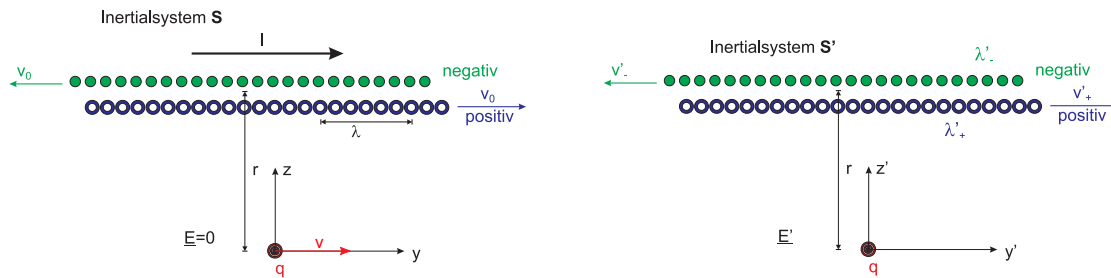
$$\iint_{A(t)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \iint_{A'(t)} \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{a}' \quad (3.7.3)$$

<sup>5</sup>Die Inertialsysteme bewegen sich gegeneinander mit konstanter Geschwindigkeit!

Diese Gleichung drückt die RELATIVISTISCHE LADUNGSINVARIANZ aus. Die LADUNGSINVARIANZ ist nicht gleich der LADUNGSErhaltung. So ist zum Beispiel die Energie erhalten, zwischen zwei Inertialsystemen aber nicht invariant ( $m_0 c^2 \neq m(v) c^2$ ).

### 3.7.2. Relativistische Berechnung

(Siehe Leisi, Klassische Physik II [Lei98, pp. 94])



**Abb. 3.27.:** Berechnung der magnetischen Kraft. Links: im Bezugssystem  $S$  und rechts: im Bezugssystem  $S'$ , in dem  $q$  in Ruhe ist. Beachte: wir wissen zwar nicht, wie gross der STROM  $I$  gemessen im Bezugssystem  $S$  im Bezugssystem  $S'$  ist. Die LADUNG ist jedoch **invariant**.

Den STROM  $I$  modellieren wir mit zwei Ketten aus Ladungsträgern, je eine positiv und negativ geladen. Ihre Linienladungsdichten  $\lambda$  sollen so sein, dass die beiden Ketten neutral sind. Im Ruhesystem  $S^+$  der positiven LADUNGEN ist

$$\lambda_0 = \frac{Q}{L_0} \quad (3.7.4)$$

Im Inertialsystem  $S$  ist wegen der Ladungsinvarianz

$$\lambda = \frac{Q}{L} \quad (3.7.5)$$

Wegen der Längenkontraktion gilt

$$L = \frac{L_0}{\gamma_0} = L_0 \sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}} \quad (3.7.6)$$

Zusammengenommen erhalten wir

$$\lambda_0 = \frac{\lambda}{\gamma_0} \quad (3.7.7)$$

Die gleiche Beziehung kann für die negativen LADUNGEN abgeleitet werden. Das heisst, wenn in  $S$  die Linienladungsdichten der positiven und negativen LADUNGEN gleich sind, dann auch in den jeweiligen Ruhesystemen. In den Ruhesystemen ist die Linienladungsdichte geringer als in bewegten Bezugssystemen. Da die beiden bewegten Ladungsketten die gleiche Linienladungsdichte im System  $S$  haben, ist  $E = 0$ .

Im Ruhesystem  $S'$ , in dem das Teilchen mit der LADUNG  $q$  in Ruhe ist, sieht die Situation anders aus. Die Geschwindigkeit der positiven und der negativen Ladungsketten ist unterschiedlich. deshalb sind sie zusammen nicht mehr elektrisch neutral. Auf die LADUNG  $q$  wirkt eine elektrostatische Kraft. Da die Relativgeschwindigkeit der positiven LADUNGEN zu  $q$  kleiner ist als die der negativen LADUNGEN, liegen in  $S'$  die positiven LADUNGEN weniger dicht als die negativen<sup>6</sup>. Die beiden Ladungsketten sind insgesamt **negativ** geladen. Deshalb wird  $q$  angezogen, wenn  $q > 0$  ist. Das  $\mathbf{E}'$ -Feld in die  $z'$ -Richtung erzeugt in  $S'$  die Kraft

$$F'_z = q \cdot E' \quad (3.7.8)$$

Das  $\mathbf{E}$ -Feld hängt vom Bezugssystem ab, ist also nicht relativistisch invariant!

Das elektrische Feld einer Linienladung im Abstand  $r$  ist

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 \cdot r} \quad (3.7.9)$$

Um das elektrische Feld  $\mathbf{E}'$  berechnen wir die Geschwindigkeiten  $v'_+$  und  $v'_-$  in  $S'$ .

$$\begin{aligned} v'_+ &= \frac{v - v_0}{1 - \frac{v \cdot v_0}{c^2}} \\ v'_- &= \frac{v + v_0}{1 + \frac{v \cdot v_0}{c^2}} \end{aligned} \quad (3.7.10)$$

Mit den üblichen Abkürzungen

$$\begin{aligned} \beta &\equiv \frac{v}{c} \\ \gamma &\equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{aligned} \quad (3.7.11)$$

bekommen wir

$$\begin{aligned} \beta'_+ &= \frac{\beta - \beta_0}{1 - \beta_0\beta} \\ \beta'_- &= \frac{\beta + \beta_0}{1 + \beta_0\beta} \end{aligned} \quad (3.7.12)$$

Mit  $\gamma'_+ \equiv \gamma(v'_+)$  und  $\gamma'_- \equiv \gamma(v'_-)$  und mit  $\lambda_0 = \lambda'_+/\gamma'_+$  erhalten wir aus  $\lambda_0 = \frac{\lambda}{\gamma_0} = \frac{\lambda'_i}{\gamma'_i}$  ( $i \in \{+, -\}$ )

$$\begin{aligned} \lambda'_+ &= \gamma'_+ \frac{\lambda}{\gamma_0} \\ \lambda'_- &= \gamma'_- \frac{\lambda}{\gamma_0} \end{aligned} \quad (3.7.13)$$

<sup>6</sup>In  $S$  sind die Ladungsdichten der positiven und negativen LADUNGEN gleich.



Die Netto-Linienladung in  $S'$  ist dann

$$\lambda' = \lambda'_+ - \lambda'_- = \frac{\lambda}{\gamma_0} (\gamma'_+ - \gamma'_-) \quad (3.7.14)$$

Weiter erhalten wir

$$\begin{aligned} \gamma'_+ - \gamma'_- &= \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_+^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_-^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\beta - \beta_0}{1 - \beta_0\beta}\right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\beta + \beta_0}{1 + \beta_0\beta}\right)^2}} \\ &= \frac{1 - \beta_0\beta}{\sqrt{(1 - \beta_0^2)(1 - \beta^2)}} - \frac{1 + \beta_0\beta}{\sqrt{(1 - \beta_0^2)(1 - \beta^2)}} \\ &= \frac{-2\beta_0\beta}{\sqrt{(1 - \beta_0^2)(1 - \beta^2)}} \\ &= -2\beta_0\beta\gamma_0\gamma \end{aligned} \quad (3.7.15)$$

Also ist

$$\lambda' = -2\lambda\beta\beta_0\gamma = \frac{-2\lambda v v_0}{c^2} \gamma \quad (3.7.16)$$

Betrachten wir am Ort der LADUNG  $q$  das von der Linienladung  $\lambda'$  hervorgerufene Feld  $E'_r$ . Für positives  $\lambda'$  zeigt dieses in die  $-z'$ -Richtung. Also ist das elektrische Feld

$$\begin{aligned} E'_r &= -\frac{\lambda'}{2\pi\epsilon_0 r} \\ &= \frac{2\lambda v_0 v \gamma(v)}{2\pi\epsilon_0 c^2} \cdot \frac{1}{r} \end{aligned} \quad (3.7.17)$$

Die Kraft im Ruhesystem  $S'$  des Teilchens ist also

$$F'_z = q \cdot E'_r = \frac{2q\lambda v_0 v \gamma(v)}{2\pi\epsilon_0 c^2} \cdot \frac{1}{r} \quad (3.7.18)$$

Wir verwenden die Lorentztransformation der Impulse  $p_i$  und der Energie  $\mathfrak{E}$

$$\begin{aligned} p'_x &= p_x \\ p'_y &= \gamma(v) \left( p_y - v \frac{\mathfrak{E}}{c^2} \right) \\ p'_z &= p_z \\ \mathfrak{E}' &= \gamma(v) (\mathfrak{E} - v \cdot p_y) \end{aligned} \quad (3.7.19)$$

Der VIERERVEKTOR  $(p_x, p_y, p_z, \frac{\mathfrak{E}}{c^2})$  transformiert sich wie der Vierervektor  $(x, y, z, ct)$ . Die Kraft transformiert sich also wie

$$F'_z = \frac{dp'_z}{dt'} = \frac{dp_z}{\sqrt{1 - \beta^2} \cdot dt} = \gamma(v) F_z \quad (3.7.20)$$

Der STROM in  $S$  ist

$$I = 2\lambda v_0 \quad (3.7.21)$$

Damit bekommen wir

$$F_z(r) = \frac{q \cdot v \cdot I}{2\pi\epsilon_0 \cdot c^2} \cdot \frac{1}{r} \quad (3.7.22)$$

Multipliziert man Gleichung (3.7.22) mit der Dichte der Ladungsträger  $n$  (Einheit  $[n] = 1/m$ ), so erhält man die zu  $I_2$  proportionale Kraft pro Länge  $\mathfrak{F}(r)$ .

$$\mathfrak{F}(r) = n \cdot F_z(r) = \frac{n \cdot q \cdot v \cdot I}{2\pi\epsilon_0 \cdot c^2} \cdot \frac{1}{r} = \frac{I_2 \cdot I}{2\pi\epsilon_0 \cdot c^2} \cdot \frac{1}{r} \quad (3.7.23)$$

Aus  $\mathfrak{F}(r)$  bekommt man die Kraft auf ein Leiterstück der Länge  $\ell$

$$F(r, I, I_2, \ell) = \ell \cdot \mathfrak{F}(r) = n \cdot \ell \cdot F_z(r) = \frac{n \cdot \ell \cdot q \cdot v \cdot I}{2\pi\epsilon_0 \cdot c^2} \cdot \frac{1}{r} = \frac{I_2 \cdot I \cdot \ell}{2\pi\epsilon_0 \cdot c^2} \cdot \frac{1}{r} \quad (3.7.24)$$

Die magnetische Kraft  $F_m$  im Laborsystem  $S$  ist die relativistisch transformierte elektrostatische Kraft auf die LADUNG  $q$  in deren Ruhesystem  $S'$ . Die magnetische Kraft kann als relativistische Effekt der elektrostatischen Kraft in einem bewegten Bezugssystem verstanden werden.

### 3.7.3. Magnetisches Feld

In der Gleichung (3.7.24) können wir die Terme so sortieren, dass ein Leiter als Ursache eines Feldes und der Rest als Wirkung dasteht, analog wie beim elektrischen Feld.

$$\begin{aligned} F(r, I, I_2, \ell) &= \frac{I_2 \cdot I \cdot \ell}{2\pi\epsilon_0 \cdot c^2} \cdot \frac{1}{r} = \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0 \cdot c^2} \right) \cdot \frac{2\ell I I_2}{r} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2\ell I I_2}{r} = \mu_0 \frac{I}{2\pi r} (\ell I_2) = \mu_0 H(r) (\ell I_2) \end{aligned} \quad (3.7.25)$$

Wir haben den Vorfaktor zur PERMEABILITÄT DES VAKUUMS zusammengefasst mit

$$\mu_0 = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \quad [\mu_0] = \text{N A}^{-2} \quad (3.7.26)$$

Der Zahlenwert der Permeabilität des Vakuums ist im SI-SYSTEM zur Definition des Ampères vorgegeben

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N A}^{-2} \quad (3.7.27)$$

Die Funktion

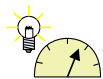
$$H(r) = \frac{I}{2\pi r} \quad [H(r)] = \text{A m}^{-1} \quad (3.7.28)$$

ist das MAGNETISCHE FELD. Es hat für den Magnetismus die gleiche Funktion wie das ELEKTRISCHE FELD.

## 3.8. Eigenschaften des magnetischen Feldes

### 3.8.1. Eigenschaften der magnetischen Induktion $B$

(Siehe Leisi, Klassische Physik II [Lei98, pp. 98])



#### Versuch 31: Versuch zur Vorlesung:

Fadenstrahlrohr (Versuchskarte EM-11, Video)

Um nicht immer die LORENTZ-TRANSFORMATION ausrechnen zu müssen, führen wir die MAGNETISCHE INDUKTION, auch die MAGNETISCHE FLUSSDICHTHE oder  $B$  ein. Ein magnetisches Feld lenkt Elektronen ab. Wie wir schon früher gesehen haben, ist eine Bewegung der Ladungsträger für die magnetische Kraft notwendig. Wird das Magnetfeld der HELMHOLTZSPULEN so gedreht, dass es parallel zur Bewegungsrichtung der ELEKTRONEN liegt, verschwindet die Magnetkraft. Das folgende Kraftgesetz

$$\mathbf{F}_L = q \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (3.8.1)$$

beschreibt die magnetischen Kräfte auf Elektronen. Die Kraft  $\mathbf{F}_L$  heisst LORENTZ-KRAFT.

Durch den Vergleich von Gleichung (3.8.1) und Gleichung (3.7.22) kann man für die magnetische Induktion oder magnetische Flussdichte einer linienförmigen Stromverteilung schreiben

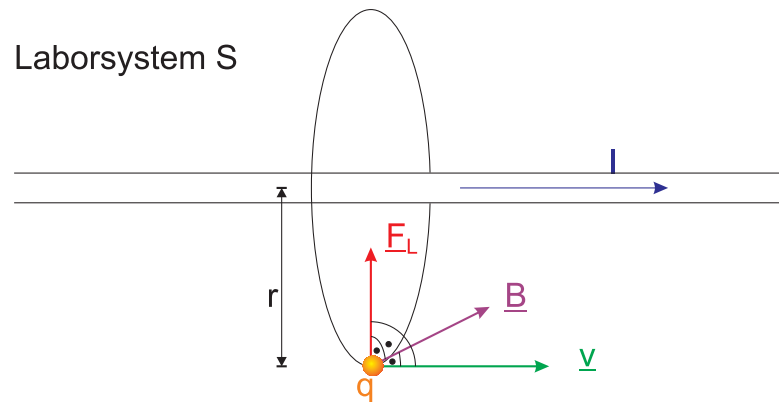
$$B(r) = \frac{I}{2\pi\epsilon_0 c^2} \cdot \frac{1}{r} \quad (3.8.2)$$

Die INDUKTIONSKONSTANTE

$$\mu_0 = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \quad (3.8.3)$$

ermöglicht es Gleichung (3.8.2) kompakter zu schreiben

$$B(r) = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I}{r} \quad (3.8.4)$$



**Abb. 3.28.:** Lage der magnetischen Induktion zum STROM und zur Geschwindigkeit der LADUNG.

Die magnetische Induktion  $\underline{B}$  bildet eine Rechtsschraube um den STROM  $I$  (Daumen in Stromrichtung, Finger zeigen in die Richtung der magnetischen Induktion).



### Versuch 32: Versuch zur Vorlesung:

Magnetische Feldlinien (Versuchskarte EM-50, Video)



### Versuch 33: Versuch zur Vorlesung:

Magnetische Feldlinien (Versuchskarte EM-50, Video (VPN oder intern))

Die magnetische Induktion eines geraden, unendlich ausgedehnten Stromes bildet Feldlinien, die kreisförmig in einer Ebene senkrecht zum STROM liegen. Der Mittelpunkt der kreisförmigen Feldlinien ist der Strom.

Die Kraft zwischen zwei stromdurchflossenen Leitern kann neu berechnet werden. Mit

$$\underline{F}_L = q_2 \cdot \underline{v}_2 \times \underline{B}_1(r) \quad (3.8.5)$$

wobei  $q_2$  eine LADUNG im Leiter 2 ist, und mit  $n_2$  der Ladungsträgerdichte im Leiter 2,  $\ell$  die betrachtete Länge,  $A_2$  der Querschnitt des Leiters und  $\langle v_2 \rangle = |\underline{v}_2|$ , bekommt man

$$F_M = q_2 \cdot \langle v_2 \rangle \cdot B_1(r) \cdot n_2 \cdot \ell \cdot A_2 \quad (3.8.6)$$

Der STROM im Leiter 2 ist nun aber

$$I_2 = \langle v_2 \rangle \cdot q_2 \cdot n_2 \cdot A_2 \quad (3.8.7)$$

Damit ist

$$F_M = I_2 \cdot B_1(r) \cdot \ell \quad (3.8.8)$$

Wenn wir Gleichung (3.8.4) einsetzen, bekommen wir

$$F_M = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\ell \cdot I_1 \cdot I_2}{r} \quad (3.8.9)$$

Diese Gleichung wird zur Definition der Einheit der magnetischen Induktion im SI-SYSTEM verwendet.

$$\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} \text{ N A}^{-2} \quad (3.8.10)$$

Die Einheit der magnetischen Induktion ist

$$[B] = \text{Tesla} = \text{T} = \text{N s C}^{-1} \text{ m}^{-1} = \text{N A}^{-1} \text{ m}^{-1} = \text{V s m}^{-2} \quad (3.8.11)$$

Manchmal wird die MAGNETISCHE INDUKTION auch als MAGNETISCHE FLUSS-DICHTE bezeichnet.

Die magnetische Induktion wurde so definiert, dass in Gleichung (3.8.9) alle Faktoren bis auf den STROM  $I_2$  und die Länge  $\ell$  durch  $B(r)$  symbolisiert werden. Diese Wahl ist willkürlich. Wir hätten genau so gut ein Feld durch

$$H(r) = \frac{I}{2\pi r} \quad (3.8.12)$$

definieren können. **H** heisst MAGNETISCHES FELD oder MAGNETISCHE FELD-STÄRKE. Das magnetische Feld hat die Einheit

$$[H] = \text{A m}^{-1}$$

Das magnetische Feld  $H$  ist unabhängig von der Materie die den betrachteten Raum erfüllt. Die magnetische Induktion  $B$  hängt vom den Raum füllenden Material ab.

elektrisches Feld  $E \Leftrightarrow$  dielektrische Verschiebung  $D = \varepsilon\varepsilon_0 E$   
magnetisches Feld  $H \Leftrightarrow$  magnetische Induktion  $B = \mu\mu_0 H$

- Die gesamte Kraft einer bewegten LADUNG  $q$  in einer beliebigen Ladungs- und Stromverteilung ist

$$\mathbf{F} = q \cdot \mathbf{E} + q \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (3.8.13)$$

Dies ist das KRAFTGESETZ DER ELEKTRODYNAMIK

- Das magnetische Feld ist kein fundamentales Feld, sondern eine relativistische Korrektur zu dem elektrostatischen Feld.

### 3.8.2. Das Biot-Savart-Gesetz

Die Kraft auf einen stromdurchflossenen Leiter in einem beliebigen Magnetfeld kann mit dem empirisch gefundenen GESETZ VON BIOT-SAVART berechnet werden.

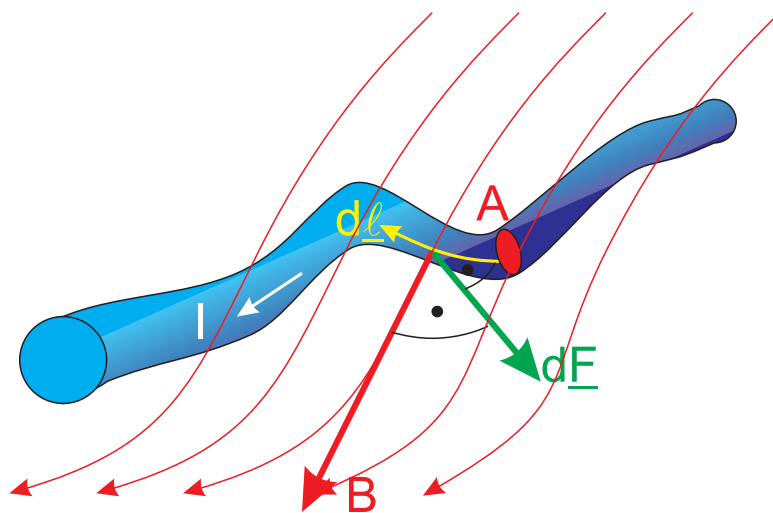


Abb. 3.29.: Berechnung der Kraft auf ein Leiterelement.

Der Betrag des Vektors  $d\mathbf{F}$ , der senkrecht auf  $d\mathbf{\ell}$  und senkrecht auf  $d\mathbf{B}$  steht, ist

$$dF = q \cdot \langle v \rangle \cdot \sin \phi \cdot B \cdot n \cdot d\ell \cdot A \quad (3.8.14)$$

wobei  $n$  die Dichte der Ladungsträger und  $\phi$  der Winkel zwischen  $\mathbf{B}$  und  $d\mathbf{\ell}$  ist. Mit der Stromdichte  $\mathbf{i} = n \cdot \langle \mathbf{v} \rangle \cdot q$  erhalten wir

$$dF = i \cdot A \cdot d\ell \cdot \sin \phi \cdot B = I \cdot d\ell \cdot \sin \phi \cdot B \quad (3.8.15)$$

Die vektorielle Schreibweise der BIOT-SAVART-KRAFT ist demnach

$$d\mathbf{F} = I \cdot d\mathbf{\ell} \times \mathbf{B} \quad (3.8.16)$$

Das GESETZ VON BIOT-SAVART ist nur in seiner integralen Form nach Gleichung (3.8.54) physikalisch sinnvoll anwendbar.

### 3.8.2.1. Kraft auf eine beliebig geformte geschlossene Leiterschleife in einem homogenen Magnetfeld

1. Die Kraft für eine beliebig geformte geschlossene Leiterschleife  $s$  in einem homogenen Magnetfeld ist

$$\mathbf{F} = \oint_s d\mathbf{F} = \oint_s I \cdot d\mathbf{\ell} \times \mathbf{B} = I \cdot \left( \oint_s d\mathbf{\ell} \times \mathbf{B} \right) \quad (3.8.17)$$

Das Linienintegral im homogenen  $\mathbf{B}$ -Feld kann wie folgt berechnet werden:

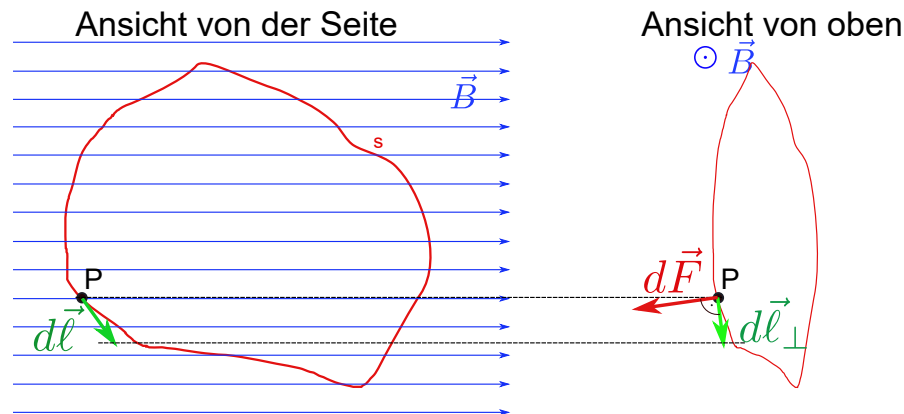


Abb. 3.30.: Kräfte auf eine Leiterschleife im homogenen  $\mathbf{B}$ -Feld

Vom Linienelement  $d\ell$  aus Gleichung (3.8.17) trägt nur die Komponente  $d\ell_{\perp}$  senkrecht zu  $\mathbf{B}$  zum Integral bei (wegen dem Kreuzprodukt in der Gleichung). Abbildung 3.30 zeigt auf der rechten Seite die Leiterschleife projiziert auf die Ebene senkrecht zu  $\mathbf{B}$ .

Also kann Gleichung (3.8.17) umgeschrieben werden:

$$\mathbf{F} = \oint_s d\mathbf{F} = I \oint_s d\ell_{\perp} \times \mathbf{B} \quad (3.8.18)$$

$d\ell_{\perp}$  über  $s$  summiert oder integriert ergibt null, da damit eine geschlossene Kurve beschrieben wird, bei der anfangs- und Endpunkt übereinstimmen, also durch einen Vektor der Länge Null verbunden sind.

$d\mathbf{F}$  steht immer senkrecht auf  $d\ell_{\perp}$  (wieder wegen dem Kreuzprodukt). Die Länge von  $d\mathbf{F}$  ist um den konstanten Faktor  $I \cdot |\mathbf{B}|$  gegenüber  $d\ell_{\perp}$  geändert. Damit beschreibt  $d\mathbf{F}$  einen geometrisch ähnlichen geschlossenen Weg, um  $\pi/2$  gedreht und gedehnt. Damit ist für eine geschlossene Leiterschleife im homogenen magnetischen Feld

$$\mathbf{F} = \oint_s d\mathbf{F} = 0. \quad (3.8.19)$$

2. Das Drehmoment auf eine Leiterschleife in einem homogenen Magnetfeld kann durch summieren der Kraftanteile auf die vier Segmente berechnet werden.

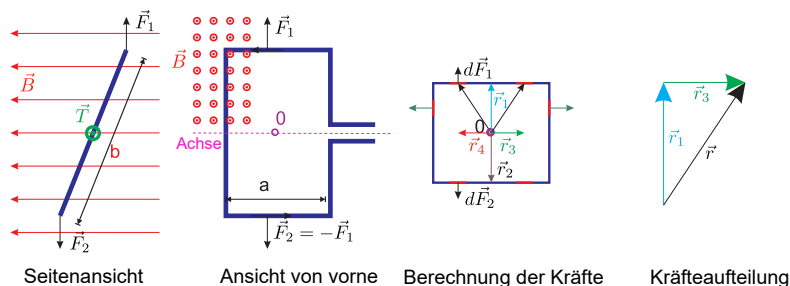


Link zur Vorlesung: [\(Elektromotor\)](#)




**Versuch 34: Versuch zur Vorlesung:**

Lorentz-Kraft, Leiterschaukel (Versuchskarte EM-046, Video (VPN oder intern))



**Abb. 3.31.:** Drehmoment auf eine Leiterschleife im homogenen Magnetfeld

Wir betrachten dazu die rechteckige Leiterschleife aus Abbildung 3.31. Bezüglich 0 ist die Situation symmetrisch. Die in der Zeichnung vertikalen Leiterelemente liefern kollineare sich aufhebende Kräfte. Die horizontalen Segmente ergeben das infinitesimale Drehmoment

$$\begin{aligned}
 d\mathbf{T} &= (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_3) \times d\mathbf{F}_1 + (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_4) \times d\mathbf{F}_1 \\
 &\quad + (\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3) \times d\mathbf{F}_2 + (\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_4) \times d\mathbf{F}_2 \\
 &= 2 \cdot \mathbf{r}_1 \times d\mathbf{F}_1 + 2 \cdot \mathbf{r}_2 \times d\mathbf{F}_2
 \end{aligned} \tag{3.8.20}$$

In Gleichung (3.8.20) enthält das Differential die Beiträge der oberen linken Seite plus die Beiträge der oberen rechten Seite plus die Beiträge der unteren linken Seite plus die Beiträge der unteren rechten Seite. Das gesamte DREHMOMENT bekommt man, indem man über die halbe Seite  $a$  integriert.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T} &= \int_0^{a/2} d\mathbf{T} = \int_0^{a/2} (2 \cdot \mathbf{r}_1 \times d\mathbf{F}_1 + 2 \cdot \mathbf{r}_2 \times d\mathbf{F}_2) \\
 &= \int_0^{a/2} 2 \cdot \mathbf{r}_1 \times \frac{d\mathbf{F}_1}{ds} ds + \int_0^{a/2} 2 \cdot \mathbf{r}_2 \times \frac{d\mathbf{F}_2}{ds} ds
 \end{aligned} \tag{3.8.21}$$

Wenn  $\mathbf{F}_1$  die Kraft auf die ganze obere Seite ist (und  $\mathbf{F}_2$  entsprechend für die untere Seite), ist

$$\int_0^{a/2} 2 \cdot \mathbf{r}_1 \times \frac{d\mathbf{F}_1}{ds} ds = 2 \cdot \mathbf{r}_1 \times \int_0^{a/2} \frac{d\mathbf{F}_1}{ds} ds = 2 \cdot \mathbf{r}_1 \times \frac{\mathbf{F}_1}{2} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 \quad (3.8.22)$$

Damit ist

$$\mathbf{T} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 = 2 \cdot \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 \quad (3.8.23)$$

Das Drehmoment  $\mathbf{T}$  liegt in der Ebene der Leiterschleife. Wenn  $\phi$  der Winkel zwischen der Normalen auf die Ebene der Leiterschleife und  $\mathbf{B}$  ist, gilt mit  $F_1 = a \cdot I \cdot B$ :

$$T = 2 \frac{b}{2} \sin \phi \cdot F_1 = a \cdot b \cdot I \cdot \sin \phi \cdot B \quad (3.8.24)$$

Wir definieren das MAGNETISCHE MOMENT  $\mathbf{m}$  so, dass es senkrecht auf die Ebene der Leiterschleife steht und dass  $|\mathbf{m}| = \text{Fläche} \cdot \text{Strom} = a \cdot b \cdot I$  ist. Damit ist

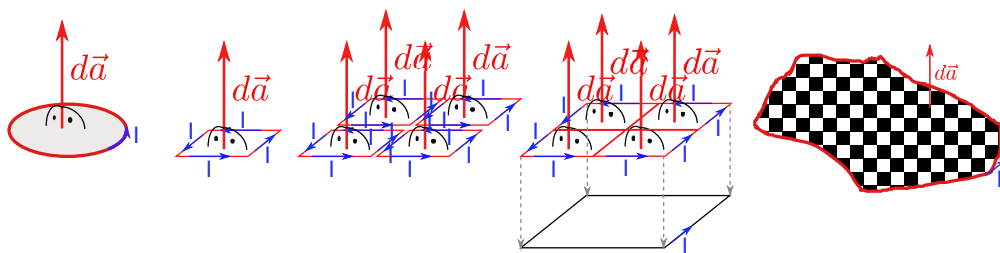
$$\mathbf{T} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} \quad (3.8.25)$$

Die Einheit des magnetischen Momentes ist

$$[\mathbf{m}] = \text{A m}^2$$

Das Drehmoment auf eine Leiterschleife im homogenen Magnetfeld wird in DREHSPULINSTRUMENTEN, in MOTOREN oder bei der Sichtbarmachung von Magnetfeldern mit Eisenfeilspänen verwendet.

Bei einer beliebigen Leiterschleife kann das magnetische Moment berechnet werden, indem diese aus Einzelteilen zusammengesetzt wird.



**Abb. 3.32.:** Links ist ein infinitesimales magnetisches Moment aufgezeichnet. Rechts daneben ein quadratisches infinitesimales Moment. Da alle vom gleichen STROM  $I$  umrundet werden, und im gleichen Drehsinn, kann eine endliche Fläche aus den infinitesimalen Flächen zusammengesetzt werden. Daraus folgt die Vorschrift zur Berechnung von  $\mathbf{m}$ .

Die Ströme im Inneren heben sich dabei jeweils auf (Siehe auch Abbildung 3.32). Aus der differentiellen Gleichung

$$d\mathbf{m} = I d\mathbf{a} \quad (3.8.26)$$

erhält man deshalb

$$\mathbf{m} = \iint_{A(s)} I d\mathbf{a} = I \iint_{A(s)} d\mathbf{a} \quad (3.8.27)$$

3. Die potentielle Energie  $E_{pot}$  einer um den Winkel  $\phi$  gegenüber dem Magnetfeld verdrehten stromdurchflossenen Leiterschleife wird berechnet, indem man von  $\phi = 0$  ausgeht und die Schleife langsam zum Winkel  $\phi$  dreht. Die Arbeit, um von  $\phi'$  nach  $\phi' + d\phi'$  zu drehen ist

$$dE_{pot} = 2 \cdot F_1 \sin \phi' \cdot \frac{b}{2} \cdot d\phi' = a \cdot b \cdot I \cdot B \cdot \sin \phi' \cdot d\phi' \quad (3.8.28)$$

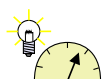
Damit erhalten wir

$$E_{pot}(\phi) = a \cdot b \cdot I \cdot B \cdot \int_0^\phi \sin \phi' \cdot d\phi' = -a \cdot b \cdot I \cdot B \cdot (\cos \phi - 1) \quad (3.8.29)$$

Wenn wir  $E_{pot}(\phi = \pi/2) = 0$  wählen haben wir

$$E_{pot} = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B} \quad (3.8.30)$$

Ein weiteres Beispiel einer Kraftwirkung auf LADUNGEN ist das BARLOWSCHE RAD.



### Versuch 35: Versuch zur Vorlesung:

Barlowsches Rad ([Versuchskarte EM-004](#), [Video](#))



### Versuch 36: Versuch zur Vorlesung:

Barlowsches Rad ([Versuchskarte EM-004](#), [Video \(VPN oder intern\)](#))

## 3.8.3. Das Ampèresche Durchflutungsgesetz

(Siehe Leisi, Klassische Physik II [[Lei98](#), pp. 104])

Beim unendlich ausgedehnten geraden Leiter war das durch einen STROM  $I$  erzeugte Magnetfeld durch kreisförmige Magnetfeldlinien mit der Stärke  $B = \frac{\mu_0}{2\pi r} I$

charakterisiert, wobei das  $\mathbf{B}$ -Feld tangential zu den Kreisen liegt. Das Linienintegral entlang der Feldlinien, also entlang des Kreises  $S$ , ergibt

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint_S \frac{r}{r} d\phi = \mu_0 I \quad (3.8.31)$$

Dieses Linienintegral ist unabhängig von  $r$ . Die Behauptung ist, dass die obige Gleichung, ein einfacher Fall des Ampèreschen Durchflutungsgesetzes, allgemeingültig ist.

### Ampèresches Durchflutungsgesetz

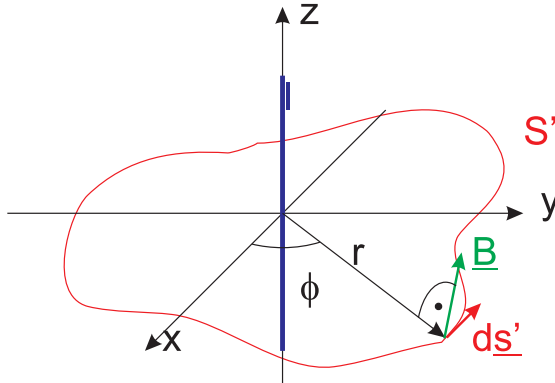
$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \iint_{A(s)} \mathbf{i} \cdot d\mathbf{a} \quad (3.8.32)$$

Die Grösse

$$\mathbf{m} = \iint_{A(s)} \mathbf{i} \cdot d\mathbf{a} \quad (3.8.33)$$

ist das allgemeine MAGNETISCHE MOMENT der Stromverteilung  $\mathbf{i}$  im Gebiet  $A(s)$ . Der Beweis des Ampèreschen Durchflutungsgesetzes geht in mehreren Schritten:

#### Eine beliebige Kurve $s'$ um einen geraden Leiter



$ds'$  ist die Projektion des Weglängenelementes  $d\mathbf{s}$  auf der Kurve  $s$  auf die in der  $xy$ -Ebene liegende Projektion der Kurve  $s'$ . Weiter ist  $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}' = B \cos(\alpha) ds'$  mit  $\alpha$  dem Winkel zwischen  $\mathbf{B}$  und  $d\mathbf{s}'$ . Es ist

$$\mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}' = B(r) \cdot \cos \alpha ds' = B(r) \cdot r \cdot d\phi$$

da  $\mathbf{B}(r)$  keine Komponente in die  $z$ -Richtung hat. Es ist

$$\mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \frac{\mu_0}{2\pi} I \cdot d\phi$$

und damit

$$\oint_{s'} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi = \mu_0 I$$

**Eine beliebige Kurve  $s''$ , die den Leiter nicht umschliesst** Es ist

$$\begin{aligned}\oint_{s''} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} &= \int_A^B \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} + \int_B^A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_A^B d\phi + \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_B^A d\phi \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} (\phi_B - \phi_A) + \frac{\mu_0 I}{2\pi} (\phi_A - \phi_B) = 0\end{aligned}$$

Das bedeutet, dass Ströme durch Leiter, die nicht vom Integrationsweg  $s''$  umschlossen werden, keinen Beitrag zum Integral geben.

**Eine beliebige Kurve  $s$  um eine beliebige Stromverteilung** Wir betrachten viele Ströme  $I_k$ , die von der Integrationskurve  $s$  umschlossen werden. Wegen der Linearität des Problems gilt

$$\oint_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \sum_k I_k$$

wobei diejenigen Ströme, die mit dem Umlaufsinn von  $s$  eine Rechtsschraube bilden, positiv zu zählen sind.

**Eine kontinuierliche Stromverteilung** Hier wird die Summe durch ein Integral ersetzt:

$$\oint_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \iint_{A(s)} \mathbf{i} \cdot d\mathbf{a}$$

### 3.8.3.1. Zylindrischer Leiter mit homogenem Strom

Ein zylindrischer Leiter mit dem Radius  $R$  soll homogen vom STROM  $I$  durchflossen werden. Die Stromdichte  $\mathbf{i}$  und der STROM  $I$  stehen dann betragsmässig wie

$$I = i (\pi R^2) \quad \text{beziehungsweise} \quad I(r) = i (\pi r^2) \quad \text{für } r \leq R$$

in Beziehung. Aus Symmetriegründen sind die Magnetfeldlinien konzentrische Kreise um den Leiter. Wir betrachten einen zum STROM konzentrischen Integrationsweg  $s$ . Ausserhalb des Leiters ( $r > R$ ) haben wir

$$\oint_s \mathbf{B}(r) \cdot d\mathbf{s} = 2\pi r \cdot B(r) = \mu_0 \iint_{A(s)} \mathbf{i} \cdot d\mathbf{a} = \mu_0 \iint_{\pi R^2(\text{Querschnitt})} \mathbf{i} \cdot d\mathbf{a} = \mu_0 \cdot I$$

und daraus

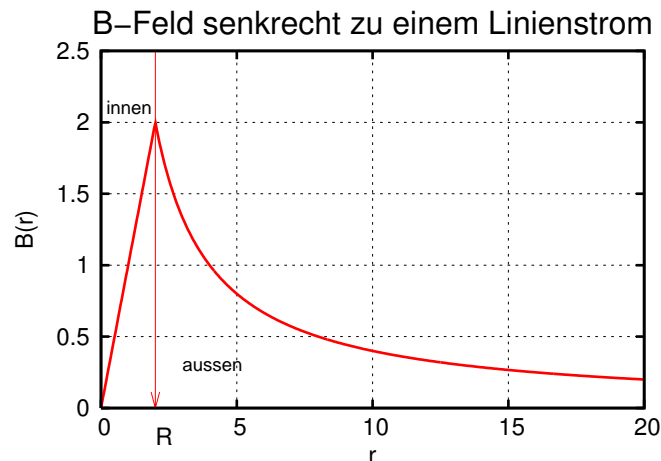
$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Innerhalb des Leiters ( $r \leq R$ ) gilt

$$\oint_s \mathbf{B}(r) \cdot d\mathbf{s} = 2\pi r \cdot B(r) = \mu_0 \iint_{A(s)} \mathbf{i} \cdot d\mathbf{a} = \mu_0 \cdot i \cdot \pi r^2 = \mu_0 \cdot \frac{I}{\pi R^2} \cdot \pi r^2 = \mu_0 I \frac{r^2}{R^2}$$

und damit

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{r}{R^2}$$



**Abb. 3.33.:** Tangentiales Magnetfeld eines ausgedehnten, unendlich langen Liniestromes.

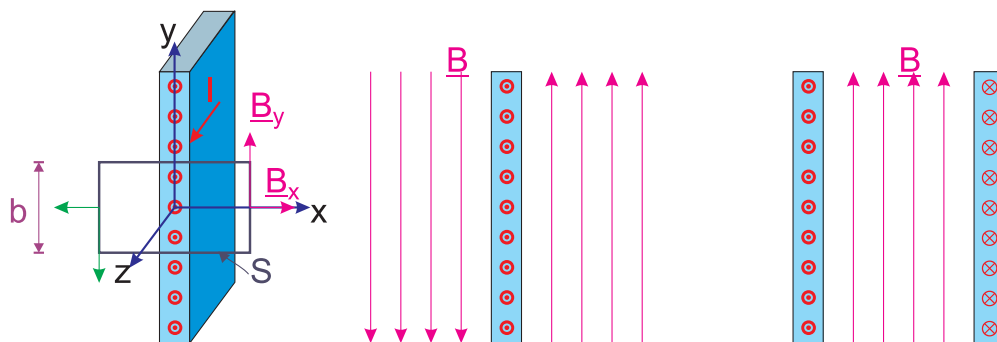
Mit dem Stokeschen Satz (Gleichung (C.11.1)) kann man die Integralform des Ampèreschen Gesetzes umschreiben

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \iint_{A(S)} \mathbf{rot} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \mu_0 \iint_{A(S)} \mathbf{i} \cdot d\mathbf{a} \quad (3.8.34)$$

Da diese Gleichungen für alle Integrationsflächen  $A(S)$  gelten müssen, muss auch die differentielle Form des Ampèreschen Gesetzes gelten

$$\mathbf{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{i} \quad (3.8.35)$$

**Beispiel:** homogene Stromverteilung in einem unendlich ausgedehnten Leiter



**Abb. 3.34.:** Magnetfeld einer homogenen Stromverteilung in einer dünnen Platte. Links: die Geometrie zur Berechnung, Mitte: das Magnetfeld eines homogenen Stromflusses und Rechts: das Magnetfeld zweier antiparallel von STROM durchflossener Platten.

Wir definieren eine **lineare Stromdichte**

$$j = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{I(\Delta y)}{\Delta y}$$

( $[j] = \text{A m}^{-1}$ ). In unserem Falle hängt  $\mathbf{j}$  und  $\mathbf{i}$  über

$$\mathbf{i}(x, y, z) = \mathbf{j}(y, z)\delta(x)$$

zusammen. Das Stromfeld können wir uns als Parallelschaltung vieler linearer Leiter vorstellen. Aus dem Superpositionsprinzip folgt, dass in der  $z$ -Richtung

$$B_z \equiv 0 \quad (3.8.36)$$

Das resultierende Feld dieser Superposition muss in der  $xy$ -Ebene liegen. Auf den beiden Seiten senkrecht zur Platte finden sich immer zwei Stromfäden, die die  $x$ -Komponente kompensieren. Wenn wir später das Ampèresche Gesetz auf diese beiden Seiten anwenden, gibt es keine Komponente von  $\mathbf{B}$  parallel zur Seite: dieser Teil des Linienintegrals ist null.

Wir betrachten weiter die Komponenten  $B_x(x)$  und  $B_y(x)$  des Feldes  $\mathbf{B}$  im Abstand  $x$  von der Platte. Wir werden zwei Symmetrieoperationen an:

- Wir drehen die Platte um  $\pi$  um die  $z$ -Achse. Die neue Situation (Ströme) ist identisch mit der Ursprungssituation. Deshalb muss

$$\mathbf{B}(x) = -\mathbf{B}(-x)$$

und damit

$$B_x(x) = -B_x(-x) \text{ und } B_y(x) = -B_y(-x)$$

sein.

- Wir drehen die Platte um  $\pi$  um die  $y$ -Achse und drehen gleichzeitig die

Flussrichtung des Stromes um  $\mathbf{j} \rightarrow -\mathbf{j}$ . Die Situation am Ende ist ununterscheidbar von der am Anfang. Also gilt auch

$$B_x(-x) = B_x(x) \text{ und } B_y(-x) = -B_y(x)$$

Mit den beiden Symmetrieüberlegungen folgt:

$$B_x(x) \equiv 0 \quad (3.8.37)$$

Um  $B_y$  zu bestimmen, nehmen wir an, dass unser Integrationspfad  $S$  symmetrisch bezüglich der Platte ist. Das Ampèresche Gesetz sagt

$$\oint_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 2B_y(x) \cdot b + 2 \cdot 0 = \mu_0 \iint_{A(s)} \mathbf{i} \cdot d\mathbf{a} = \mu_0 \int j dy = \mu_0 \cdot j \cdot b$$

Das Resultat ist unabhängig von  $x$  und homogen im Raum. Die Magnetfeldlinien sind parallel zur Platte und links und rechts antiparallel (siehe Abbildung 3.34, Mitte).

$$B_y = \frac{\mu_0}{2} j \quad (3.8.38)$$

Bei zwei antiparallel von STROM durchflossenen Platten ist das Magnetfeld auf den Raum zwischen den Platten beschränkt.

$$B = \mu_0 j \quad (3.8.39)$$

Die beiden Gleichungen sind einheitenmässig korrekt, da  $[j] = \left[\frac{I}{r}\right] = \text{A m}^{-1}$  ist.

**Anwendungsbeispiele:** Streifenleiter, Koaxialkabel, Modell für eine Spule

### 3.8.4. Quellenfreiheit

(Siehe Leisi, Klassische Physik II [Lei98, pp. 111])

In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, dass das Magnetfeld QUELLENFREI ist.



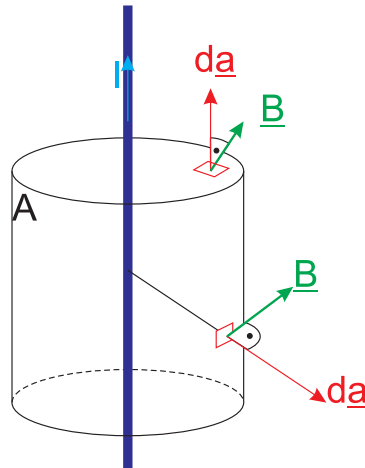


Abb. 3.35.: Integrationsfläche zur Analyse der Quellenfreiheit des Magnetfeldes

Da überall auf der Integrationsfläche  $A$  gilt:  $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = 0$ , ist

$$\iint_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = 0 \quad (3.8.40)$$

Wir verallgemeinern das Resultat, indem wir einen Zylinder mit beliebiger Grund- und Deckfläche nehmen. Auf der Grund und Deckfläche gilt das vorherige Argument, so dass

$$\iint_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \iint_{\text{Mantel}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$$

ist.

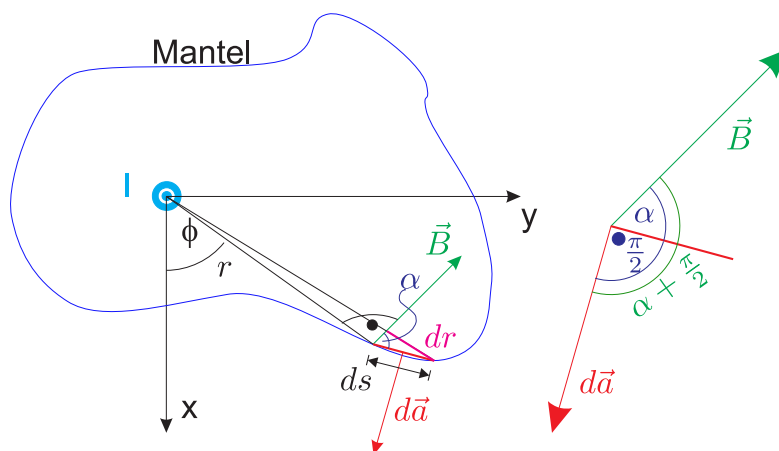


Abb. 3.36.: Integration über die Mantelfläche.

An der Mantelfläche gilt mit  $da = h \cdot ds$  (Höhe des Segmentes  $h$ )

$$\begin{aligned}\mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} &= B(r) \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) h \cdot ds = -B(r) \sin(\alpha) h \cdot ds \\ &= -B(r) \cdot dr \cdot h = -B(r) \cdot \frac{dr}{d\phi} d\phi \cdot h = -B(r) \cdot r'(\phi) \cdot d\phi \cdot h\end{aligned}$$

und damit

$$\iint_{\text{Mantel}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = -\frac{\mu_0 I h}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r'(\phi)}{r(\phi)} d\phi = -\frac{\mu_0 I h}{2\pi} \ln(r(\phi)) \Big|_0^{2\pi} = 0$$

Damit gilt auch für allgemeine Zylinderflächen

$$\iint_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = 0 \quad (3.8.41)$$

Mit diesem Resultat zeigt man, dass dieses Integral für beliebige Flächen um einen Leiter null ist. Schliesslich zeigt man, dass das Resultat auch für beliebige Stromverteilungen gilt. Mit dem Gaußschen Satz (Gleichung (C.9.1)) zeigt man

### Quellenfreiheit des Magnetfeldes

$$0 = \iint_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \iiint_{V(A)} \operatorname{div} \mathbf{B} dV \quad (3.8.42)$$

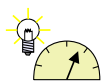
oder in differentieller Form

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (3.8.43)$$

Die Quellenfreiheit des statischen magnetischen Feldes bedeutet, dass **es keine MAGNETISCHEN LADUNGEN gibt und dass die Feldlinien geschlossen sind**. Feldlinien die ins Unendliche reichen müssen im gegenüberliegenden Oktanten zurückkehren und sind so auch geschlossen.

### 3.8.5. Das $\mathbf{B}$ -Feld einer beliebigen Stromverteilung: das Vektorpotential $\mathbf{A}$

Die Ausführungen hier folgen H. J. Leisi, *Klassische Physik* [Lei98, p. 114]. Für eine detailliertere Behandlung kann L. D. Landau und E. M. Lifschitz, *Klassische Feldtheorie*, [LL89, p. 121], J. D. Jackson, *Classical electrodynamics*, [Jac75] oder B. Thidé, *Electromagnetic Field Theory*, [Thi11, p. 35] gelesen werden.



#### Versuch 37: Versuch zur Vorlesung:

Magnetfelder von Leitern (Versuchskarte EM-050, Video)



### Versuch 38: Versuch zur Vorlesung:

Magnetfelder von Leitern (Versuchskarte EM-050, Video (VPN oder intern))

In diesem Abschnitt wollen wir die Frage lösen: wie konstruiere ich eine magnetische Induktion  $\mathbf{B}$  möglichst bequem? Das Rezept stammt aus der Elektrizitätslehre (Siehe Abschnitt 2.5). Dort wurde gezeigt, dass aus einem beliebigen Potential  $U(\mathbf{r})$  durch

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\text{grad } U(\mathbf{r})$$

eindeutig ein elektrisches Feld  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  konstruiert werden kann, das dem Gesetz der Elektrostatik

$$\text{rot } \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0$$

genügt. Grundlage war die Vektoridentität

$$\text{rot } (\text{grad } \mathfrak{U}(\mathbf{r})) \equiv 0$$

die für beliebige zahlenwertige Funktionen  $\mathfrak{U}(\mathbf{r})$  gilt (siehe Gleichung (C.8.29)). Es gibt unter den Rechenregeln für Vektorableitungen (siehe Abschnitt C.8.4) eine weitere Identität mit dem Nullvektor, nämlich Gleichung (C.8.30).

$$\text{div } (\text{rot } \mathfrak{F}(\mathbf{r})) = 0 \quad \forall \mathfrak{F}(\mathbf{r})$$

für Vektorfunktionen  $\mathfrak{F}(\mathbf{r})$ . Jedes Magnetfeld muss das AMPÈRESCHES GESETZ  $\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{i}$  und die Quellenfreiheit  $\text{div } \mathbf{B} = 0$  erfüllen. Analog zur Poisson-Gleichung Gleichung (2.6.4) soll auch für das Magnetfeld eine Potentialgleichung gelten. Wir müssen also nach Gleichung (C.8.30) ein beliebiges Vektorfeld  $\mathbf{A}$  wählen und die magnetische Induktion  $\mathbf{B}$  gleich der Rotation von  $\mathbf{A}$  setzen: dann ist die Divergenzfreiheit von  $\mathbf{B}$  gewährleistet. Mit dem VEKTORPOTENTIAL  $\mathbf{A}$

$$\mathbf{B}(x, y, z) = \text{rot } \mathbf{A}(x, y, z) \quad (3.8.44)$$

werden beide Gleichungen erfüllt. Wegen der Vektoridentität

$$\text{div } (\text{rot } \mathbf{A}) = 0 \quad (3.8.45)$$

ist die Quellenfreiheit bei beliebiger Wahl von  $\mathbf{A}$  garantiert. Mit der zweiten Vektoridentität  $\text{rot } (\text{rot } \mathbf{A}) = \text{grad } (\text{div } \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A}$  bekommen wir aus dem Ampèreschen Gesetz

$$\Delta \mathbf{A} - \text{grad } (\text{div } \mathbf{A}) = -\mu_0 \mathbf{i} \quad (3.8.46)$$

Die Einheit des Vektorpotentials ist

$$[\mathbf{A}] = \text{V s m}^{-1} = \text{N A}^{-1}$$

Das VEKTORPOTENTIAL  $\mathbf{A}$  kann immer so gewählt werden, dass  $\text{div } \mathbf{A} = 0$  gilt.

Das VEKTORPOTENTIAL ist nicht eindeutig bestimmt. Nehmen wir an, dass ein VEKTORPOTENTIAL mit  $\text{div } \mathbf{A} = f \neq 0$  existiert. Dann existiert auch ein VEKTORFELD

$$\mathbf{V} = \text{grad } \phi \quad (3.8.47a)$$

mit

$$\text{div } \mathbf{V} = f \quad (3.8.47b)$$

$$\text{rot } \mathbf{V} = 0 \quad (3.8.47c)$$

mit einer eindeutigen Lösung, denn die obigen Gleichungen sind formal äquivalent zur ELEKTROSTATIK. Wir definieren ein neues VEKTORPOTENTIAL

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} - \mathbf{V}$$

Wegen Gleichung (3.8.47c) gilt dann

$$\text{rot } \mathbf{A}' = \text{rot } \mathbf{A} - \text{rot } \mathbf{V} = \text{rot } \mathbf{A}$$

Dies bedeutet, dass das neue VEKTORPOTENTIAL das gleiche  $\mathbf{B}$ -Feld erzeugt wie das ursprüngliche. Die Physik beschrieben durch  $\mathbf{A}$  und durch  $\mathbf{A}'$  ist ununterscheidbar. Das bedeutet, wir haben eine Freiheit,  $\mathbf{A}$  zu verändern, so dass Rechnungen effizienter werden, aber ohne dass sich das Physikproblem ändert. Wegen Gleichung (3.8.47c) gilt auch

$$\text{div } \mathbf{A}' = \text{div } \mathbf{A} - \text{div } \mathbf{V} = f - f = 0$$

Zu jedem VEKTORPOTENTIAL  $\mathbf{A}$  kann ein VEKTORPOTENTIAL  $\mathbf{A}'$  gefunden werden, so dass  $\text{div } \mathbf{A}' = 0$  ist.

Diese Eichung heisst COULOMBEICHUNG.

Das zu einer realen physikalischen Situation gehörende VEKTORPOTENTIAL  $\mathbf{A}$  ist nicht eindeutig bestimmt. Die Wahl eines der zur gleichen Lösung von  $\mathbf{B}$  gehörenden Potentiale nennt man EICHUNG.

In der RELATIVITÄTSTHEORIE und in der QUANTENMECHANIK rechnet man bevorzugt mit dem VEKTORPOTENTIAL.

Da  $\text{div } \mathbf{A} = f$  eine beliebige zahlenwertige Funktion sein kann, kann diese zum Beispiel auch die zeitliche Ableitung des elektrischen Potentials sein, also auch

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (3.8.48)$$

sein. Diese LORENTZEICHUNG ist relativistisch invariant und wird deshalb gerne in der RELATIVITÄTSTHEORIE und der QUANTENFELDTHEORIE verwendet.

Aus der Gleichung (3.8.46) für das VEKTORPOTENTIAL einer Stromverteilung in der COULOMBEICHUNG (Gleichung (3.8.47c))

$$\Delta \mathbf{A}(x, y, z) = -\mu_0 \mathbf{i}(x, y, z) \quad (3.8.49)$$

kann man die Umkehrfunktion berechnen und erhält, analog zur Elektrostatik,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (3.8.50)$$

Aus der Beziehung  $\operatorname{rot} \mathbf{A} = \mathbf{B}$  (Siehe Landau und Lifschitz, Klassische Feldtheorie [LL89, pp. 121]) bekommen wir

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \operatorname{rot} \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' = \frac{\mu_0}{4\pi} \operatorname{rot} \iiint \frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (3.8.51)$$

Nun bezieht sich die Rotation nur auf  $\mathbf{r}$ , nicht aber auf  $\mathbf{r}'$ . Deshalb kann sie unter das Integral gezogen werden.

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \left( \operatorname{rot} \frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dV' \quad (3.8.52)$$

Nun gilt für die Rotation eines Produktes (Siehe Bronstein, Taschenbuch der Mathematik [Bro+08, pp. 468])

$$\operatorname{rot} (f \mathbf{F}) = f \operatorname{rot} \mathbf{F} + (\operatorname{grad} f) \times \mathbf{F}$$

Dabei ist  $f = f(\mathbf{r})$  eine beliebige zahlenwertige Funktion und  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$  eine beliebige vektorwertige Funktion. Wir identifizieren in Gleichung (3.8.52)  $\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \rightarrow f$  und  $\mathbf{i}(\mathbf{r}') \rightarrow \mathbf{F}$ .

Weiter ist der Vektor  $\mathbf{i}(\mathbf{r}')$  bezüglich der Rotation eine Konstante, da er nur von  $\mathbf{r}'$  und nicht von  $\mathbf{r}$  abhängt. Weiter darf die Ableitung irgend eines Punktes nicht davon abhängen dass das Koordinatensystem um einen konstanten Vektor verschoben wurde. Wir rechnen deshalb die Ableitungen in der Rotation, beziehungsweise im Gradienten, nicht bezüglich  $\mathbf{r}$  sondern bezüglich des verschobenen Koordinatensystems  $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$  aus. Es ergibt sich dann die Kette von Umwandlungen

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \left( \operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \times \mathbf{i}(\mathbf{r}') \right) dV' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \left( \operatorname{grad} \frac{1}{|\boldsymbol{\rho}|} \times \mathbf{i}(\mathbf{r}') \right) dV' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \left( \left( -\frac{\boldsymbol{\rho}}{|\boldsymbol{\rho}|^3} \right) \times \mathbf{i}(\mathbf{r}') \right) dV' &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}') \times \boldsymbol{\rho}}{|\boldsymbol{\rho}|^3} dV' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\mathbf{i}(\boldsymbol{\rho}) \times \boldsymbol{\rho}}{|\boldsymbol{\rho}|^3} dV_{\boldsymbol{\rho}} \end{aligned} \quad (3.8.53)$$

Die letzte Zeile ergibt sich, da für die Zwecke der Integration  $\mathbf{r}$  eine Konstante ist. Auch hier muss das Resultat der Integration unabhängig davon sein, dass wir das Koordinatensystem verschoben oder das Vorzeichen geändert haben. Deshalb darf man  $\mathbf{i}(\mathbf{r}') = \mathbf{i}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \mathbf{i}(\boldsymbol{\rho})$  setzen.

Wir betrachten nun einen infinitesimal dünnen STROM  $dI \mathbf{e}_{\text{Draht}}(\mathbf{r}') = \mathbf{i}_{\text{Draht}} = I d\boldsymbol{\ell}$ . Der Vektor  $\mathbf{e}_{\text{Draht}}$  ist ein Einheitsvektor entlang des Drahtes. Da  $\mathbf{i}_{\text{Draht}}$  überall null ist ausser auf dem eindimensionalen Draht, wird aus dem Volumenintegral ein eindimensionales Integral. Wieder ist es für die Integration egal, ob wir  $\mathbf{i}_{\text{Draht}}$  von  $\mathbf{r}'$  oder von  $\boldsymbol{\rho}$  abhängen lassen.

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{\text{Leiter}} \frac{d\boldsymbol{\ell} \times \boldsymbol{\rho}}{\rho^3} \quad (3.8.54)$$

Diese Gleichung ist bekannt als das GESETZ VON BIOT-SAVART. Biot-Savart fand das Gesetz empirisch, LAPLACE fand die mathematisch korrekte Form. Mit dem gesetz von Biot-Savart kann man das Feld einer beliebigen Leiteranordnung berechnen.

Auch wenn sie physikalisch keine Bedeutung hat, kann es sinnvoll sein in Zwischenschritten die differentielle Formulierung zu verwenden,

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{d\boldsymbol{\ell} \times \boldsymbol{\rho}}{\rho^3} \quad (3.8.55)$$

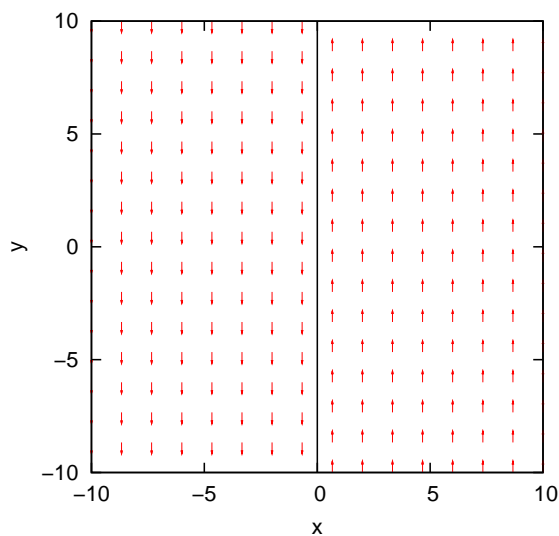
**Achtung: nur die integrale Form hat eine physikalische Bedeutung!**

### Beispiel:

Wir hatten in Abbildung 3.34 gesehen, dass ein homogener STROM in die  $+z$ -Richtung homogene magnetische Induktionen links und rechts erzeugt. Die Magnetfelder haben die Form

$$B_y(x, y, z) = \begin{cases} -B_0, & \text{wenn } x < 0; \\ B_0, & \text{wenn } x > 0. \end{cases} \quad (3.8.56)$$

Für  $x = 0$  ist  $B_y$  nicht definiert.



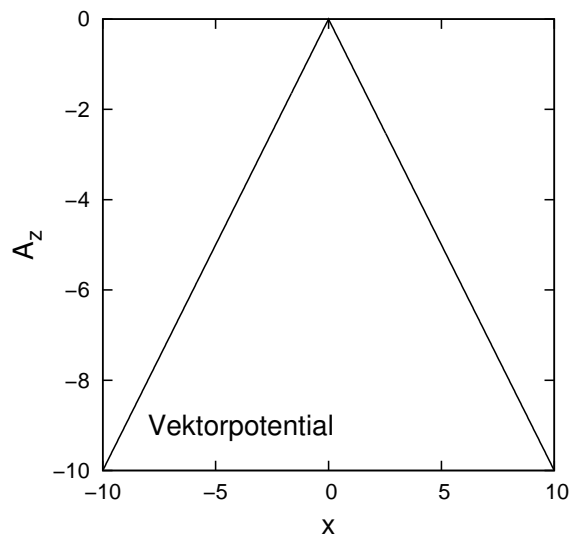
**Abb. 3.37.:** Darstellung von  $\mathbf{B}$  in einer ( $x = \text{const}$ )-Ebene. Die STROM-Ebene liegt bei  $x = 0$ .

Das zu Gleichung (3.8.56) gehörige VEKTORPOTENTIAL ist

$$\begin{aligned} A_x(x, y, z) &= 0 \\ A_y(x, y, z) &= 0 \\ A_z(x, y, z) &= \begin{cases} B_0 x, & \text{für } x < 0; \\ -B_0 x, & \text{für } x > 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.8.57)$$

Wieder ist  $\mathbf{A}$  für  $x = 0$  nicht definiert. Aus  $\mathbf{B} = \mathbf{rot} \mathbf{A}$  bekommt man

$$\begin{aligned} B_x &= \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = 0 \\ B_y &= \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = \begin{cases} -B_0, & \text{für } x < 0; \\ B_0, & \text{für } x > 0. \end{cases} \\ B_z &= \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = 0 \end{aligned} \quad (3.8.58)$$



**Abb. 3.38.:**  $z$ -Komponente des Vektorpotentials einer unendlichen Stromdichte in  $z$ -Richtung in der  $(x = 0)$ -Ebene.

### Beispiel:

Das VEKTORPOTENTIAL

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \begin{pmatrix} \frac{xz}{(x^2+y^2)} \\ \frac{yz}{(x^2+y^2)} \\ 0 \end{pmatrix}$$

ergibt das magnetische Feld für einen in der  $z$ -Richtung laufenden STROM  $I$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{I}{2\pi} \begin{pmatrix} -\frac{y}{x^2+y^2} \\ \frac{x}{x^2+y^2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

In Zylinderkoordinaten  $(r, \theta, z)$  gehört zum Magnetfeld

$$\mathbf{H}(r, \theta, z) = \frac{I}{2\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{r} \\ 0 \end{pmatrix}$$

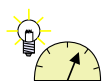
das VEKTORPOTENTIAL

$$\mathbf{A}(r, \theta, z) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \begin{pmatrix} \frac{z}{r} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



### 3.9. Hall-Effekt

**Literatur:** (Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 831]) (Siehe Leisi, Klassische Physik II [Lei98, pp. 126])



**Versuch 39: Versuch zur Vorlesung:**

Halleffekt (Versuchskarte EM-023, Video)



**Versuch 40: Versuch zur Vorlesung:**

Halleffekt (Versuchskarte EM-023, Video (VPN oder intern))

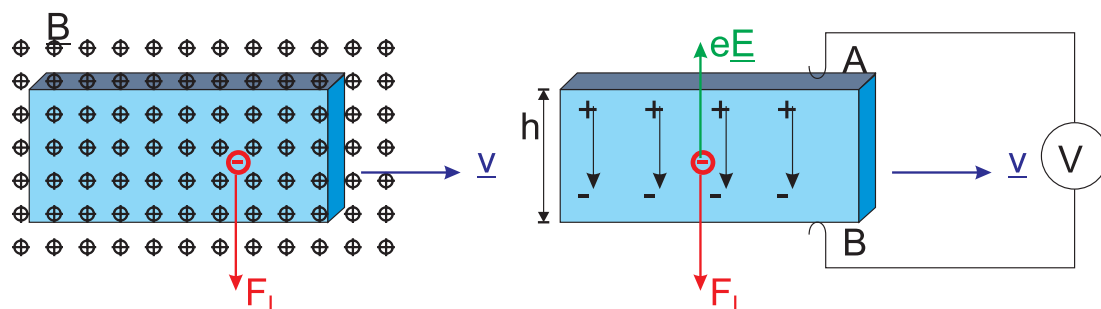


Abb. 3.39.: HALL-EFFEKT

Wenn Elektronen mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  durch ein Metall in einem Magnetfeld mit der magnetischen Induktion  $\mathbf{B}$  fließen (in einer Geometrie wie im obigen Bild), werden sie von der Lorentzkraft

$$\mathbf{F}_L = -e \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

nach unten abgelenkt. Man kann sich dies klar machen, indem man annimmt, der gesamte Metallstreifen werde mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  nach rechts bewegt. Da der Leiter eine begrenzte Ausdehnung hat, laden sich die Grenzflächen auf. Das elektrische Feld bewirkt eine Kraft  $\mathbf{F}_E = e\mathbf{E}$  nach oben auf die Elektronen. Im Gleichgewicht gilt  $\mathbf{F}_L + \mathbf{F}_E = 0$ , oder

$$-e \cdot v \cdot B = -eE \quad (3.9.1)$$

Eine Einheitsladung, die langsam von A nach B herumgeführt wird, erfährt vom elektrischen Feld eine Arbeit  $h \cdot E$ , so dass diese elektromotorische Kraft als SPANNUNG am Voltmeter abgelesen werden kann. Durch Kombination mit der Gleichung (3.9.1) bekommt man für die HALLSPANNUNG

$$U_{Hall} = h \cdot v \cdot B \quad (3.9.2)$$

Die Hallspannung für ein einzelnes Teilchen ist unabhängig vom Material. Bei vielen Ladungsträgern muss die Geschwindigkeit  $v$  durch die Driftgeschwindigkeit  $\langle v \rangle$  der Ladungsträger ersetzt werden.  $\langle v \rangle$  ist materialabhängig. STROM  $I$  und Driftgeschwindigkeit  $\langle v \rangle$  hängen über

$$I = q \cdot n \cdot h \cdot b \cdot \langle v \rangle$$

zusammen.  $b$  ist hier die Dicke des Leiters und  $n$  die Ladungsträgerdichte. Die HALLSPANNUNG hängt dann wie

$$U_{Hall} = \frac{I \cdot B}{q \cdot b \cdot n} \quad (3.9.3)$$

von STROM und SPANNUNG ab. Für Elektronen ( $q = -e$ ) erhalten wir dann

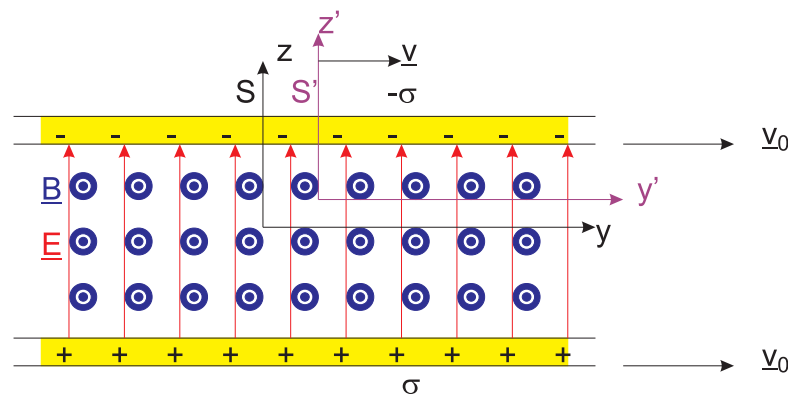
$$U_{Hall} = -\frac{I \cdot B}{e \cdot b \cdot n}$$

**Bemerkung:** Die Hallspannung kann zur Bestimmung der Ladungsträgerkonzentration verwendet werden.

### 3.10. Die Lorentztransformation der Felder $E$ und $B$

(Siehe Leisi, Klassische Physik II [Lei98, pp. 128])

Wir betrachten die Situation im Bild zum Halleffekt (Siehe Abschnitt 3.39), nun aber vom Ruhesystem der Platte aus. Hier haben die Elektronen keine Geschwindigkeit: es gibt keine LORENTZKRAFT.



**Abb. 3.40.:** Bewegte magnetische Induktion und elektrische Felder.

Die obige Abbildung zeigt homogene magnetische Induktionen und elektrische Felder. Sie werden erzeugt, indem zwei parallele Platten positiv beziehungsweise negativ geladen sind. Wenn die Platten mit der Geschwindigkeit  $v_0$  bewegt werden

ergibt sich auch eine magnetische Induktion.

Das elektrische Feld beider Platten im Bezugssystem  $S$  ist

$$E_z = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad (3.10.1)$$

wenn  $\sigma$  die Ladungsdichte in diesem Bezugssystem ist. Die magnetische Induktion ist

$$B_x = \mu_0 \cdot j = \mu_0 \cdot \sigma \cdot v_0 = \frac{v_0 \cdot \sigma}{\varepsilon_0 \cdot c^2} \quad (3.10.2)$$

Die entsprechenden Felder im Bezugssystem  $S'$  müssen nun berechnet werden. Auch in  $S'$  sind die Platten homogen geladen. Also haben wir

$$E'_z = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0} \quad (3.10.3)$$

und

$$B'_x = \frac{v'_0 \cdot \sigma'}{\varepsilon_0 \cdot c^2} \quad (3.10.4)$$

Wir brauchen die Transformationsgesetze für  $\sigma'$  und  $v_0$

$$\begin{aligned} v'_0 &= \frac{v_0 - v}{1 - \frac{v \cdot v_0}{c^2}} \\ \sigma_0 &= \frac{\sigma}{\gamma_0} \\ \sigma_0 &= \frac{\sigma'}{\gamma'_0} \end{aligned} \quad (3.10.5)$$

wenn  $\sigma_0$  das Ruhesystem der LADUNGEN und  $\gamma_0 = \left(1 - \frac{v_0^2}{c^2}\right)^{-1/2}$  ist. Wir bekommen

$$\sigma' = \sigma \cdot \frac{\gamma'_0}{\gamma_0} = \sigma \sqrt{\frac{1 - v_0^2/c^2}{1 - v'^2_0/c^2}} \quad (3.10.6)$$

und damit

$$\begin{aligned}
\sigma' &= \sigma \sqrt{\frac{1 - v_0^2/c^2}{1 - \left(\frac{v_0 - v}{1 - \frac{v \cdot v_0}{c^2}}\right)^2 / c^2}} \\
&= \sigma \frac{\sqrt{1 - v_0^2/c^2} \left(1 - \frac{v \cdot v_0}{c^2}\right)}{\sqrt{\left(1 - \frac{v \cdot v_0}{c^2}\right)^2 - (v_0 - v)^2/c^2}} \\
&= \sigma \frac{\sqrt{1 - v_0^2/c^2} \left(1 - \frac{v \cdot v_0}{c^2}\right)}{\sqrt{1 - 2\frac{v \cdot v_0}{c^2} + \frac{v^2 \cdot v_0^2}{c^4} - v_0^2/c^2 - v^2/c^2 + 2vv_0/c^2}} \\
&= \sigma \frac{\sqrt{1 - v_0^2/c^2} \left(1 - \frac{v \cdot v_0}{c^2}\right)}{\sqrt{1 - v_0^2/v^2} \cdot \sqrt{1 - v^2/c^2}} \\
&= \sigma \cdot \gamma_0 \cdot \left(1 - \frac{v \cdot v_0}{c^2}\right)
\end{aligned} \tag{3.10.7}$$

Mit

$$v'_0 = \frac{v_0 - v}{1 - \frac{v \cdot v_0}{c^2}}$$

berechnet man

$$\begin{aligned}
v'_0 \cdot \sigma' &= \sigma \cdot \gamma_0 \cdot \left(1 - \frac{v \cdot v_0}{c^2}\right) v'_0 \\
&= \sigma \cdot \gamma_0 \cdot \left(1 - \frac{v \cdot v_0}{c^2}\right) \frac{v_0 - v}{1 - \frac{v \cdot v_0}{c^2}} \\
&= \sigma \gamma_0 (v_0 - v)
\end{aligned} \tag{3.10.8}$$

Damit ist

$$E'_z = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0} = \gamma_0 \left( \frac{\sigma}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma v \cdot v_0}{\varepsilon_0 c^2} \right) = \gamma_0 (E_z - v \cdot B_x) \tag{3.10.9}$$

und

$$B'_x = \frac{v'_0 \cdot \sigma'}{\varepsilon_0 \cdot c^2} = \gamma_0 \left( \frac{\sigma \cdot v_0}{\varepsilon_0 c^2} - \frac{\sigma \cdot v}{\varepsilon_0 c^2} \right) = \gamma_0 \left( B_x - \frac{v}{c^2} E_z \right) \tag{3.10.10}$$

Damit sind die transversalen Felder  $B'_x$  und  $E'_z$  in  $S'$  Linearkombinationen der Felder  $B_x$  und  $E_z$  in  $S$ .

Die Transformationseigenschaften von  $B_z$  und  $E_x$  erhält man, indem man die obige Anordnung um  $\pi/2$  um die  $y$ -Achse dreht. Dann gehen

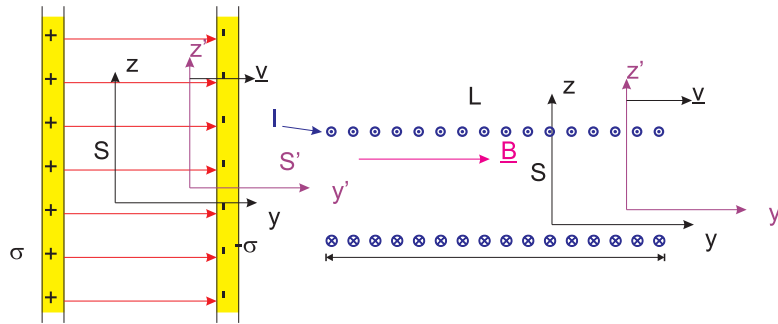
$$E_z \rightarrow E_x \tag{3.10.11}$$

$$B_x \rightarrow -B_z \tag{3.10.12}$$

über. Die Transformationsgleichungen sind dann

$$E'_x = \gamma_0 (E_x + v \cdot B_z) \quad (3.10.13)$$

$$B'_z = \gamma_0 \left( B_z + \frac{v}{c^2} E_x \right) \quad (3.10.14)$$



**Abb. 3.41.:** Skizze zur Transformation eines longitudinalen  $\mathbf{E}$ -Feldes (links) und des  $\mathbf{B}$ -Feldes (rechts).

Die Transformation des longitudinalen  $\mathbf{E}$ -Feldes ergibt sich aus der Erkenntnis, dass transversal zur Geschwindigkeit keine Längenkontraktion auftritt und dass das elektrische Feld eines Plattenkondensators<sup>7</sup> nicht vom Plattenabstand abhängt. Also ist

$$\begin{aligned} E_y &= \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \\ E'_y &= \frac{\sigma'}{\varepsilon_0} \\ \sigma &= \sigma' \end{aligned} \quad (3.10.15)$$

Dann ist auch

$$E'_y = E_y \quad (3.10.16)$$

Die Transformationseigenschaften der magnetischen Induktion können mit der in der obigen Abbildung rechts angedeuteten Spule berechnet werden. Die magnetische Induktion in der Spule ist

$$B_y = \mu_0 \frac{I \cdot N}{L} \quad (3.10.17)$$

wobei  $N$  die Anzahl Windungen und  $L$  die Länge der Spule ist. Wir machen dabei die Annahme, dass die Spule sehr lang im Vergleich zum Durchmesser sei. Mit  $I = \dot{Q}$  ist

<sup>7</sup>oder jeder anderen Anordnung von zwei parallelen, homogenen Flächenladungen

$$B_y = \mu_0 \frac{N}{L} \frac{dQ}{dt} \quad (3.10.18)$$

Die Anzahl Windungen  $N$  und die LADUNG sind relativistisch invariant. Das transformierte Feld ist dann

$$B'_y = \mu_0 \frac{N}{L'} \frac{dQ}{dt'} \quad (3.10.19)$$

Mit der Längenkontraktion  $L' = \gamma L$  und der Zeitdilatation  $dt' = dt/\gamma$  folgt, dass sich die relativistischen Effekte kompensieren und damit

$$B'_y = B_y \quad (3.10.20)$$

ist.

Bei einer Bewegung in die  $y$ -Richtung mit  $\mathbf{v} = (0, v_y, 0)$  ( $\gamma = 1/\sqrt{1 - v_y^2/c^2}$ ) werden die elektrischen und magnetische Induktion wie

$$E'_x = \gamma(v_y) (E_x + v_y \cdot B_z) \quad (3.10.21)$$

$$E'_y = E_y$$

$$E'_z = \gamma(v_y) (E_z - v_y \cdot B_x)$$

$$B'_x = \gamma(v_y) \left( B_x - \frac{v_y}{c^2} E_z \right)$$

$$B'_y = B_y$$

$$B'_z = \gamma(v_y) \left( B_z + \frac{v_y}{c^2} E_x \right)$$

transformiert.

Im Vakuum gilt  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} = \frac{\mathbf{H}}{\varepsilon_0 c^2}$ . Die Lorentztransformation für elektrische und magnetische Felder ist dann

$$E'_x = \gamma(v_y) \left( E_x + \frac{v_y}{c^2} \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot H_z \right) \quad (3.10.22)$$

$$E'_y = E_y$$

$$E'_z = \gamma(v_y) \left( E_z - \frac{v_y}{c^2} \frac{1}{\varepsilon_0} H_x \right)$$

$$H'_x = \gamma(v_y) (H_x - v_y \varepsilon_0 E_z)$$

$$H'_y = H_y$$

$$H'_z = \gamma(v_y) (H_z + v_y \varepsilon_0 E_x)$$

Setzen wir noch  $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$  erhalten wir

$$\begin{aligned}
 D'_x &= \gamma(v_y) \left( D_x + \frac{v_y}{c^2} \cdot H_z \right) \\
 D'_y &= D_y \\
 D'_z &= \gamma(v_y) \left( D_z - \frac{v_y}{c^2} H_x \right) \\
 H'_x &= \gamma(v_y) (H_x - v_y D_z) \\
 H'_y &= H_y \\
 H'_z &= \gamma(v_y) (H_z + v_y D_x)
 \end{aligned} \tag{3.10.23}$$

### 3.11. Lorentztransformation für allgemeine Felder und Geschwindigkeiten

Die oben genannten Transformationen in den Gleichungen (3.10.21) können für beliebige Richtungen verallgemeinert werden [Wik20b]. Dabei müssen die Feldkomponenten von  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  senkrecht zur Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  und parallel dazu getrennt betrachtet werden.

Die Parallel- und die Senkrechtkomponente bekommen wir mit

$$\mathbf{E}_{\parallel} = \left( \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \right) \mathbf{v} \tag{3.11.1a}$$

$$\mathbf{E}_{\perp} = \mathbf{E} - \mathbf{E}_{\parallel} = \mathbf{E} - \left( \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \right) \mathbf{v} \tag{3.11.1b}$$

$$\mathbf{B}_{\parallel} = \left( \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \right) \mathbf{v} \tag{3.11.1c}$$

$$\mathbf{B}_{\perp} = \mathbf{B} - \mathbf{B}_{\parallel} = \mathbf{B} - \left( \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \right) \mathbf{v} \tag{3.11.1d}$$

Die Transformationsgleichungen mit den Feldkomponenten nach Gleichungen (3.11.1) sind dann

$$\mathbf{E}'_{\parallel} = \mathbf{E}_{\parallel} \quad (3.11.2a)$$

$$\mathbf{E}'_{\perp} = \gamma (\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_{\perp}) \quad (3.11.2b)$$

$$\mathbf{B}'_{\parallel} = \mathbf{B}_{\parallel} \quad (3.11.2c)$$

$$\mathbf{B}'_{\perp} = \gamma \left( \mathbf{B}_{\perp} + \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E}_{\perp} \right) \quad (3.11.2d)$$

Wenn wir die transformierten Felder aus den Gleichungen (3.11.2) wieder zusammensetzen erhalten wir

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E}'_{\parallel} + \mathbf{E}'_{\perp} = \mathbf{E}_{\parallel} + \gamma (\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_{\perp}) \quad (3.11.3a)$$

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B}'_{\parallel} + \mathbf{B}'_{\perp} = \mathbf{B}_{\parallel} + \gamma \left( \mathbf{B}_{\perp} + \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E}_{\perp} \right) \quad (3.11.3b)$$

Nun setzen wir die Senkrecht- und Parallelkomponenten aus den Gleichungen (3.11.1) wieder ein und erhalten aus den Gleichungen (3.11.3)

$$\mathbf{E}' = \left( \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \right) \mathbf{v} + \gamma \left( \left( \mathbf{E} - \left( \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \right) \mathbf{v} \right) + \mathbf{v} \times \left( \mathbf{B} - \left( \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \right) \mathbf{v} \right) \right) \quad (3.11.4a)$$

$$\mathbf{B}' = \left( \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \right) \mathbf{v} + \gamma \left( \left( \mathbf{B} - \left( \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \right) \mathbf{v} \right) + \frac{\mathbf{v}}{c^2} \times \left( \mathbf{E} - \left( \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \right) \mathbf{v} \right) \right) \quad (3.11.4b)$$

Die Gleichungen (3.11.4) können noch kompakter geschrieben werden

$$\mathbf{E}' = \gamma (\mathbf{v} \times \mathbf{B} + \mathbf{E}) + \left( \frac{(1 - \gamma) \mathbf{E} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \right) \mathbf{v} \quad (3.11.5a)$$

$$\mathbf{B}' = \gamma \left( \mathbf{B} - \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{E}}{c^2} \right) + \left( \frac{(1 - \gamma) \mathbf{B} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \right) \mathbf{v} \quad (3.11.5b)$$

Mit den Gleichungen (3.11.5) können nun die Lorentztransformationen für beliebig ausgerichtete Felder und Geschwindigkeiten berechnet werden.

## 3.12. Zusammenfassung: Ströme

**Makroskopischer Strom** Gleichung (3.0.1)

$$I = \left. \frac{\Delta Q}{\Delta t} \right|_{\text{Fläche}}$$



**Mittlere Geschwindigkeit der Ladungsträger** Gleichung (3.1.5)

$$\langle \mathbf{v} \rangle = \frac{1}{n} \sum_j n_j \cdot \mathbf{v}_j$$

**Stromdichte** VEKTORFELD Gleichung (3.1.6)

$$\mathbf{i} = nq \langle \mathbf{v} \rangle$$

**Gesamtstrom** Gleichung (3.1.8)

$$I(F) = \int_F \mathbf{i} \cdot d\mathbf{a}$$

**Strom bei mehreren Ladungsträgern** Gleichung (3.1.9)

$$\mathbf{i} = \sum_k n_k q_k \langle \mathbf{v}_k \rangle$$

**Kontinuitätsgleichung** Integralform Gleichung (3.1.15)

$$\int_A \mathbf{i} \cdot d\mathbf{a} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{i} dV = \int_V \frac{\partial}{\partial t} \rho_{el} dV$$

Differenzialform Gleichung (3.1.16)

$$\operatorname{div} \mathbf{i}(\mathbf{x}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \rho_{el}(\mathbf{x}, t)$$

**Ohmsches Gesetz** lokal Gleichung (3.2.2)

$$\mathbf{i}(\mathbf{E}) = \sigma \mathbf{E}$$

integral Gleichung (3.2.4)

$$I = G \cdot U$$

**Stromdichte und Relaxationszeit** Gleichung (3.2.14)

$$\mathbf{i} = n \frac{q^2 \langle t \rangle}{M} \mathbf{E} = n \frac{q^2 \tau}{M} \mathbf{E}$$

**Leitfähigkeit und Relaxationszeit** Gleichung (3.2.15)

$$\sigma = \sum_k n_k \frac{q_k^2 \tau_k}{M_k}$$

**Potential und Leitfähigkeit** Gleichung (3.2.23)

$$\operatorname{div} [\sigma(x, y, z) \operatorname{grad} U(x, y, z)] = 0$$

**Serienschaltung von Widerständen** Gleichung (3.2.30)

$$R_{\text{Serie}} = \sum_{i=1}^N R_i$$

**Serienschaltung von Leitwerten** Gleichung (3.2.31)

$$\frac{1}{G_{\text{Serie}}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{G_i}$$

**Parallelschaltung von Widerständen** Gleichung (3.2.33)

$$\frac{1}{R_{\text{parallel}}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i}$$

**Parallelschaltung von Leitwerten** Gleichung (3.2.32)

$$G_{\text{parallel}} = \sum_{i=1}^N G_i$$

**Leistung und Strom** Gleichung (3.3.8)

$$P = R \cdot I^2 = \frac{U^2}{R}$$

**Magnetische Kraft zweier paralleler Leiter** Gleichung (3.6.1)

$$F_M = \text{const} \cdot \frac{\ell \cdot I_1 \cdot I_2}{r}$$

**Magnetische Kraft auf eine sich parallel zu einem Strom bewegende Ladung**  
Gleichung (3.7.22)

$$F_z(r) = \frac{q \cdot v \cdot I}{2\pi\epsilon_0 \cdot c^2} \cdot \frac{1}{r}$$

**Lorentz-Kraft** Gleichung (3.8.1)

$$\mathbf{F}_L = q \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

**Induktionskonstante** Gleichung (3.8.3)

$$\mu_0 = \frac{1}{\epsilon_0 c^2}$$

**Magnetfeld eines geraden Leiters mit dem Strom  $I$**  Gleichung (3.8.4)

$$B(r) = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I}{r}$$

**Kraftgesetz der Elektrodynamik** Gleichung (3.8.13)

$$\mathbf{F} = q \cdot \mathbf{E} + q \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

**Biot-Savart-Kraft** Gleichung (3.8.16)

$$d\mathbf{F} = I \cdot d\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{B}$$

**Ampèresches Durchflutungsgesetz, Integralform** Gleichung (3.8.32)

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \iint_{A(S)} \mathbf{i} \cdot d\mathbf{a}$$

**Magnetisches Moment** Gleichung (3.8.33)

$$\mathbf{m} = \iint_{A(s)} \mathbf{i} \cdot d\mathbf{a}$$

**Ampèresches Durchflutungsgesetz, differentielle Form** Gleichung (3.8.35)

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{i}$$

**Quellenfreiheit von  $\mathbf{B}$ , Integralform** Gleichung (3.8.42)

$$0 = \iint_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \iiint_{V(A)} \text{div } \mathbf{B} dV$$

**Quellenfreiheit von  $\mathbf{B}$ , differentielle Form** Gleichung (3.8.43)

$$\text{div } \mathbf{B} = 0$$

**Ampèresches Durchflutungsgesetz und Quellenfreiheit(Vektorpotential)**

Gleichung (3.8.49)

$$\Delta \mathbf{A}(x, y, z) = -\mu_0 \mathbf{i}(x, y, z)$$

**Berechnung des Vektorpotentials** Gleichung (3.8.50)

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

**Integralform des Gesetzes von Biot-Savart** Gleichung (3.8.54)

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{\text{Leiter}} \frac{d\boldsymbol{\ell} \times \boldsymbol{\rho}}{\rho^3}$$

**Hall-Spannung** Gleichung (3.9.3)

$$U_{\text{Hall}} = \frac{I \cdot B}{q \cdot b \cdot n}$$

**Lorentztransformation der Felder** Gleichung (3.10.21)

$$\begin{aligned}
E'_x &= \gamma(v_y) (E_x + v_y \cdot B_z) \\
E'_y &= E_y \\
E'_z &= \gamma(v_y) (E_z - v_y \cdot B_x) \\
B'_x &= \gamma(v_y) \left( B_x - \frac{v_y}{c^2} E_z \right) \\
B'_y &= B_y \\
B'_z &= \gamma \left( B_z + \frac{v_y}{c^2} E_x \right)
\end{aligned}$$

**Lorentztransformation der Felder** Gleichung (3.10.22)

$$\begin{aligned}
E'_x &= \gamma(v_y) \left( E_x + \frac{v_y}{c^2} \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot H_z \right) \\
E'_y &= E_y \\
E'_z &= \gamma(v_y) \left( E_z - \frac{v_y}{c^2} \frac{1}{\varepsilon_0} H_x \right) \\
H'_x &= \gamma(v_y) (H_x - v_y \varepsilon_0 E_z) \\
H'_y &= H_y \\
H'_z &= \gamma(v_y) (H_z + v_y \varepsilon_0 E_x)
\end{aligned}$$

**Lorentztransformation für beliebige Geschwindigkeiten** Gleichung (3.11.5)

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}' &= \gamma (\mathbf{v} \times \mathbf{B} + \mathbf{E}) + \left( \frac{(1 - \gamma) \mathbf{E} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \right) \mathbf{v} \\
\mathbf{B}' &= \gamma \left( \mathbf{B} - \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{E}}{c^2} \right) + \left( \frac{(1 - \gamma) \mathbf{B} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \right) \mathbf{v}
\end{aligned}$$

## 4. Elektrodynamik: zeitlich veränderliche Magnetfelder und magnetische Induktionen

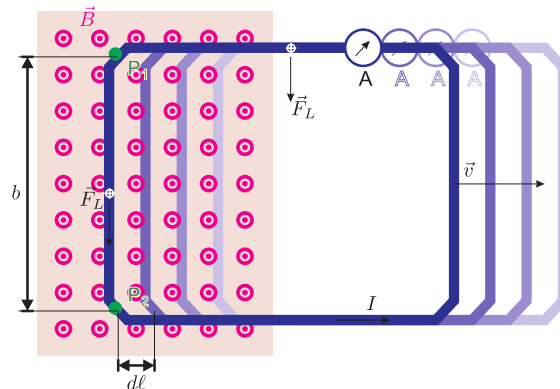
Das allgemeine Kraftgesetz für statische Felder lautet

$$\mathbf{F} = q \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{B} + q \cdot \mathbf{E} \quad (4.0.1)$$

Bei zeitlich sich ändernden Feldern kommen neue Effekte hinzu, der VERSCHIEBUNGSSTROM und die INDUKTION.

### 4.1. Das Faradaysche Induktionsgesetz

#### 4.1.1. Eine bewegte Leiterschleife in einem stationären $B$ -Feld



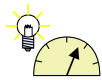
**Abb. 4.1.:** Induktion eines Stromes in einer in einer **inhomogenen** magnetischen Induktion bewegten Leiterschleife.

Wir bewegen eine Leiterschleife mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  aus dem begrenzten Gebiet mit einer homogenen magnetischen Induktion heraus. Auf die beweglichen Ladungsträger, hier positiv angenommen, wirkt die Lorentzkraft  $\mathbf{F}_L$ . Auf den horizontalen Teilen der Leiterschleife kennen wir den Effekt: eine Hallspannung (Siehe Abschnitt 3.39) auf. Im vertikalen Teil im Magnetfeld bewirkt die Hallspannung eine Beschleunigung der Ladungsträger. Nach der Definition der elektromotorischen Kraft (Siehe Gleichung (3.3.9)) haben wir

$$U_{EMK} = \frac{1}{q_0} \oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{q_0} \oint \mathbf{F}_L \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{q_0} \int_{P_1}^{P_2} F_L \cdot ds = \frac{1}{q_0} (q_0 \cdot v \cdot B) \cdot b = v \cdot B \cdot b \quad (4.1.1)$$

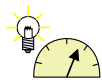
Hat die Drahtschleife den WIDERSTAND  $R$ , so fließt der STROM

$$I = \frac{U_{EMK}}{R} \quad (4.1.2)$$



#### Versuch 41: Versuch zur Vorlesung:

Induktion (Versuchskarte EM-025)



#### Versuch 42: Versuch zur Vorlesung:

Induktion im Erdfeld (Versuchskarte EM-027, Video)



#### Versuch 43: Versuch zur Vorlesung:

Induktion im Erdfeld (Versuchskarte EM-027, Video (VPN oder intern))

### 4.1.2. Der magnetische Fluss

**Literatur:** (Siehe Leisi, Klassische Physik II [Lei98, pp. 138]) (Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 876])

Im Zusammenhang mit den elektrischen Feldern  $\mathbf{E}$  hatten wir den elektrischen Fluss  $\phi_E$  (Siehe Abschnitt 2.3) eingeführt. Hier bewegen wir die Leiterschleife mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$ , wir ändern damit die von der MAGNETISCHEN INDUKTION (auch MAGNETISCHE FLUSSDICHTHE genannt) durchflossene Fläche  $A$  um die Grösse  $da = -d\ell \cdot b$ . Da die Geschwindigkeit  $v = d\ell/dt$  ist, können wir auch schreiben

$$U_{EMK} = v \cdot B \cdot b = \frac{d\ell}{dt} b \cdot B = -\frac{da}{dt} B = -\frac{B \cdot da}{dt} \quad (4.1.3)$$

schreiben. Wir definieren den

magnetischen Fluss

$$\phi_B = \iint_{A(S)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} \quad (4.1.4)$$

durch die von der geschlossenen Kurve  $S$  berandete Fläche  $A$ .

Damit ist die induzierte EMK

$$U_{EMK} = -\frac{d\phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint_{A(S)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} \quad (4.1.5)$$

Sie wird durch den zeitlich sich ändernden Fluss erzeugt.

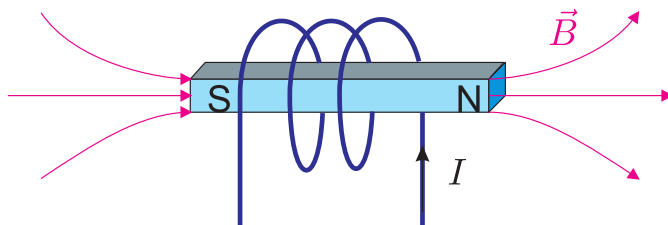
Die Einheit des magnetischen Flusses ist WEBER.

$$[\phi_B] = \text{Weber} = \text{Wb} = \text{T m}^2 \quad (4.1.6)$$

Das Minuszeichen in den Gleichungen für den magnetischen Fluss rührt daher, dass eine Geschwindigkeit in die positive  $x$ -Richtung eine Verkleinerung der Fläche  $A$  bewirkt.

Die durch den STROM erzeugte magnetische Flussdichte oder magnetische Induktion  $\mathbf{B}$  ist so gerichtet, dass die Bewegung der Spule gebremst wird. Dieses Verhalten wird in der LENZSCHEN REGEL zusammengefasst:

Die Induktionsspannung und der STROM, den sie bewirkt, sind stets so gerichtet, dass sie der Ursache entgegenwirken.



**Abb. 4.2.:** Vergleich eines Stabmagneten mit einer Spule. Der magnetische Nordpol ist üblicherweise rot, der Südpol grün markiert.

Eine SPULE erzeugt ein axiales Magnetfeld oder eine magnetische Induktion. Die Richtung des Magnetfeldes (oder der magnetischen Induktion) wird mit der RECHTEN HAND-REGEL aus der Stromrichtung abgeleitet. Ein Stabmagnet erzeugt ein gleiches Magnetfeld (oder magnetische Induktion) wie eine Spule.

Die Nord- und Südpole der Magnete sind so definiert: Die  $\mathbf{B}$ -Feldlinien laufen vom Nordpol zum Südpol. Der Nordpol ist rot markiert, der Südpol grün.

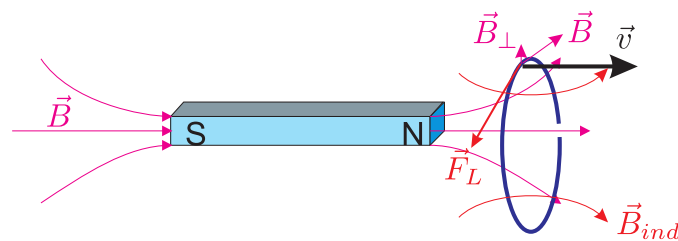


Abb. 4.3.: Induzierte SPANNUNG

Bewegt man einen Metallring mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  von einem Stabmagneten weg, so bewirkt die LORENTZKRAFT einen STROM  $I$ , der eine magnetische Induktion (magnetische Flussdichte)  $\mathbf{B}_{ind}$  induziert. Diese magnetische Induktion ist so gerichtet, dass sie gleichsinnig wie die magnetische Induktion des Stabes ist. Der Metallring wird also vom Stabmagneten angezogen und in seiner Bewegung nach rechts gebremst (LENZSCHE REGEL).

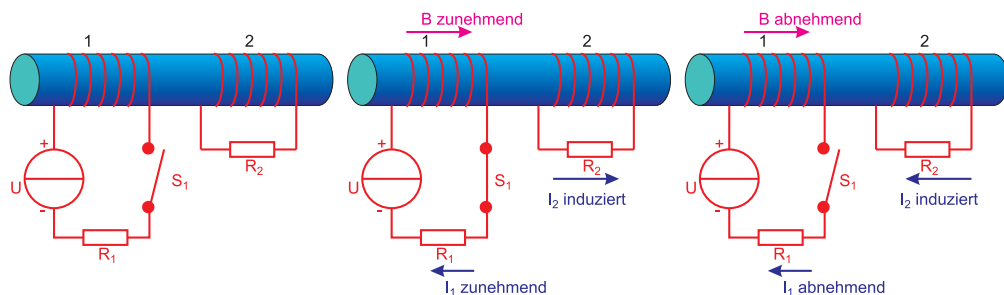


Abb. 4.4.: Vorzeichen der magnetischen Induktion und der induzierten SPANNUNG beim Ein- und Ausschalten.

Hier wird eine magnetische Induktion (magnetische Flussdichte) eingeschaltet. Die Richtung der Feldlinien wird durch die RECHTE-HAND-REGEL bestimmt. Eine zeitlich zunehmende magnetische Induktion in der rechten Spule ist äquivalent zu einer Bewegung der rechten Spule im inhomogenen Feld (links intensiver als rechts) nach links. Dabei zeigt die relevante Feldkomponente nach aussen. Aus der RECHTEN HAND-REGEL ergibt sich die angegebene Stromrichtung. Nach dem Ausschalten des erregenden Stromes nimmt die Intensität der magnetischen Induktion ab. Dies ist äquivalent zu einer Bewegung der rechten Spule nach rechts, bei gleichbleibender Richtung der magnetischen Induktion. Entsprechend dreht sich die Richtung des Stromes um.



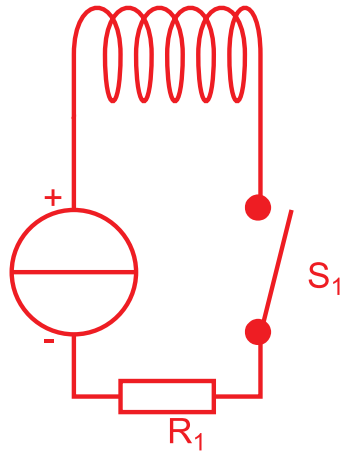


Abb. 4.5.: SELBSTINDUKTION

Wenn eine Spule von einem STROM durchflossen ist, wird dadurch eine magnetische Induktion (oder Magnetfeld) erzeugt. Wenn nun der STROM durch die Spule geändert wird, wird eine SPANNUNG induziert, die wie im vorigen Falle so gerichtet ist, dass sie der Änderung der magnetischen Induktion (oder des Magnetfeldes) entgegenwirkt, so also auch der Änderung des durch die Spule fließenden Stromes. Im besonderen Falle, dass der STROM abgeschaltet wird, dass also der WIDERSTAND im Stromkreis um viele Größenordnungen steigt, bildet sich eine sehr hohe SPANNUNG.

### Anwendungen

- Zündspule bei Benzinmotoren
- Erzeugung der Beschleunigungsspannung in Fernsehröhren
- Teslatransformator, siehe auch



### Versuch 44: Versuch zur Vorlesung:

Tesla-Transformator (Versuchskarte EM-064, Video (VPN oder intern))

### 4.1.3. Induktionsgesetz von Faraday, Integral- und Differentialform

Wir betrachten die Situation in der Abbildung 4.1 im Ruhesystem  $S'$  der Schleife. Im Laborsystem  $S$  ist das Magnetfeld

$$\mathbf{B} = (0, 0, B_z)$$

in die  $z$ -Richtung gerichtet. Die Geschwindigkeit zeigt in die  $y$ -Richtung. Mit der Lorentztransformation (3.10.21) berechnen wir die Felder im System  $S'$ . Wir erhalten

$$\begin{aligned}\mathbf{B}' &= (0, 0, B'_z) = (0, 0, \gamma(v_y) \cdot B_z) \\ \mathbf{E}' &= (E'_x, 0, 0) = (v \cdot \gamma(v_y) \cdot B_z, 0, 0) \\ &= (v_y \cdot B'_z, 0, 0)\end{aligned}\quad (4.1.7)$$

Die Leiterschleife ist im System  $S'$  in Ruhe. Also muss die EMK durch das elektrische Feld erzeugt werden.

$$U'_{EMK} = E'_x \cdot b = v_y \cdot B'_z \cdot b \quad (4.1.8)$$

Die Flussänderung ist

$$d\phi'_B = -B'_z \cdot v_y \cdot b \cdot dt' \quad (4.1.9)$$

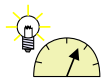
Somit lauten das Induktionsgesetz und das Ohmsche Gesetz

$$\begin{aligned}U'_{EMK} &= -\frac{d\phi'_B}{dt'} \\ U'_{EMK} &= R \cdot I'\end{aligned}\quad (4.1.10)$$

Somit gilt für die EMK die TRANSFORMATION

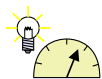
$$U'_{EMK} = \gamma(v) U_{EMK} \quad (4.1.11)$$

Die Gleichungen (4.1.11) gelten in jedem Falle. Wenn  $v \ll c$  ist, kann man die Unterschiede im Strom  $I$ , in der EMK  $U_{EMK}$  und im Magnetfeld  $\mathbf{B}$  vernachlässigen. Die Transformationseigenschaften zeigen, dass das Induktionsgesetz auch bei stationären Leiterschleifen und zeitlich ändernden Magnetfeldern gelten muss (wir begeben uns in das System  $S'$ ). Die Wirkungen der Felder  $\mathbf{B}$  und  $\mathbf{E}$  sind unabhängig von ihrer Entstehung.



#### Versuch 45: Versuch zur Vorlesung:

Magnetische Induktion (Versuchskarte EM-051, Video)



#### Versuch 46: Versuch zur Vorlesung:

Magnetische Induktion (Versuchskarte EM-051, Video (VPN oder intern))

Für einen beliebig geformten ruhenden Leiter (gegeben durch die Kurve  $S$ ) in einem zeitlich ändernden Magnetfeld gilt für die EMK

$$U_{EMK} = -\frac{d}{dt} \iint_{A(S)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} \quad (4.1.12)$$

Da der Leiter in Ruhe ist, muss die EMK durch ein elektrisches Feld erzeugt sein.

$$U_{EMK} = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \quad (4.1.13)$$

und damit

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d}{dt} \iint_{A(S)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} \quad (4.1.14)$$

Bei einer bewegten Leiterschleife kann der magnetische Fluss sich ändern,

- a) weil sich der Fluss mit der Zeit ändert und/oder
- b) weil sich die Berandung bewegt, sich ihr Ort also ändert.

Für eine bewegte Leiterschleife muss das elektrische Feld  $\mathbf{E}'$  im bewegten Bezugssystem und die magnetische Induktion  $\mathbf{B}$  im Laborsystem berechnet werden [Jac75, p. 210].  $d\mathbf{s}'$  ist das Linienelement im Ruhesystem, in dem  $\mathbf{E}'$  gemessen wird. Wir erhalten

$$\oint_S \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{s}' = -\frac{d}{dt} \iint_{A(S)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} \quad (4.1.15)$$

Mit der Gleichung (C.8.40) für die Beziehung zwischen zeitlichen Ableitungen in Ruhesystemen und mitgeführten Systemen und dem Satz von Stokes (Siehe Gleichung (C.11.1)) erhalten wir

$$\begin{aligned} U'_{EMK} &= \oint_S \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{s}' = -\frac{d}{dt} \iint_{A(S)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} \\ &= -\iint_{A(S)} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} + \text{rot} (\mathbf{B} \times \mathbf{v}) \right] \cdot d\mathbf{a} \\ &= -\iint_{A(S)} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} - \oint_S (\mathbf{B} \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{s}' \end{aligned} \quad (4.1.16)$$

Dies kann auch so geschrieben werden:

$$\oint_S [\mathbf{E}' + (\mathbf{B} \times \mathbf{v})] \cdot d\mathbf{s}' = -\iint_{A(S)} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} \quad (4.1.17)$$

Wenn man sich nach Jackson [Jac75, p. 212] alternativ vorstellt, dass der Weg  $S$  zu einem Zeitpunkt fix im Raum ist, gilt auch

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\iint_{A(S)} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} \quad (4.1.18)$$

Deshalb erhalten wir für das elektrische Feld  $\mathbf{E}$  im Laborsystem

$$\oint_S [\mathbf{E}' + (\mathbf{B} \times \mathbf{v})] \cdot d\mathbf{s}' = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \quad (4.1.19)$$

Bei kleinen Geschwindigkeiten ist  $d\mathbf{s} = d\mathbf{s}'$ .

Damit ist

$$\mathbf{E}' + (\mathbf{B} \times \mathbf{v}) = \mathbf{E} \implies \mathbf{E}' = (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \mathbf{E} \quad (4.1.20)$$

Weiter kann man daraus die LORENTZKRAFT ablesen:

$$\mathbf{F}_L \approx \mathbf{F}'_L = q\mathbf{E}' = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (4.1.21)$$

Zurück zum Faradayschen Induktionsgesetz: Mit Gleichung (4.1.20) kann in Gleichung (4.1.17)  $\mathbf{E}'$  eliminiert werden. Das UNIVERSELLE INDUKTIONSGESETZ VON FARADAY lautet

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = - \iint_{A(S)} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} \quad (4.1.22)$$

Mit dem Satz von Stokes (Siehe Gleichung (C.11.1)) erhält man

$$\oint_{S(t)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \iint_{A(S(t))} \mathbf{rot} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = - \iint_{A(S(t))} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a} \quad (4.1.23)$$

Für zeitunabhängige Berandungen  $A(S)$  darf man Ableitung und Integral nicht vertauschen. Das Induktionsgesetz lautet dann

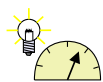
$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = - \frac{d}{dt} \iint_{A(S)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$$

Da diese Integralgleichung für beliebige Kurven  $S$  gelten muss, also auch für infinitesimal kleine, erhalten wir die DIFFERENTIELLE FORM DES FARADAYSCHEN INDUKTIONSGESETZES

$$\mathbf{rot} \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (4.1.24)$$

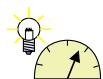
Bei der Ableitung des FARADAYSCHEN INDUKTIONSGESETZES haben wir von der Kleinheit der Geschwindigkeiten Gebrauch gemacht, explizit und implizit. Eine relativistisch korrekte Rechnung führt auf die gleichen Ergebnisse.

### 4.1.4. Wirbelströme



#### Versuch 47: Versuch zur Vorlesung:

Fallrohre ([Versuchskarte EM-057](#), [Video](#))



#### Versuch 48: Versuch zur Vorlesung:

Fallrohre ([Versuchskarte EM-057](#), [Video \(VPN oder intern\)](#))

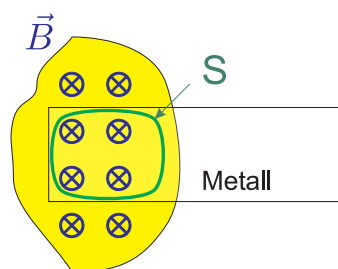


Abb. 4.6.: WIRBELSTRÖME in Metallen

Wenn sich ein Metallstück in einem inhomogenen Magnetfeld befindet, dann muss für jede Bahnkurve  $S$  das Faradaysche Induktionsgesetz gelten. Da der Leiter einen SPEZIFISCHEN WIDERSTAND  $\rho_{el}$  hat, fließt bei einer Änderung des Flusses durch  $S$ , zum Beispiel, indem man den Leiter bewegt, ein durch die INDUZIERTEN SPANNUNG getriebener STROM. Die Richtung des Stromes ist so, dass er sich einer Änderung des magnetischen Flusses widersetzt. Bei einem perfekten Leiter, müssten enorm grosse Kräfte aufgebracht werden, um das Metallstück mit einer minimalen Geschwindigkeit bewegen zu können. Durch die Dissipation im Ohmschen Leiter wird der induzierte Strom geschwächt, so dass die der Bewegung entgegengesetzte Kraft umso kleiner ist, je schlechter die Leitfähigkeit des Metalls ist.

Um die Größenordnung des Wirbelstromes abzuschätzen betrachten wir lokal ein Stück Metall das mit der Geschwindigkeit  $v_y$  durch eine magnetische Induktion in die  $x$ - Richtung,  $B_x$ , gezogen wird. Wir betrachten die Felder im Ruhesystem der Platte. Aus den Lorentz-Transformationen erhalten wir

$$\begin{aligned} E'_z &= \frac{-v_y B_x}{\sqrt{1 - v_y^2/c^2}} && \approx -v_y B_x \\ B'_x &= \frac{B_x}{\sqrt{1 - v_y^2/c^2}} && \approx B_x \end{aligned} \quad (4.1.25)$$

da  $v^2/c^2 \ll 1$  ist. Lokal gilt der Zusammenhang

$$\mathbf{i} = \sigma \mathbf{E} \quad (4.1.26)$$

Weiter können mit  $P = I U$  mit  $i = I/A$  und  $E'_z = U/d$  und der Bezeichnung für das Volumen  $V = A d$  schreiben

$$\lim_{V \rightarrow 0} \frac{P}{V} = P_V = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{i A \cdot E'_z d}{V} = i E'_z = \sigma E_z'^2 \quad (4.1.27)$$

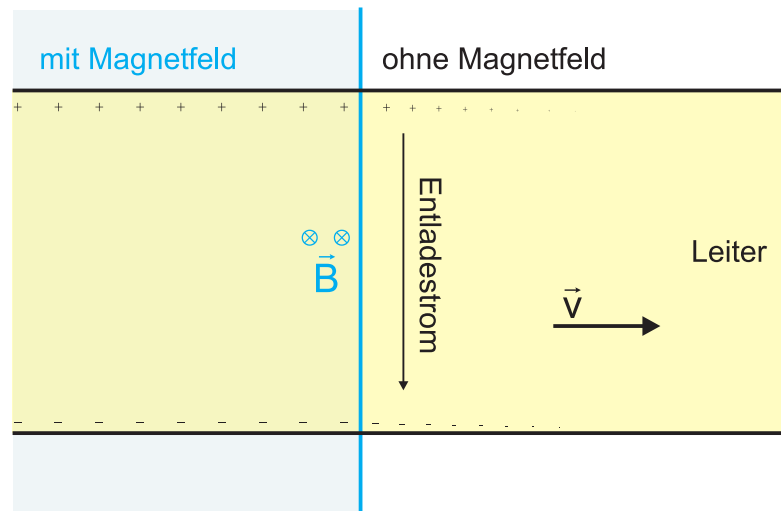
Andererseits hängt die dissipierte Leistung pro Volumen von der Volumenkraft  $F_V$  und der Geschwindigkeit  $v_y$  ab.

$$P_V = F_V \cdot v_y = \sigma E_z'^2 = \sigma (v_y B'_x)^2 = \sigma (v_y B_x)^2 \quad (4.1.28)$$

Die Volumenkraft ist also

$$F_V = \sigma v_y B_x^2 \quad (4.1.29)$$

Die Berechnung wurde anhand eines unendlich ausgedehnten Leiters in einem Magnetfeld gemacht. Endliche Leiter und endliche Magnetfelder bewirken, dass der Effekt nur an den Grenzen vorhanden ist.



**Abb. 4.7.:** Bewegung eines Leiters aus einem Magnetfeld.

Im Ruhesystem des Leiters bewirkt das elektrische Feld eine Bewegung der Ladungsträger an die Seiten des Leiters (analog wie beim Halleffekt). Dadurch wird ein Gegenfeld aufgebaut, bis die Bewegung der Ladungsträger zum Erliegen kommt (Siehe Abbildung 4.7, linke Seite). Wenn der Leiter den Bereich des Magnetfeldes verlässt (wir nehmen eine scharfe Grenze an, dann gleichen sich die Ladungen aus. Die Ströme erzeugen wegen der endlichen Leitfähigkeit  $\sigma$  eine Wärmeleistung, das heisst es gibt eine Gegenkraft. Kondensatoren werden exponentiell entladen, so dass die Wirkung des ändernden Feldes lokal begrenzt ist. Auf der anderen Seite des Magnetfeldes tauchen die gleichen Effekte auf, aber beim Laden des Kondensators. Auch dort nimmt der Strom exponentiell ab beim Entfernen von der

Grenze. Warum heisst es dann doch Wirbelströme? Wir haben einen Stromkreis, bei dem die magnetische Induktion die elektromotorische Kraft bewirkt (wie beim van de Graaff-Generator). Während im Ruhesystem des Leiters die Effekte durch das elektrische Feld erklärt werden, müssen sie im Laborsystem mit Flussänderung und magnetischer Induktion beschrieben werden.

In Transformatoren ist die magnetische Induktion parallel zum Eisen, die Wirbelströme transversal dazu. Die Wirbelströme können vermindert werden, indem das Metall geschlitzt wird oder in Lagen mit Isolatoren dazwischen gebündelt wird.

### Anwendungen

- Wirbelstrombremse beim ICE
- Retarder in LKWs
- Dämpfung von Schwingungen in Rastertunnelmikroskopen
- In Transformatoren und Motoren verwendet man geschlitzte Bleche

### Beispielswerte

---

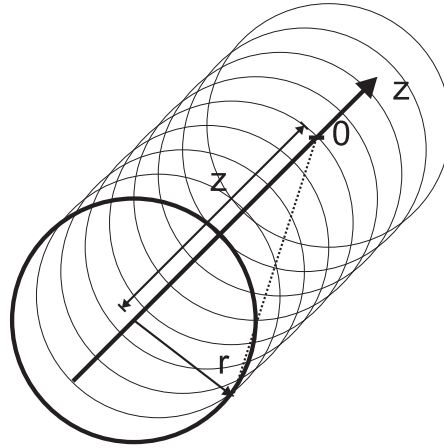
$B/T \rightarrow$ $v/(m\ s^{-1})$	Cu		Al		Fe		Ti		
	0.1	1	0.1	1	0.1	1	0.1	1	
0.01	$5.8 \cdot 10^{-5}$	$5.8 \cdot 10^{-3}$	$3.7 \cdot 10^{-5}$	$3.7 \cdot 10^{-3}$	0.00001	0.001	$2.56 \cdot 10^{-6}$	0.000256	7.
0.1	$5.8 \cdot 10^{-4}$	$5.8 \cdot 10^{-2}$	$3.7 \cdot 10^{-4}$	$3.7 \cdot 10^{-2}$	0.0001	0.01	0.0000256	0.00256	7.
1	$5.8 \cdot 10^{-3}$	$5.8 \cdot 10^{-1}$	$3.7 \cdot 10^{-3}$	0.37	0.001	0.1	0.000256	0.0256	0
10	$5.8 \cdot 10^{-2}$	5.8	$3.7 \cdot 10^{-2}$	3.7	0.01	1.	0.00256	0.256	

**Tab. 4.1.:** Wirbelstromkräfte in  $N\ m^{-3}$  von Magneten mit 0.1 T und 1 T auf Platten mit der Geschwindigkeit  $v$  aus verschiedenen Materialien.

---

#### 4.1.5. Unendlich lange Spule

Eine unendlich lange Spule kann man sich aus kreisförmigen Leitern zusammengesetzt denken.



**Abb. 4.8.:** Die magnetische Induktion am Punkt 0 auf der  $z$ -Achse kann berechnet werden, indem mit Gleichung (3.8.55) die magnetische Induktion eines Rings mit der Stromdichte  $I \cdot \mathbf{n} \cdot dz$  berechnet wird und dann über alle Ringströme addiert wird.

Wir berechnen zuerst die magnetische Induktion eines Kreises mit dem Radius  $r$  im Abstand  $z$  vom Nullpunkt ( $\mathbf{r}' = (x, y, z)$ ) am Nullpunkt ( $\mathbf{r} = (0, 0, 0)$ ). Ausgehend von Gleichung (3.8.55) schreiben wir für einen Kreisring auf der Position  $z$  mit dem Radius  $r$  für  $\boldsymbol{\rho}$ .

$$\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r} - \mathbf{r}' = (-x, -y, -z)$$

Da  $r$  konstant ist, schreiben wir  $x$  und  $y$  als Funktion des Winkels  $\phi$

$$\boldsymbol{\rho} = (-r \cos(\phi), -r \sin(\phi), -z)$$

Der STROM  $I$  soll im Gegenuhrzeigersinn umlaufen, also in positiver Richtung. Ein Längenelement entlang des Kreisringes ist

$$d\boldsymbol{\ell} = (-y, x, 0) \cdot \frac{d\ell}{r} = (-\sin(\phi), \cos(\phi), 0) r d\phi$$

Das Vektorprodukt  $d\boldsymbol{\ell} \times \boldsymbol{\rho}$  ergibt

$$d\boldsymbol{\ell} \times \boldsymbol{\rho} = (-r z \cos(\phi), -r z \sin(\phi), r^2) d\phi$$

Mit dem STROM pro Windung  $I$  wird die magnetische Induktion am Punkte  $(0, 0, 0)$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_0^{2\pi} \frac{d\boldsymbol{\ell} \times \boldsymbol{\rho}}{\rho^3}$$

Die  $x$ - und die  $y$ -Komponenten von  $d\boldsymbol{\ell} \times \boldsymbol{\rho}$  enthalten eine Winkelfunktion zur ersten Potenz und ergeben bei einer Integration von 0 nach  $2\pi$  null. Die  $z$ -Komponente der magnetischen Induktion ist



$$B_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r^2 d\phi}{(r^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I r^2}{2 (r^2 + z^2)^{3/2}} \quad (4.1.30)$$

Die magnetische Induktion einer unendlich langen Spule bekommt man, indem wir den STROM  $I$  durch das Produkt aus Strom  $I$ , der Windungszahl pro Länge (Windungsdichte)  $n$  und dem Längenelement  $dz$  ersetzen und integrieren.

$$B_z(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu_0 I n r^2 dz}{2 (r^2 + z^2)^{3/2}} = \mu_0 I n \quad (4.1.31)$$

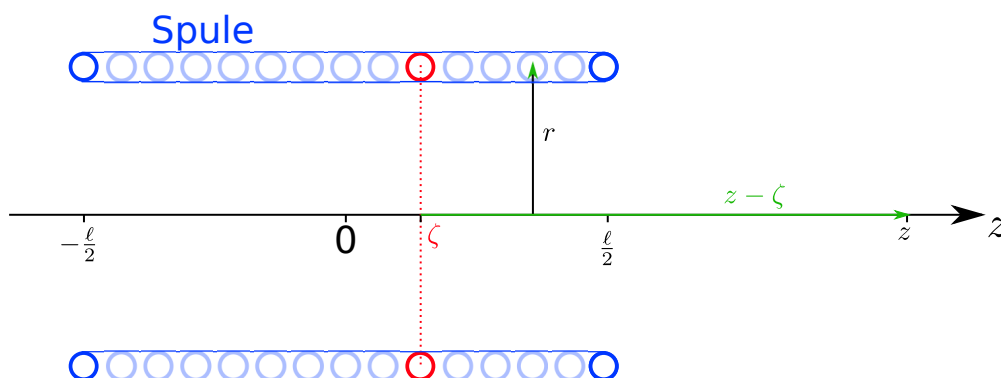
Wird die unendlich lange Spule bei  $z = 0$  geteilt, tragen beide Spulenhälften gleichviel zur magnetischen Induktion bei  $z = 0$  bei. Wird nun eine Hälfte entfernt, so ist die magnetische Induktion auf der Spulennachse

$$B_z(\text{Endfläche}) = \frac{B_z(0)}{2} = \frac{\mu_0 n I}{2} = \frac{\mu_0 N I}{2\ell} \quad (4.1.32)$$

Endlich lange Spulen der Länge  $\ell \gg r$  verhalten sich wie unendlich lange Spulen. Wenn sich auf der Länge  $\ell$   $N$  Windungen befinden, haben wir

$$B_z(\text{innen}) = \frac{\mu_0 N}{\ell} I = \mu_0 n I \quad (4.1.33)$$

#### 4.1.6. Endlich lange Spule



**Abb. 4.9.:** Berechnung einer endlichen Spule: Variablen und Geometrie.

Bei einer endlich langen Spule können wir wie bei der unendlich langen Spule (Abschnitt 4.1.5) vorgehen:

- Die Spule soll die Länge  $\ell$  haben, und um  $z = 0$  zentriert sein.
- Sie habe den Radius  $r$  und die Querschnittsfläche  $A = \pi r^2$ .
- Wir betrachten einen Kreisring (rot) bei  $z = \zeta$ .

- Wir nehmen an, dass die Spule viel länger sei als ihr Radius:  $\ell \gg r$ .
- Das Feld auf der  $z$ -Achse ergibt sich dann durch Integration über  $\zeta$  von  $-\frac{\ell}{2}$  bis  $\frac{\ell}{2}$ .

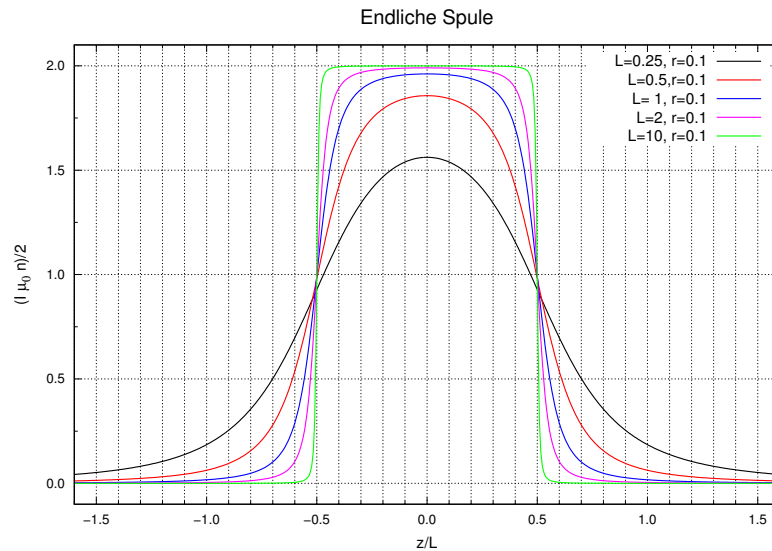
Wir beginnen mit Gleichung (4.1.30). Mit der Dichte der Windungen  $n$  (Windungen pro Länge) bekommen wir den Beitrag der roten «Wicklung»:

$$dB_z = \frac{\mu_0 n I r^2}{2 (r^2 + (z - \zeta)^2)^{3/2}} d\zeta \quad (4.1.34)$$

Das Integral von  $-\frac{\ell}{2}$  bis  $\frac{\ell}{2}$  ist

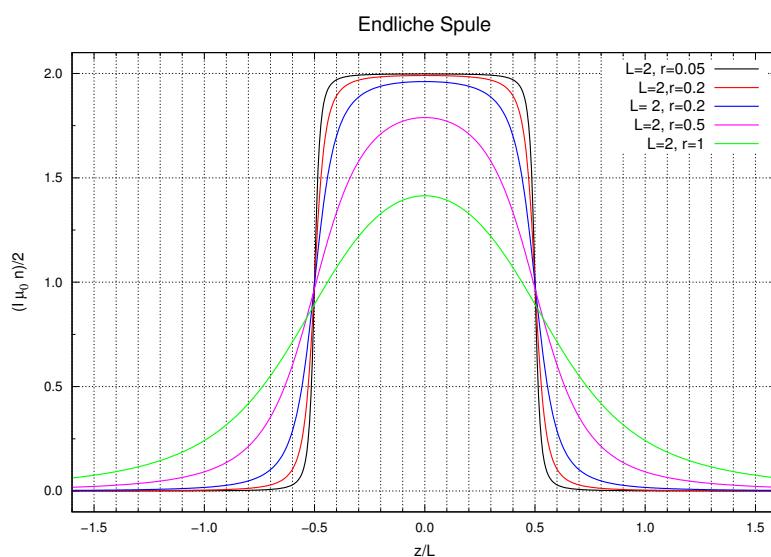
$$\begin{aligned} B_z(z) &= \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \frac{\mu_0 n I r^2}{2 (r^2 + (z - \zeta)^2)^{3/2}} d\zeta \\ &= \frac{I \mu_0 n}{2} \left( \frac{\ell - 2z}{\sqrt{(\ell - 2z)^2 + 4r^2}} + \frac{\ell + 2z}{\sqrt{(\ell + 2z)^2 + 4r^2}} \right) \end{aligned} \quad (4.1.35)$$

Gleichung (4.1.35) ergibt die in Abbildung 4.10 gezeigten Verläufe der magnetischen Induktion  $B_z(z)$ . Dabei wurde der Spulenradius  $r = 0.1$  gesetzt und die Länge  $\ell$  variiert.



**Abb. 4.10.:** Induktion auf der Symmetrieachse einer endlich langen Spule. Die Werte von  $\ell = L$  und  $r$  sind in der Legende angegeben. Hier ist  $r$  konstant.

Abbildung 4.11 zeigt, was passiert wenn der Radius der Spule  $r$  bei konstanter Länge  $\ell$  geändert wird.



**Abb. 4.11.:** Induktion auf der Symmetrieachse einer endlich langen Spule. Die Werte von  $\ell = L$  und  $r$  sind in der Legende angegeben. Hier ist  $\ell$  konstant.

### 4.1.7. Transformator

Der magnetische Fluss in einer Spule entsteht durch Ströme in dieser Spule selber, oder in anderen Spulen. Nach dem Gesetz von Laplace oder Biot-Savart (Siehe Gleichung (3.8.55)) ist die magnetische Induktion proportional zum STROM. Somit ist auch der Fluss  $\phi_B$  proportional zum STROM. Diese Proportionalität wird mit

$$\phi_B = L \cdot I \quad (4.1.36)$$

ausgedrückt, wobei  $L$  die SELBSTINDUKTIVITÄT der Spule ist. Die Einheit der Induktivität ist

$$[L] = \text{Henry} = \text{H} = \text{Wb A}^{-1} = \text{T m}^2 \text{ A}^{-1}$$

In den meisten Fällen ist es schwierig, die Selbstinduktivität einer Schaltung zu berechnen. Für eine lange, dicht gewickelte Spule ergibt Gleichung (4.1.33) die magnetische Induktion

$$B = \mu_0 \frac{N}{\ell} I \quad (4.1.37)$$

Dabei ist  $N = n \cdot \ell$  die Anzahl Windungen auf der Länge  $\ell$ . Die magnetische Induktion  $B$  hängt von der Dichte der Windungen ab, nicht aber von der Länge der Spule. Für den Fluss  $\Phi_B$  brauchen wir die magnetische Induktion und die **gesamte** eingeschlossene Fläche. Die Spule habe den Querschnitt  $A$ . Diese gesamte eingeschlossene Fläche ist dann  $N$  mal die Fläche  $A$  einer einzelnen Windung, also  $N \cdot A$ . Deshalb ist der Fluss

$$\phi_B = B \cdot (N \cdot A) = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} I \cdot A = \mu_0 n^2 A \ell I \quad (4.1.38)$$

Damit ist die Induktivität der Spule

$$L = \frac{\phi_B}{I} = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} A = \mu_0 n^2 A \ell \quad (4.1.39)$$

Die magnetische Permeabilität  $\mu_0$  kann also auch als

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H m}^{-1} \quad (4.1.40)$$

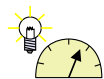
Die Änderung der Stromstärke bedingt eine Änderung des magnetischen Flusses.

$$\frac{d\phi_B}{dt} = \frac{d(LI)}{dt} = L \frac{dI}{dt} \quad (4.1.41)$$

Somit wird mit Gleichung (4.1.5)

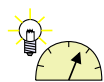
$$U = -\frac{d\phi_B}{dt} = -L \frac{dI}{dt} \quad (4.1.42)$$

Mit dieser Gleichung wird die Funktionsweise des FUNKENINDUKTORS klar.



#### Versuch 49: Versuch zur Vorlesung:

Funkeninduktor ([Versuchskarte EM-017](#), [Video](#))



#### Versuch 50: Versuch zur Vorlesung:

Funkeninduktor ([Versuchskarte EM-017](#), [Video \(VPN oder intern\)](#))

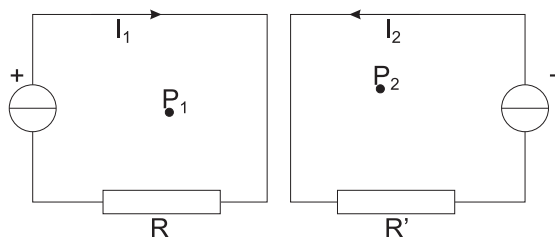


Abb. 4.12.: Zwei gekoppelte Stromkreise

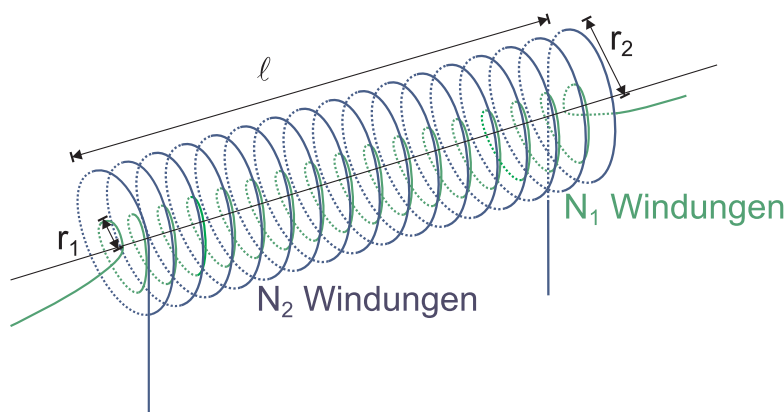
Der magnetische Fluss am Punkt  $P_2$  hängt sowohl vom STROM  $I_2$  wie auch vom STROM  $I_1$  ab:

$$\phi_B(P_2) = L_2 \cdot I_2 + M_{12} \cdot I_1 \quad (4.1.43)$$

Ebenso hängt der magnetische Fluss am Punkt  $P_1$  von beiden Strömen ab

$$\phi_B(P_1) = L_1 \cdot I_1 + M_{21} \cdot I_2 \quad (4.1.44)$$

Neben der SELBSTINDUKTIVITÄT  $L_i$  müssen bei realen Systemen auch die GEGENINDUKTIVITÄTEN  $M_{ij}$  berücksichtigt werden. Wie bei den Induktivitäten hängt auch bei den Gegeninduktivitäten die Grösse allein von der Geometrie ab.



**Abb. 4.13.:** Symbolische Darstellung eines TRANSFORMATORS

Im allgemeinen ist es schwierig, die Gegeninduktivitäten zu berechnen. Bei zwei ineinander gewickelten Spulen, einem Beispiel für einen TRANSFORMATOR, gelingt dies. Wir wollen das Beispiel verwenden, um zu zeigen, dass  $M_{12} = M_{21}$  ist. Durch die Spule 1 (Länge  $\ell$ , Radius  $r_1$ , Windungsdichte  $n_1 = N_1/\ell$ ) fliesst der Strom  $I_1$ , durch die zweite Spule 2 (Länge  $\ell$ , Radius  $r_2$ , Windungsdichte  $n_2 = N_2/\ell$ ) soll der Strom  $I_2$  fließen. Da wir lange Spulen betrachten, ist das Magnetfeld im Inneren der Spulen homogen. Also ist

$$B_1 = \mu_0 n_1 I_1 \quad (4.1.45)$$

Ausserhalb der Spule 1 ist das Magnetfeld  $B_1 = 0$  (Annahme einer langen Spule). Deshalb ist der Fluss durch den STROM  $I_1$  für die Spule 2 gegeben durch

$$\phi_{B_2} = N_2 \cdot B_1(\pi r_1^2) = n_2 \ell B_1(\pi r_1^2) = \mu_0 n_1 n_2 \ell (\pi r_1^2) I_1 \quad (4.1.46)$$

Die Gegeninduktivität  $M_{12}$  ist also

$$M_{12} = \frac{\phi_{B_2}}{I_1} = \mu_0 n_1 n_2 \ell (\pi r_1^2) \quad (4.1.47)$$

Im entgegengesetzten Falle beginnen wir mit

$$B_2 = \mu_0 n_2 I_2 \quad (4.1.48)$$

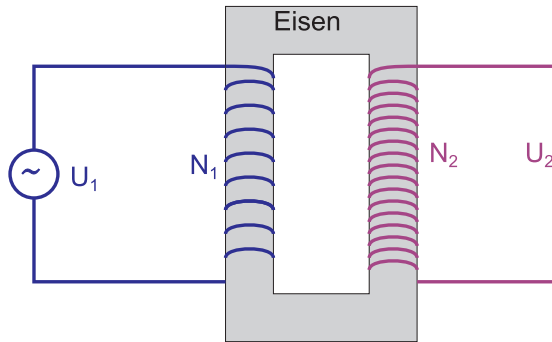
Der für die Spule 1 relevante Fluss ist durch die von der Spule 1 umschlossene Fläche, also  $N_1(\pi r_1^2)$  gegeben.

$$\phi_{B_1} = N_1 \cdot B_2(\pi r_1^2) = n_1 \ell \mu_0 n_2 I_2 (\pi r_1^2) = \mu_0 n_1 n_2 \ell (\pi r_1^2) I_2 \quad (4.1.49)$$

Damit wird die Gegeninduktivität

$$M_{21} = \frac{\phi_{B_1}}{I_2} = \mu_0 n_1 n_2 \ell (\pi r_1^2) = M_{12} \quad (4.1.50)$$

Diese Beziehung, die an einem Spezialfall gezeigt wurde, gilt auch allgemein (ohne Beweis).



**Abb. 4.14.:** Schematischer Aufbau eines TRANSFORMATORS

Die in einem Transformator INDUZIERTES SPANNUNG kann wie folgt berechnet werden. In der Spule 1 fällt die SPANNUNG

$$U_{L,1} = N_1 \frac{d\phi_B}{dt} \quad (4.1.51)$$

ab. Diese SPANNUNG muss durch die Wechselspannungsquelle  $U$  erzeugt werden, so dass

$$U = U_{L,1} = N_1 \frac{d\phi_B}{dt} \quad (4.1.52)$$

ist. Durch die Anordnung des Eisens wird erreicht, dass der gesamte durch die erste Spule erzeugte magnetische Fluss durch die zweite Spule fließt. Dort haben wir die INDUZIERTES SPANNUNG

$$U_2 = -N_2 \frac{d\phi_B}{dt} \quad (4.1.53)$$

und somit

$$U_2 = -\frac{N_2}{N_1} U_1 \quad (4.1.54)$$

$N_2/N_1$  heisst der ÜBERSETZUNGSFAKTOR des Transformators.

Wird der Ausgang des Transformators mit dem OHMSCHEN WIDERSTAND  $R$  belastet, fließt der STROM  $I_2$ , der zu  $U_2$  in Phase ist. Dieser STROM erzeugt einen magnetischen Fluss  $\phi'_B \propto N_2 I_2$ , der den ursprünglichen Fluss  $\phi_B$  durch die Spule 2

schwächt. Da durch beide Spulen der gleiche magnetische Fluss fließt, muss auch der Fluss durch die erste Spule geschwächt werden. Da die SPANNUNG durch die Spannungsquelle  $U$  vorgegeben ist, muss der STROM  $I_1$  auf der Primärseite zusätzlich fließen, so dass  $\phi'_B \propto N_1 I_1$  gilt. Da die Proportionalitätsfaktoren bis auf das Vorzeichen gleich sind, gilt dann auch

$$I_2 = -\frac{N_1}{N_2} I_1 \quad (4.1.55)$$

Wenn wir die Effektivwerte betrachten haben wir damit

$$U_2 I_2 = \left[ -\frac{N_2}{N_1} U_1 \right] \left[ -\frac{N_1}{N_2} I_1 \right] = U_1 I_1 \quad (4.1.56)$$

sofern man Verluste vernachlässigt. **Ideale Transformatoren übertragen also verlustfrei Leistung.**



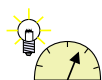
#### Versuch 51: Versuch zur Vorlesung:

Hochspannungsleitung ([Versuchskarte EM-161](#), [Video](#))



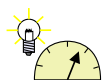
#### Versuch 52: Versuch zur Vorlesung:

Hochspannungsleitung ([Versuchskarte EM-161](#), [Video \(VPN oder intern\)](#))



#### Versuch 53: Versuch zur Vorlesung:

Transformatorenversuche, Teil Hochspannung ([Versuchskarte EM-066](#), [Video](#))



#### Versuch 54: Versuch zur Vorlesung:

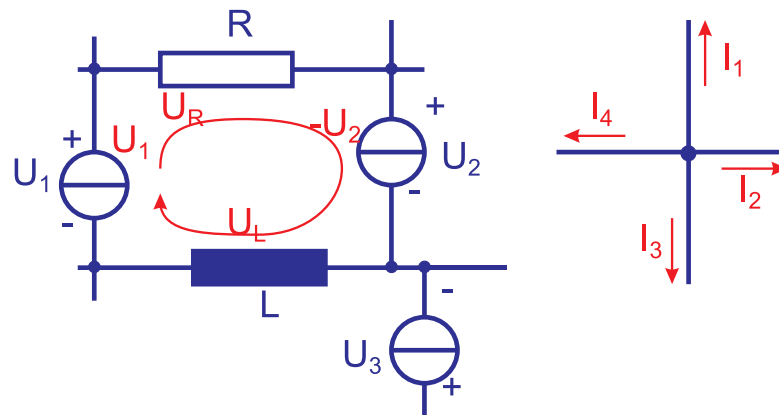
Transformatorenversuche, Teil Hochstrom ([Versuchskarte EM-066](#), [Video](#))



#### Versuch 55: Versuch zur Vorlesung:

Transformatorenversuche ([Versuchskarte EM-066](#), [Video \(VPN oder intern\)](#))

### 4.1.8. Kirchhoffsche Gesetze



**Abb. 4.15.:** Kirchhoffsche Gesetze: links die MASCHENREGEL, rechts die KNOTENREGEL.

In einer komplizierten elektrischen Schaltung betrachtet man eine einzelne Masche. Nach der Definition der EMK muss eine Probeladung langsam um die Masche herumgeführt werden. Dies führt auf die Maschenregel

$$\sum_{\forall k \text{ Quellen}} U_k = \sum_{\forall j \text{ Verbraucher}} U_j \quad (4.1.57)$$

wobei die Vorzeichen entsprechend dem Umlaufsinn einzusetzen sind. In unserem Beispiel bedeutet dies:

$$U_1 - U_2 = U_R + U_L$$

Die Knotenregel ist ein Ausdruck für die Ladungserhaltung. Wenn wir zum Beispiel alle zufließenden Ströme positiv und alle wegfließenden Ströme negativ zählen (oder umgekehrt), gilt an jedem Knoten

$$\sum_{\forall k \text{ eines Knotens}} I_k = 0 \quad (4.1.58)$$

Mit diesen beiden Regeln sowie der Kenntnis der Charakteristika der Bauelemente kann jede statische oder quasistatische elektronische Schaltung berechnet werden.

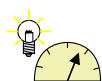


#### Versuch 56: Versuch zur Vorlesung:

Berechnung von Spannungen in einem Netzwerk ([Versuchskarte Applet](#))



### 4.1.9. Wechselstromkreise, Impedanzen



#### Versuch 57: Versuch zur Vorlesung:

Einfache Wechselstromkreise ([Versuchskarte Applet](#))

In diesem Abschnitt betrachten wir die Wirkung von cosinusförmigen Wechselspannungen

$$U \equiv U(t) = U_0 \cos(\omega t - \varphi) \quad (4.1.59)$$

Alternativ können die Spannungen und Ströme auch als komplexe Zahlenwerte geschrieben werden

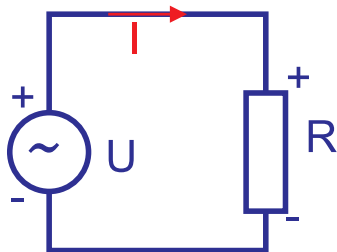
$$U \equiv U(t) = U_0 e^{i(\omega t - \varphi)} \quad (4.1.60)$$

Diese Rechnung mit komplexen Zahlen ist oft einfacher. Sie wird häufig in der Elektrotechnik verwendet.

**Vorsicht:** Die komplexe Schreibweise gilt nur bei linearen Gleichungen. Wenn nichtlineare Funktionen vorhanden sind, muss anstelle von  $U(t)$  mit  $\frac{1}{2} (U(t) + U^*(t))$  verwendet werden. Für andere Größen gilt dies analog.

#### 4.1.9.1. Ohmscher Widerstand im Wechselstromkreis

Die Zeitskala für die Wechselspannung wird so gewählt, dass  $\varphi = 0$  ist. Weiter setzen wir voraus, dass die zeitliche Änderung aller Größen so gering sind, dass wir wie im stationären Falle rechnen können, das ist der quasistationäre Fall.



**Abb. 4.16.:** Definition von Strömen und Spannungen bei Wechselspannungen

Da bei Wechselspannungen a priori keine Stromrichtung vorgegeben ist, definiert man, zum Beispiel wie in der Abbildung oben, die Stromrichtung zu einem bestimmten Zeitpunkt, hier für  $t = 0$ . Zu jedem Zeitpunkt muss die SPANNUNG im Stromkreis insgesamt null sein. Also ist

$$U - U_R = 0 \quad (4.1.61)$$

und mit dem Ohmschen Gesetz

$$U_0 \cos(\omega t) - I \cdot R = 0 \quad (4.1.62)$$

oder

$$I(t) = \frac{U_0}{R} \cos(\omega t) = I_0 \cos(\omega t) \quad (4.1.63)$$

Der STROM und die SPANNUNG erreichen immer dann einen Extremwert, wenn  $\omega t$  ein ganzzahliges Vielfaches von  $\pi$  ist. **Der durch einen WIDERSTAND fließende STROM ist in Phase mit der SPANNUNG.**

Die momentane Leistung am WIDERSTAND ist

$$P(t) = U(t) \cdot I(t) = U_0 \cos(\omega t) \cdot \frac{U_0}{R} \cos(\omega t) = \frac{U_0^2}{R} \cos^2(\omega t) = I_0^2 R \cos^2(\omega t) \quad (4.1.64)$$

Der Mittelwert der Leistung ist  $\langle \cos^2 \omega t \rangle_t = 1/2$

$$\langle P(t) \rangle = \frac{1}{2} \frac{U_0^2}{R} = \frac{1}{2} I^2 R \quad (4.1.65)$$

Unter dem Effektivwert der SPANNUNG (des Stromes) versteht man diejenige Gleichspannung, die an einem Ohmschen Widerstand die gleiche Verlustleistung erzeugt. Also ist für sinusförmige Spannungen

$$U_{eff} = \frac{1}{\sqrt{2}} U_0 \quad (4.1.66)$$

beziehungsweise

$$I_{eff} = \frac{1}{\sqrt{2}} I_0 \quad (4.1.67)$$

Für beliebige Spannungsverläufe (Stromverläufe) ist der Effektivwert (auch Root-Mean-Square (RMS)-Wert von «Root Mean Square »)

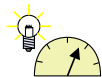
$$U_{eff} = U_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_t^{t+T} U^2(\tau) d\tau} \quad (4.1.68)$$

wobei  $T$  eine Zeit ist, die bei periodischen Signalen der Periodendauer entspricht und bei zufälligen Signalen lang gegenüber der charakteristischen Zeitdauer der Schwankungen sein muss. Für Ströme gilt die analoge Formel

$$I_{eff} = I_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_t^{t+T} I^2(\tau) d\tau} \quad (4.1.69)$$

**Versuch 58: Versuch zur Vorlesung:**

Wechselstromwiderstand (Versuchskarte EM-053, Video)

**Versuch 59: Versuch zur Vorlesung:**

Wechselstromwiderstand (Versuchskarte EM-053, Video (VPN oder intern))

**4.1.9.2. Ohmscher Widerstand im Wechselstromkreis, komplexe Rechnung**

Wieder wird die Zeitskala für die Wechselspannung so gewählt, dass  $\varphi = 0$  ist. Und wieder setzen wir voraus, dass die zeitliche Änderung aller Größen so gering sind, dass wir wie im stationären Falle rechnen können. Wir dies den quasi-stationären Fall. Wir verwenden wieder die Bedingungen und die Anordnung von Abbildung 4.16. Zu jedem Zeitpunkt muss die SPANNUNG im Stromkreis insgesamt null sein. Wir setzen  $U = U_0 \exp(i\omega t)$  mit  $U_0 \in \mathbb{R}$ . Dann ist

$$U - U_R = 0 \quad (4.1.70)$$

und mit dem Ohmschen Gesetz

$$U_0 e^{i\omega t} - I(t) \cdot R = 0 \quad (4.1.71)$$

oder

$$I(t) = \frac{U_0}{R} e^{i\omega t} = I_0 e^{i\omega t} \quad (4.1.72)$$

Komplexe Zahlen sind nicht direkt messbar, unsere Welt ist reell. Messbar sind dann

$$U_{\text{mess}}(t) = \Re(U(t)) = \Re(U_0 e^{i\omega t}) = U_0 \cos(\omega t) \quad \text{oder} \quad U_{\text{mess},2}(t) = \Im(U_0 e^{i\omega t}) = U_0 \sin(\omega t) \quad (4.1.73a)$$

$$I_{\text{mess}}(t) = \Re(I(t)) = \Re(I_0 e^{i\omega t}) = I_0 \cos(\omega t) \quad \text{oder} \quad I_{\text{mess},2}(t) = \Im(I_0 e^{i\omega t}) = I_0 \sin(\omega t) \quad (4.1.73b)$$

Entweder wird konsistent überall  $\Re$  (der Realteil) oder  $\Im$  (der Imaginärteil) verwendet.

Der durch einen WIDERSTAND fließende STROM ist als in Phase ( $\delta\varphi = 0$ ) mit der SPANNUNG.

Wie in Abschnitt 4.1.9 erwähnt, müssen wir bei der nichtlinearen Rechnung «momentane Leistung» mit konjugiert komplexen Werten rechnen. am WIDERSTAND ist

$$\begin{aligned}
P(t) &= \frac{1}{2} (U(t) + U^*(t)) \cdot \frac{1}{2} (I(t) + I^*(t)) \\
&= \frac{U_0}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) \cdot \frac{I_0}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) = \left( \frac{U_0}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) \right)^2 \frac{1}{R} \\
&= \frac{U_0^2}{4R} (e^{2i\omega t} + e^{-2i\omega t} + 2e^{i\omega t}e^{-i\omega t}) \\
&= \frac{U_0^2}{4R} (\cos(2\omega t) + i\sin(2\omega t) + \cos(-2\omega t) + i\sin(-2\omega t) + 2) \\
&= \frac{U_0^2}{4R} (\cos(2\omega t) + i\sin(2\omega t) + \cos(2\omega t) - i\sin(-2\omega t) + 2) \\
&= \frac{U_0^2}{4R} (2\cos(2\omega t) + 2) = \frac{U_0^2}{4R} 4\cos^2(\omega t) = \frac{U_0^2 \cos^2(\omega t)}{R} \quad (4.1.74)
\end{aligned}$$

oder schneller

$$\begin{aligned}
P(t) &= \Re(U(t)) \cdot \Re(I(t)) \\
&= U_0 \cos(\omega t) \cdot \frac{U_0}{R} \cos(\omega t) = \frac{U_0^2}{R} \cos^2(\omega t) = I_0^2 R \cos^2(\omega t) \quad (4.1.75)
\end{aligned}$$

Wir erhalten also die gleiche Leistung  $P(t)$  wie im Abschnitt 4.1.9.1. Die weitere Rechnung geht wie in diesem vorherigen Abschnitt.

#### 4.1.9.3. Impedanz einer Spule

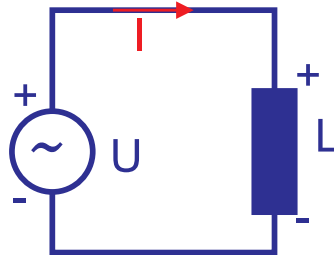


Abb. 4.17.: Spule (Induktivität) mit Wechselspannung

Wir verwenden Gleichung (4.1.42) um die SPANNUNG über der Spule zu berechnen. Die INDUZIERTER SPANNUNG ist der Flussänderung entgegengesetzt. Sie wirkt so, dass die Zunahme des Stromes bei zunehmender Anregungsspannung gebremst wird. Deshalb ist

$$U - U_L = 0 = U - L \frac{dI}{dt} \quad (4.1.76)$$

Setzen wir  $U = U_0 \cos(\omega t)$  ein, erhalten wir

$$\frac{dI}{dt} = \frac{U_0}{L} \cos(\omega t) \quad (4.1.77)$$

und damit

$$I(t) = \frac{U_0}{L} \int_0^t \cos(\omega \tau) d\tau = \frac{U_0}{L\omega} \sin(\omega t) = \frac{U_0}{L\omega} \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) \quad (4.1.78)$$

Der STROM hat also den Scheitelwert

$$I_0 = \frac{U_0}{\omega L} = \frac{U_0}{X_L} \quad (4.1.79)$$

wobei  $X_L = \omega L$  die Impedanz oder der INDUKTIVE WIDERSTAND der Spule ist. Die Einheit der Impedanz ist gleich wie die Einheit des Widerstandes, das Ohm. Der STROM folgt der SPANNUNG mit einer Phasenverschiebung von  $-\pi/2$ . Für die Effektivwerte gilt  $I_{eff} = U_{eff}/X_L$ , da für sinusförmige Spannungen und Ströme der gleiche Faktor zur Umrechnung von Scheitelwerten zu Effektivwerten verwendet werden muss.

Die momentan dissipierte Leistung an einer Spule ist

$$P(t) = U(t) \cdot I(t) = U_0 \cos(\omega t) \cdot \frac{U_0}{\omega L} \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) = \frac{U_0^2}{\omega L} \cos(\omega t) \sin(\omega t) \quad (4.1.80)$$

Die dissipierte Leistung kann sowohl positiv wie auch negativ sein. Die mittlere dissipierte Leistung ist

$$\langle P \rangle_t = \frac{U_0^2}{\omega L} \langle \cos(\omega t) \sin(\omega t) \rangle_t = 0 \quad (4.1.81)$$

Im Mittel wird also keine Leistung an einer Spule dissipiert.

#### 4.1.9.4. Impedanz einer Spule: komplex

Dieser Abschnitt zeigt die gleiche Rechnung wie in Abschnitt 4.1.9.3, aber mit komplexen Zahlen gerechnet. Die Bezeichnungen beziehen sich auf Abbildung 4.17. Wir verwenden wie in Abschnitt 4.1.9.3 die Gleichung (4.1.42) um die SPANNUNG über der Spule zu berechnen. Alles dort gesagte gilt auch hier.

$$U - U_L = 0 = U - L \frac{dI}{dt}$$

Setzen wir  $U(t) = U_0 e^{i\omega t}$  ein, erhalten wir

$$\frac{dI}{dt} = \frac{U_0}{L} e^{i\omega t} \quad (4.1.82)$$

Das ergibt

$$I(t) = \frac{U_0}{L} \int_0^t e^{i\omega \tau} d\tau = \frac{U_0}{i\omega L} e^{i\omega t} \quad (4.1.83)$$

Der Realteil des STROMES hat also den Scheitelwert

$$I_0 = |I| = \left| \frac{U_0}{i\omega L} \right| = \frac{U_0}{X_L} \quad (4.1.84)$$

wobei  $X_L = |i\omega L|$  die Impedanz oder der INDUKTIVE WIDERSTAND der Spule ist, wie vorher.

Üblich ist hier aber mit der komplexen Impedanz

$$Z_L = i\omega L \quad (4.1.85)$$

zu rechnen. Dies vereinfacht gewaltig die Berechnung von Netzwerken aus Induktivitäten, Kapazitäten und Widerständen nach Abschnitt 4.1.8. In der Elektrotechnik wird bevorzugt mit komplexen Impedanzen gerechnet, ja es gibt sogar Messgeräte dafür, die Impedanzanalysatoren [Wik20a].

Der Phasenfaktor  $-\pi/2$  in Gleichung (4.1.78) ist äquivalent zum Faktor  $1/i = -i$  in Gleichung (4.1.83).

Die momentan dissipierte Leistung an einer Spule ist mit komplexen Impedanzen gerechnet

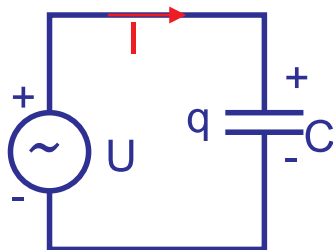
$$\begin{aligned} P(t) &= \frac{1}{2} (U(t) + U^*(t)) \cdot \frac{1}{2} (I(t) + I^*(t)) \\ &= \frac{1}{2} (U_0 e^{i\omega t} + U_0 e^{-i\omega t}) \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{U_0}{i\omega L} e^{i\omega t} - \frac{U_0}{i\omega L} e^{-i\omega t} \right) \\ &= \frac{U_0^2}{4\omega L} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) (ie^{-i\omega t} - ie^{i\omega t}) = \frac{U_0^2}{4\omega L} (i [e^{-2i\omega t} - e^{2i\omega t}]) \\ &= \frac{U_0^2}{4\omega L} (i [\cos(-2\omega t) + i \sin(-2\omega t) - (\cos(2\omega t) - i \sin(2\omega t))]) \\ &= \frac{U_0^2}{4\omega L} (-i^2 2 \sin(2\omega t)) = \frac{U_0^2}{4\omega L} (2 \sin(2\omega t)) \\ &= \frac{U_0^2}{4\omega L} (4 \cos(\omega t) \sin(\omega t)) = \frac{U_0^2}{\omega L} \cos(\omega t) \sin(\omega t) \quad (4.1.86) \end{aligned}$$

wie im Abschnitt 4.1.9.3. Natürlich hätten wir auch

$$\begin{aligned} P(t) &= \Re U(t) \cdot \Re I(t) = \Re (U_0 e^{i\omega t}) \cdot \Re \left( \frac{U_0}{i\omega L} e^{i\omega t} \right) \\ &= U_0 \cos(\omega t) \cdot \frac{U_0}{\omega L} \sin(\omega t) = \frac{U_0^2}{\omega L} \cos(\omega t) \sin(\omega t) \quad (4.1.87) \end{aligned}$$

rechnen können. Der Rest ist dann wie in Abschnitt 4.1.9.3.

#### 4.1.9.5. Impedanz eines Kondensators



**Abb. 4.18.:** Kondensator mit Wechselspannung

Beim Kondensator ist  $U_C = q/C$ . Diese SPANNUNG muss gleich der treibenden SPANNUNG sein.

$$U - U_C = 0 = U - \frac{q}{C} \quad (4.1.88)$$

Wir setzen  $U$  ein und erhalten

$$q = C \cdot U_0 \cos(\omega t) \quad (4.1.89)$$

Der STROM ist dann

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt} C \cdot U_0 \cos(\omega t) = -C\omega \cdot U_0 \sin(\omega t) = C\omega \cdot U_0 \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) \quad (4.1.90)$$

Wir nennen

$$X_C = \frac{1}{\omega C} \quad (4.1.91)$$

die Impedanz des Kondensators. Der Scheitelwert des Stromes ist

$$I_0 = \omega C U_0 \quad (4.1.92)$$

Analog wie bei der Spule gilt die Gleichung  $I_{eff} = U_{eff}/X_C$  mit der gleichen Begründung auch für Kondensatoren. Die momentan dissipierte Leistung ist

$$P(t) = \omega C U_0^2 \cos(\omega t) \sin(\omega t) \quad (4.1.93)$$

Sie ist, analog wie bei der Spule, positiv oder negativ. Deshalb ist die mittlere dissipierte Leistung

$$\langle P(t) \rangle_t = \omega C U_0^2 \langle \cos(\omega t) \sin(\omega t) \rangle_t = 0 \quad (4.1.94)$$

#### 4.1.9.6. Impedanz eines Kondensators: komplex

Dieser Abschnitt zeigt die gleiche Rechnung wie in Abschnitt 4.1.9.5, aber mit komplexen Zahlen gerechnet. Die Bezeichnungen beziehen sich auf Abbildung 4.18. Alles dort gesagte gilt auch hier.

$$U - U_C = 0 = U - \frac{q}{C}$$

Setzen wir  $U(t) = U_0 e^{i\omega t}$  ein, erhalten wir

$$q(t) = C \cdot U_0 e^{i\omega t} \quad (4.1.95)$$

Der STROM ist dann

$$I(t) = \frac{dq(t)}{dt} = \frac{d}{dt} C \cdot U_0 e^{i\omega t} = i\omega C \cdot U_0 e^{i\omega t} \quad (4.1.96)$$

Wir nennen

$$Z_C = \frac{1}{i\omega C} \quad (4.1.97)$$

die komplexe Impedanz des Kondensators. Der Realteil des Stromes hat den Scheitelwert

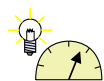
$$I_0 = |I| = \omega C U_0 \quad (4.1.98)$$

Die momentan dissipierte Leistung ist mit einer analogen Rechnung wie bei der komplexen Impedanz der Spule in Gleichung (4.1.86)

$$P(t) = \omega C U_0^2 \cos(\omega t) \sin(\omega t) \quad (4.1.99)$$

Sie ist, analog wie bei der Spule, positiv oder negativ. Deshalb ist auch hier die mittlere dissipierte Leistung null.

#### 4.1.9.7. Idealer elektrischer Schwingkreis



##### Versuch 60: Versuch zur Vorlesung:

Elektrischer Schwingkreis (Versuchskarte SW-022, Video (VPN oder intern))



##### Versuch 61: Versuch zur Vorlesung:

Elektrischer Schwingkreis (Versuchskarte Applet)



##### Versuch 62: Versuch zur Vorlesung:

Elektrischer Schwingkreis (Versuchskarte Applet)



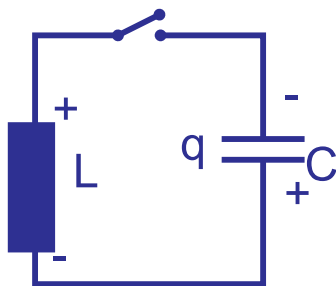


Abb. 4.19.: SCHWINGKREIS

Der Kondensator soll zur Zeit  $t = 0$  auf die SPANNUNG  $U_{C,0}$  aufgeladen sein. Zur Zeit  $t = 0$  wird der Schalter geschlossen. Die Differentialgleichung dieser Schaltung lautet:

$$L \frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} = 0 \quad (4.1.100)$$

Wir differenzieren einmal und bekommen

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{1}{LC} I = 0 \quad (4.1.101)$$

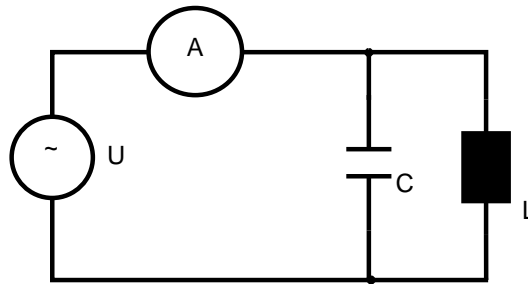
Dies ist die aus der Mechanik bekannte Schwingungsdifferentialgleichung. Durch Analogieschluss sieht man, dass die Resonanzkreisfrequenz

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad (4.1.102)$$

ist.

#### 4.1.9.8. Idealer elektrischer Schwingkreis: komplex

Dieser Abschnitt bezieht sich auf den vorherigen Abschnitt 4.1.9.7. Hier betrachten wir einen getriebenen Schwingkreis. Die treibende Spannung sei  $U = U_0 \exp(i\omega t)$ . Wir interessieren uns für den resultierenden Strom  $I(t) = I_0 \exp(i\omega t + \varphi)$ . Anders gesagt, wir suchen die komplexe Impedanz  $Z$  der Schaltung, dann kann  $I(t) = U(t)/Z$  leicht berechnet werden.



**Abb. 4.20.:**  $LC$ -Parallelschwingkreis komplex.  $A$  stellt ein Ampèremeter zur Messung des Stromes dar.

In Abbildung 4.20 haben wir eine Parallelschaltung der Impedanzen  $Z_C$  und  $Z_L$ . Die resultierende Impedanz ist dann

$$Z = \frac{1}{\frac{1}{Z_C} + \frac{1}{Z_L}} = \frac{1}{i\omega C + \frac{1}{i\omega L}} = \frac{i\omega L}{1 - \omega^2 LC} \quad (4.1.103)$$

Damit ist das Problem kurz und schmerzlos gelöst. Wenn wir Gleichung (4.1.103) analysieren, realisieren wir, dass

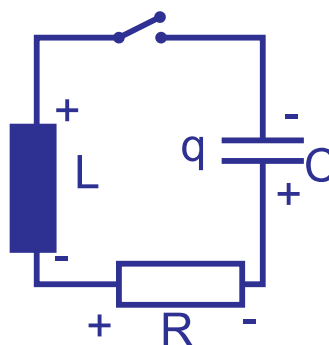
$$\lim_{\omega \rightarrow (LC)^{-1/2}} Z = \infty \quad (4.1.104)$$

ist. Wir nennen die Kreisfrequenz

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (4.1.105)$$

die Resonanzkreisfrequenz des ungedämpften Schwingkreises, ein Resultat, das wir in Abschnitt 4.1.9.7 über die Lösung einer Differenzialgleichung bekommen haben.

#### 4.1.9.9. Gedämpfter elektrischer Schwingkreis



**Abb. 4.21.:** SCHWINGKREIS mit WIDERSTAND

Der GEDÄMPFTE SCHWINGKREIS enthält neben dem Kondensator und der Spule auch einen WIDERSTAND. Die Differentialgleichung des gedämpften SCHWINGKREISES ist

$$L \frac{dI}{dt} + R \cdot I + \frac{Q}{C} = 0 \quad (4.1.106)$$

Wir differenzieren einmal und bekommen

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI}{dt} + \frac{1}{LC} I = 0 \quad (4.1.107)$$

Analog zur Mechanik ist die  $\frac{R}{L}$  der Dämpfungsterm. Das in der Mechanik berechnete Verhalten eines schwingungsfähigen Systems gilt auch für den elektrischen SCHWINGKREIS.

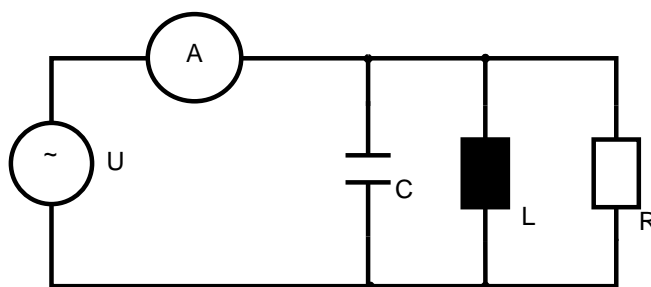
Wenn der ELEKTRISCHE SCHWINGKREIS von einer WECHSELSPANNUNGSQUELLE getrieben wird, ergeben sich die gleichen Phänomene wie bei einem getriebenen Pendel, also auch eine Resonanz.

### Anwendungen

- Schwingkreise zur SIGNALFILTERUNG in Radioempfängern
- Verhalten von langen Leitungen
- Verhalten elektrischer Maschinen

#### 4.1.9.10. Gedämpfter elektrischer Schwingkreis: komplex

Dieser Abschnitt bezieht sich auf den vorherigen Abschnitt 4.1.9.9. Hier betrachten wir einen getriebenen Schwingkreis. Die treibende Spannung sei  $U = U_0 \exp(i\omega t)$ . Wir interessieren uns für den resultierenden Strom  $I(t) = I_0 \exp(i\omega t + \varphi)$ . Anders gesagt, wir suchen die komplexe Impedanz  $Z$  der Schaltung, dann kann  $I(t) = U(t)/Z$  leicht berechnet werden.



**Abb. 4.22.:**  $RLC$ -Parallelschwingkreis komplex. Der Widerstand  $R$  gibt eine Dämpfung der Schwingung.  $A$  stellt ein Ampèremeter zur Messung des Stromes dar.

In Abbildung 4.22 haben wir eine Parallelschaltung der Impedanzen  $Z_C$ ,  $Z_L$  und  $R$ . Die resultierende Impedanz ist dann

$$Z = \frac{1}{\frac{1}{Z_C} + \frac{1}{Z_L} + \frac{1}{R}} = \frac{1}{i\omega C + \frac{1}{i\omega L} + \frac{1}{R}} = \frac{i\omega L}{1 + i\frac{L}{R}\omega - \omega^2 L C} \quad (4.1.108)$$

Damit ist das Problem kurz und schmerzlos gelöst. Wenn wir Gleichung (4.1.108) analysieren, haben wir anders als beim ungedämpften Parallelschwingkreis (4.1.103) keine Nullstelle mehr im Nenner. Analog zum gedämpften harmonischen Oszillator ist

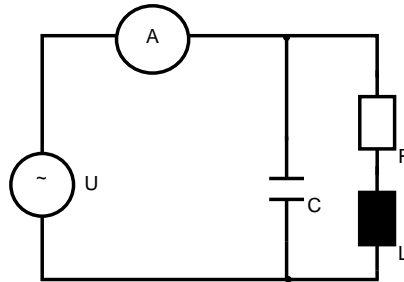
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (4.1.109)$$

die Resonanzkreisfrequenz des ungedämpften Schwingkreises und

$$b = \frac{L}{R} \quad (4.1.110)$$

die frequenzproportionale Dämpfung.

Ein mechanischer gedämpfter harmonischer Oszillator kann mit einem  $RLC$ -Parallelschwingkreis elektrisch simuliert werden.



**Abb. 4.23.:** Zweite Möglichkeit eines  $RLC$ -Parallelschwingkreises. Der Widerstand  $R$  gibt eine Dämpfung der Schwingung.  $A$  stellt ein Ampèremeter zur Messung des Stromes dar.

In Abbildung 4.23 haben wir eine Parallelschaltung der Impedanzen  $Z_C$  und  $Z_L + R$ . Die resultierende Impedanz ist dann

$$Z = \frac{1}{\frac{1}{Z_C} + \frac{1}{Z_L + R}} = \frac{1}{i\omega C + \frac{1}{i\omega L + R}} = \frac{R + i\omega L}{1 + iRC\omega - \omega^2 LC} \quad (4.1.111)$$

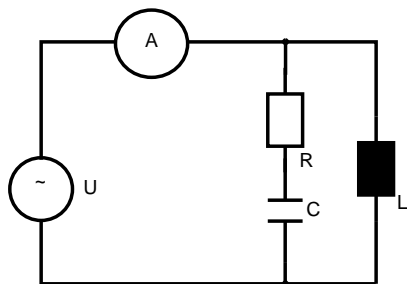
Damit ist das Problem kurz und schmerzlos gelöst. Wenn wir Gleichung (4.1.111) analysieren, haben wir anders als beim ungedämpften Parallelschwingkreis (4.1.103) keine Nullstelle mehr im Nenner. Analog zum gedämpften harmonischen Oszillator ist

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (4.1.112)$$

die Resonanzkreisfrequenz des ungedämpften Schwingkreises und

$$b = RC \quad (4.1.113)$$

die frequenzproportionale Dämpfung. Der Unterschied zur Schaltung in Abbildung 4.22 ist die Impedanz bei  $\omega \rightarrow 0$ . Diese ist hier gleich  $R$  und damit ungleich null.



**Abb. 4.24.:** Dritte Möglichkeit eines  $RLC$ -Parallelschwingkreises. Der Widerstand  $R$  gibt eine Dämpfung der Schwingung.  $A$  stellt ein Ampèremeter zur Messung des Stromes dar.

In Abbildung 4.24 haben wir eine Parallelschaltung der Impedanzen  $Z_C + R$  und  $Z_L$ . Die resultierende Impedanz ist dann

$$Z = \frac{1}{\frac{1}{Z_C + R} + \frac{1}{Z_L}} = \frac{1}{\frac{1}{R + \frac{1}{i\omega C}} + \frac{1}{i\omega L}} = \frac{i\omega L - C L R \omega^2}{1 + iRC\omega - \omega^2 LC} \quad (4.1.114)$$

Damit ist das Problem wieder kurz und schmerzlos gelöst. Wenn wir Gleichung (4.1.114) analysieren, haben wir anders als beim ungedämpften Parallelschwingkreis (4.1.103) keine Nullstelle mehr im Nenner. Analog zum gedämpften harmonischen Oszillator ist

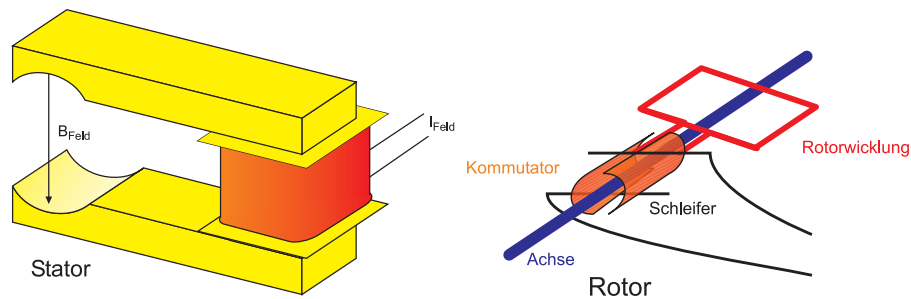
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (4.1.115)$$

die Resonanzkreisfrequenz des ungedämpften Schwingkreises und

$$b = RC \quad (4.1.116)$$

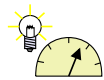
die frequenzproportionale Dämpfung. Der Unterschied zur Schaltung in Abbildung 4.22 ist die Impedanz bei  $\omega \rightarrow \infty$ . Diese ist hier gleich  $R$  und damit ungleich null.

### 4.1.10. Elektromotoren



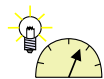
**Abb. 4.25.:** Bestandteile eines Elektromotors. Links der Stator, rechts der Rotor mit dem Kommutator.

Ein Elektromotor besteht aus zwei Teilen, dem STATOR, der das Magnetfeld  $\mathbf{H}$  erzeugt und dem ROTOR, der in diesem Magnetfeld rotiert. Die Richtung des Stromflusses im ROTOR wird durch den KOMMUTATOR gesteuert.



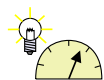
**Versuch 63: Versuch zur Vorlesung:**

Elektromotor und -generator (Versuchskarte EM-101, Video)



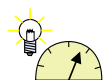
**Versuch 64: Versuch zur Vorlesung:**

Elektromotor und -generator (Versuchskarte EM-101, Video (VPN oder intern))



**Versuch 65: Versuch zur Vorlesung:**

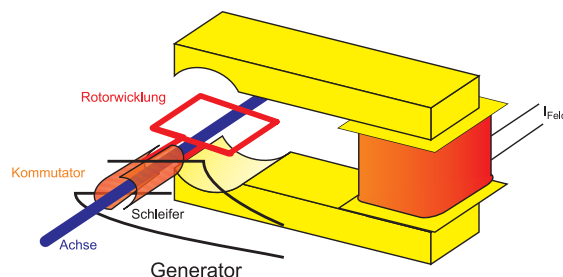
Simulation Elektromotor (Versuchskarte Applet)



**Versuch 66: Versuch zur Vorlesung:**

Simulation von Gleich- und Wechselstromgeneratoren (Versuchskarte Applet)

#### 4.1.10.1. Rotierende Leiterschleife als Generator



**Abb. 4.26.:** Dieses Bild zeigt einen aufgebauten Elektromotor.

Wenn in Abbildung 4.26 das Feld des Stators existiert und der Rotor durch einen externen Antrieb bewegt wird, wirkt die Einrichtung auch als Generator. Wir betrachten also zuerst den Elektromotor als Generator. Der Fluss durch die Leiterschleife mit  $N$  Windungen, einer Fläche  $A$  und einem Widerstand  $R$  ist

$$\phi_B(t) = N B (A \cos(\Theta(t))) \quad (4.1.117)$$

wobei  $\Theta$  der Winkel zwischen der Normalen der Fläche der Leiterschleife und der Richtung des Magnetfeldes ist. Mit  $\Theta = \omega t + \delta$  wird der zeitabhängige Fluss durch eine sich mit  $\omega$  drehende Leiterschleife

$$\phi_B(t) = N B A \cos(\omega t + \delta) \quad (4.1.118)$$

Durch Ableiten erhält man die Induktionsspannung

$$U_i(t) = -\frac{d\phi_B(t)}{dt} = -N B A \frac{d}{dt} \cos(\omega t + \delta) = N B A \omega \sin(\omega t + \delta) \quad (4.1.119)$$

Die induzierte effektive SPANNUNG ist

$$U_{eff,i} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t-T}^t (N B A \omega \sin(\omega t + \delta))^2 dt} = \frac{N B A \omega}{\sqrt{2}} \quad (4.1.120)$$

#### 4.1.10.2. Rotierende Leiterschleife als Nebenschlussmotor

Wenn die Leiterschleife mit  $N$  Windungen mit SPANNUNG versorgt wird, arbeitet sie als Motor. Die Leiterschleife habe, wie oben erwähnt, den Widerstand  $R$ . Die angelegte Spannung sei  $U_0$  und konstant. Für die folgende Rechnung setzen wir  $\delta = 0$ .

Durch den STROM  $I(t)$  wird nach Gleichung (3.8.24) mit dem magnetischen Moment  $m = N A I$  ein Drehmoment

$$T(t) = N A B \cdot I(t) \cdot \sin(\omega t) \quad (4.1.121)$$

erzeugt<sup>1</sup>. Während in Gleichung (4.1.117) der Winkel  $\Theta(t)$  der Winkel zwischen der Flächennormale und der Richtung der magnetischen Induktion  $\mathbf{B}$  ist, ist hier der gleiche Winkel der Winkel zwischen dem magnetischen Moment der Leiterschleife  $\mathbf{m}(t)$  und der magnetischen Induktion  $\mathbf{B}$ . Das Drehmoment ist nach Gleichung (3.8.25) durch  $\mathbf{T}_{NSM} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$  gegeben. Das momentane magnetische Moment hängt vom momentanen Strom ab, und damit auch das momentane Drehmoment. Beide hängen damit von der wirkenden Spannung  $U_r(t) = U_0 - U_i(t)$  ab

$$I(t) = \frac{U_r(t)}{R} = \frac{U_0 - U_i(t)}{R} = \frac{U_0}{R} - \frac{NBA}{R} \omega \sin(\omega t) \quad (4.1.122)$$

Unser Motor hat einen Kommutator, der nach einer halben Umdrehung das Vorzeichen der angelegten Spannung invertiert. Wir müssen also mit den Strömen

$$I_+(t) = \frac{U_r(t)}{R} = \frac{U_0 - U_i(t)}{R} = \frac{U_0}{R} - \frac{NBA}{R} \omega \sin(\omega t) \quad (4.1.123a)$$

$$I_-(t) = \frac{U_r(t)}{R} = \frac{-U_0 - U_i(t)}{R} = -\frac{U_0}{R} - \frac{NBA}{R} \omega \sin(\omega t) \quad (4.1.123b)$$

rechnen. Das Drehmoment wird dann

$$T_{NSM}(t) = N A B \cdot I(t) \cdot \sin(\omega t + \delta) = N A B \cdot \left( \frac{U_0}{R} - \frac{NBA}{R} \omega \sin(\omega t) \right) \cdot \sin(\omega t) \quad (4.1.124)$$

Dabei muss für  $I(t)$  die beiden Teilströme eingeteilt werden. Das Drehmoment als Funktion der Zeit ist dann

$$T_{NSM}(t) = -\frac{N^2 A^2 B^2 \omega}{R} \sin^2(\omega t) + \frac{N A B}{R} \sin(\omega t) \begin{cases} U_0, & \text{wenn } 2j\pi \leq \omega t < (2j+1)\pi; \\ -U_0, & \text{wenn } (2j+1)\pi \leq \omega t < 2(j+1)\pi. \end{cases} \quad (j \in \mathbb{Z}) \quad (4.1.125)$$

Das mittlere Drehmoment bei einem Motor, bei dem der Kommutator immer bei dem Winkel, bei dem das Drehmoment null wird, das Vorzeichen ändert, ist bei  $\omega = 2\pi/T$ ,  $T$  die Dauer einer Umdrehung.

$$T_{NSM,eff} = \frac{1}{T} \int_0^T T_{NSM}(t) dt = \frac{4N A B U_0}{\pi R} - \frac{N^2 A^2 B^2 \omega}{R} \quad (4.1.126)$$

Im Mittel ist das Drehmoment des ruhenden Motors

$$T_{NSM,eff}(0) = T_{NSM,max} = \frac{4N A B U_0}{\pi R}. \quad (4.1.127)$$

Die maximale Drehzahl ist (wenn  $T_{NSM,eff}(\omega_{max}) = 0$ )

$$\omega_{max} = \frac{4U_0}{\pi N A B} \quad (4.1.128)$$

<sup>1</sup>Beachte die Phasenverschiebung zwischen magnetischem Fluss und Drehmoment!



Diese Charakteristik (NEBENSCHLUSSMOTOR) hat man immer dann, wenn das erregende Feld  $B$  unabhängig von der Drehzahl ist, bei Permanentmagneten oder wenn die Spule für die Erregerwicklung parallel zum Anker angeschlossen ist. Will man die Drehzahl erhöhen, muss man das Feld  $B$  schwächen.

**4.1.10.2.1. Gemittelte Betrachtung** Die vorherige Betrachtung kann auch gemittelt durchgeführt werden.

$$T_{NSM} = N A B \cdot I \cdot \sin(\omega t + \delta). \quad (4.1.129)$$

Das mittlere Drehmoment bei einem Motor, bei dem der Kommutator immer bei dem Winkel, bei dem das Drehmoment null wird, das Vorzeichen ändert, ist

$$T_{NSM,eff} = \frac{N A B}{\sqrt{2}} I = N A B I_{eff} \quad (4.1.130)$$

Mit dem Widerstand des Ankers  $R$  kann man den mittleren Strom aus der wirkenden Spannung  $U_0 - U_{eff,i}$  berechnet werden

$$I_{eff} = \frac{U_0 - U_{eff,i}}{R} = \frac{U_0}{R} - \frac{N A B}{R\sqrt{2}} \omega \quad (4.1.131)$$

Die angelegte Spannung  $U_0$  ist eine Gleichspannung, deshalb darf kein Effektivwert berechnet werden. Damit hängt das Drehmoment von der Drehzahl ab

$$T_{NSM,eff}(\omega) = N A B \left( \frac{U_0}{R} - \frac{N A B}{R\sqrt{2}} \omega \right) = \frac{N A B U_0}{R} - \frac{N^2 A^2 B^2}{\sqrt{2} R} \omega \quad (4.1.132)$$

Das Drehmoment des ruhenden Motors ist also

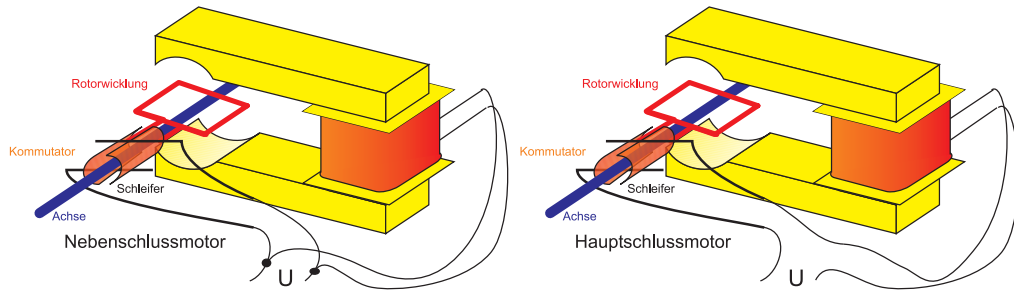
$$T_{NSM,eff}(0) = T_{max} = \frac{N A B U_0}{R} \quad (4.1.133)$$

und die maximale Drehzahl (mit  $T_{eff}(\omega_{max}) = 0$ ) ist

$$\omega_{max} = \frac{\sqrt{2} U_0}{N A B} \quad (4.1.134)$$

Verglichen mit Gleichung (4.1.128) hat sich nur der Vorfaktor geändert, von  $4/\pi \approx 1.273$  zu  $\sqrt{2} \approx 1.414$ . Mit der gemittelten Betrachtung überschätzen wir die maximale Drehzahl!

#### 4.1.10.3. Rotierende Leiterschleife als Hauptschlussmotor



**Abb. 4.27.:** Links ist die Schaltung des Nebenschlussmotors, rechts die des Hauptschlussmotors gezeigt.

Ist wie beim HAUPTSCHLUSSMOTOR die Erregerwicklung in Serie zur Ankerwicklung geschaltet, gibt es keine maximale Drehzahl. Eine lange Zylinderspule (Länge  $\ell$ , Windungszahl  $N$ ) hat das Magnetfeld

$$B(t) = \mu_0 \frac{N}{\ell} I(t), \quad (4.1.135)$$

sofern der Einfluss der Induktivität vernachlässigt werden kann. Diese würde für eine Änderung der Amplitude und der Phase sorgen. Für andere Geometrien gilt das gleiche Gesetz, aber mit einem geometrieabhängigen Vorfaktor  $K'$ .

Im statischen Falle ist der STROM nur vom Gleichstromwiderstand  $R_E$  der Erregerpule abhängig. Sonst müsste  $\tilde{R} = R_E + Z_{L_E}$  verwendet werden.

$$B(t) = B(I_E(t)) = K' \mu_0 \frac{N_E}{\ell_E} I_E(t) = K I_E(t) \quad (4.1.136)$$

wobei alle Vorfaktoren in den Faktor  $K$  zusammengezogen wurden. Spannung und Strom an der Feldspule oder Erregerpule hängen über

$$U_E(t) = I(t) R_E + L_E \frac{dI(t)}{dt} \quad (4.1.137)$$

zusammen.

Der durch den Anker fließende STROM ist mit  $U_i(t) = -\frac{d}{dt} (N B(t) A \sin(\omega t))$  und  $I(t) = I_E(t)$  sowie dem Resultat von Gleichung (4.1.137) gegeben.

$$\begin{aligned} I(t) &= \frac{U_0 - U_E(t) - U_i(t)}{R} \\ &= \frac{U_0}{R} - I(t) \frac{R_E}{R} - \frac{L_E}{R} \frac{dI(t)}{dt} - \frac{1}{R} \left[ -\frac{d}{dt} (N B(t) A \sin(\omega t)) \right] \end{aligned} \quad (4.1.138)$$

Eingesetzt mit Gleichung (4.1.135) und  $I(t) = I_E(t)$

$$R I(t) = U_0 - I(t) R_E - L_E \frac{dI(t)}{dt} + N A K \frac{d}{dt} (I(t) \sin(\omega t)) \quad (4.1.139)$$

und umgestellt

$$\frac{d}{dt} \left( I(t) \left( \sin(\omega t) - \frac{L_E}{N A K} \right) \right) - \frac{(R + R_E)}{N A K} I(t) = -\frac{U_0}{N A K} \quad (4.1.140)$$

Wenn der Kommutator den Stromfluss im Anker umstellt, bekommt man

$$\frac{d}{dt} \left( I(t) \left( -\sin(\omega t) - \frac{L_E}{N A K} \right) \right) - \frac{(R + R_E)}{N A K} I(t) = -\frac{U_0}{N A K} \quad (4.1.141)$$

Die Lösungen dieser beiden Differentialgleichungen müssen beim Umschalten des Kommutators jeweils gleich sein.  $I(t)$  kommt nur linear vor, das heisst, man kann die Gleichungen als komplexe Gleichungen schreiben, indem  $\sin(\omega t) \rightarrow i \exp(i\omega t)$  gesetzt wird. Weiter kann

$$I(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \exp(ik\omega t) \quad (4.1.142)$$

gesetzt werden. Dies führt zu einer Rekursion für die Koeffizienten  $a_k$ . Noch unbekannt ist der Phasenwinkel zwischen den beiden

Die weitere Rechnung ist kompliziert. Man müsste auch die Induktivität der Spulen berücksichtigen.

**4.1.10.3.1. Gemittelte Betrachtung** Der durch den Anker fliessende STROM ist mit  $U_{eff,i} = N B(U_E) A \omega / \sqrt{2}$  durch

$$I_{eff} = \frac{U_0 - U_E - U_{eff,i}}{R} = \frac{U_0}{R} - \frac{U_E}{R} - \frac{N B(U_E) A}{R \sqrt{2}} \omega \quad (4.1.143)$$

gegeben.

Da  $I_{eff} = I_{E,eff}$  und  $U_E = R_E \cdot I_{E,eff}$  sind, gilt

$$I_{eff} = \frac{U_0}{R} - \frac{R_E}{R} I_{eff} - \frac{K N A}{R \sqrt{2}} I_{eff} \omega \quad (4.1.144)$$

oder

$$I_{eff} = \frac{U_0}{R + R_E + \frac{K N A}{\sqrt{2}} \omega} = \frac{\sqrt{2} U_0}{\sqrt{2} R + \sqrt{2} R_E + K N A \omega} \quad (4.1.145)$$

Damit wird das Drehmoment

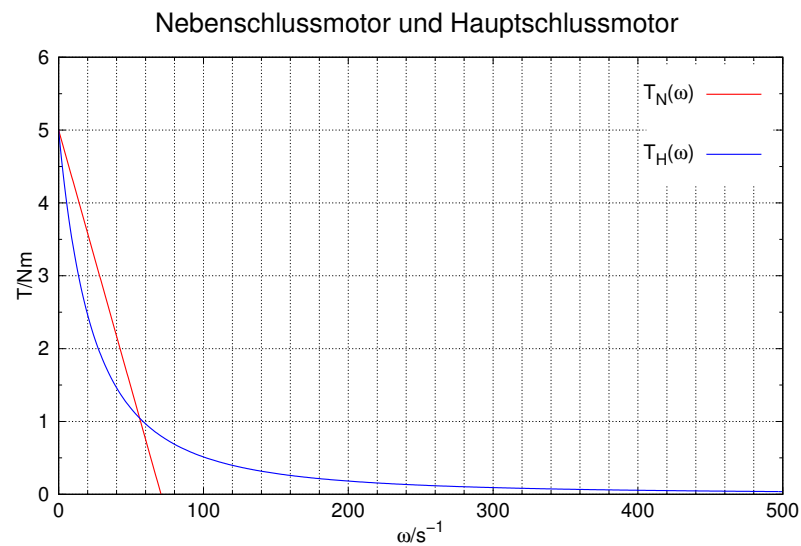
$$T_{HSM,eff}(\omega) = N A B(I_{eff}) I_{eff} = N A K I_{eff}^2 \quad (4.1.146)$$

Eingesetzt bekommt man

$$T_{HSM,eff}(\omega) = \frac{2 N A K U_0^2}{\left[ \sqrt{2} R + \sqrt{2} R_E + K N A \omega \right]^2} \quad (4.1.147)$$

$T_{HSM,eff}(\omega)$  ist für alle  $\omega$  grösser als null. Dieser Motor hätte, ohne Lagerreibung, eine unendlich grosse maximale Drehzahl. Das Startdrehmoment für  $\omega = 0$  ist

$$T_{HSM,eff}(0) = T_{HSM,max} = \frac{N A K U_0^2}{[R + R_E]^2} \quad (4.1.148)$$

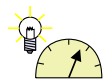


**Abb. 4.28.:** Kennlinien von Nebenschluss- und Hauptschlussmotoren aus der gemittelten Betrachtung. Die Kurven wurden mit  $N = 1000$ ,  $A = 0.001 \text{ m}^2$ ,  $U = 5 \text{ V}$ ,  $R = 0.1 \Omega$  und  $B = 0.1 \text{ T}$ . Die beiden Motoren sind so berechnet, dass sie das gleiche Startdrehmoment und dass  $R_E = R/2$  ist (eine vernünftige Annahme).



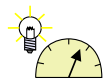
#### Versuch 67: Versuch zur Vorlesung:

Drehstromgenerator ([Versuchskarte Applet](#))



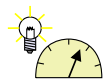
#### Versuch 68: Versuch zur Vorlesung:

Asynchroner Drehstrommotor ([Versuchskarte Video](#))



#### Versuch 69: Versuch zur Vorlesung:

Schleifring-Drehstromasynchronmotor für Fahrstühle usw. ([Versuchskarte Video](#))



#### Versuch 70: Versuch zur Vorlesung:

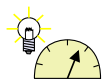
Einphasen-Asynchronmotor ([Versuchskarte Video](#))



### Versuch 71: Versuch zur Vorlesung:

Linearmotor (Versuchskarte EM-113)

## 4.1.11. Betatron



### Versuch 72: Versuch zur Vorlesung:

Betatron (Versuchskarte EM-167, Video)

Die Idee hinter der Konstruktion des Betatrons ist, dass bei einem zeitabhängigen  $\mathbf{B}$ -Feld nach  $\text{rot } \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$  auch ein zeitabhängiges  $\mathbf{E}$ -Feld existiert.

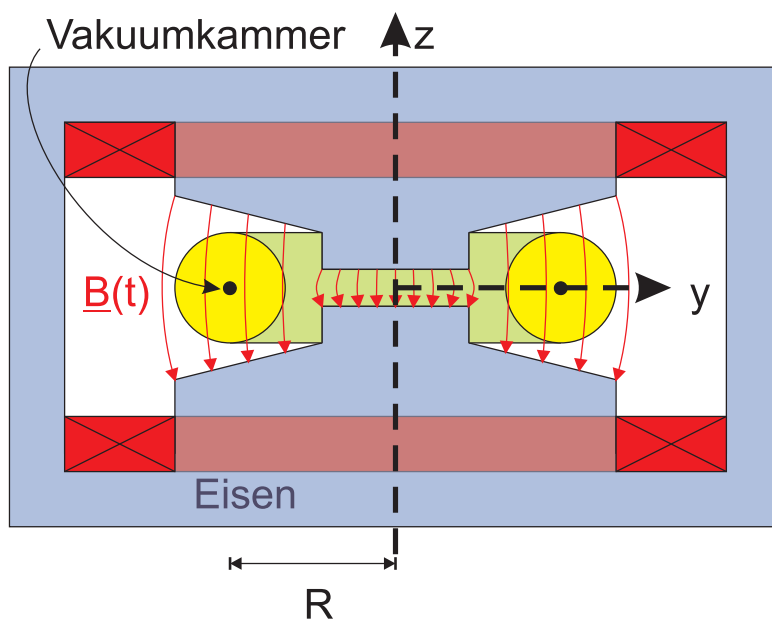


Abb. 4.29.: Skizze eines Betatrons

Nach dem Induktionsgesetz  $\text{rot } \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$  hat das durch ein in die  $z$ -Richtung zeigende Magnetfeld induzierte elektrische Feld keine  $z$ -Komponente. Nehmen wir an, dass das  $\mathbf{E}$ -Feld eine Radialkomponente hätte. Sie könnte zum Beispiel in die  $y$ -Richtung zeigen. Rotieren wir die ganze Anordnung um  $\pi$  um die  $y$ -Achse und kehren die Richtung des  $\mathbf{B}$ -Feldes um, haben wir wieder die Ausgangsanordnung. Mit der Richtungsumkehr von  $\mathbf{B}$  hat aber auch  $\mathbf{E}$  die Richtung geändert (Induktionsgesetz). Dies ist aber im Widerspruch zur Ausgangssituation. Deshalb kann es kein radiales  $\mathbf{E}$ -Feld geben: das  $\mathbf{E}$ -Feld ist tangential und beschleunigt die geladenen Teilchen. Damit die Teilchen auf der Kreisbahn bleiben, muss

$$m \frac{v^2}{R} = e \cdot v \cdot B(t) \quad (4.1.149)$$

oder

$$mv(t) = p(t) = e \cdot B \cdot R \quad (4.1.150)$$

Das zweite Newtonsche Axiom in tangentialer Richtung angewandt bedeutet

$$\frac{dp(t)}{dt} = eE(t) \quad (4.1.151)$$

Mit der Integralform des Induktionsgesetzes erhält man mit einer stationären Kreisbahn  $S(R)$  mit dem Radius  $R$

$$\oint_{S(R)} \mathbf{E}(t) \cdot d\mathbf{s} = E(t) \cdot 2\pi R = -\frac{d}{dt} \iint_{A(R)} \mathbf{B}(t) \cdot d\mathbf{a} = \frac{d\bar{B}(t)}{dt} \cdot \pi R^2 \quad (4.1.152)$$

wobei  $\bar{B}$  das über die Fläche des Kreises gemittelte  $\mathbf{B}$ -Feld ist. Durch Kombination der obigen Gleichungen und unter Berücksichtigung der Vorzeichen erhalten wir

$$\frac{dp(t)}{dt} = \frac{e \cdot R}{2} \cdot \frac{d\bar{B}}{dt} \quad (4.1.153)$$

Die Integration mit den Anfangsbedingungen  $p(0) = 0$  und  $B(0) = 0$  liefert

$$p(t) = \frac{e \cdot R}{2} \cdot \bar{B}(t) \quad (4.1.154)$$

Der Vergleich mit der Bedingung für die Zentripetalkraft liefert die WIDEROE-BEDINGUNG

$$\bar{B}(t) = 2 \cdot B(t) \quad (4.1.155)$$

Diese Bedingung kann durch eine geeignete Wahl der Form der Polschuhe erreicht werden.

### 4.1.12. Skineffekt

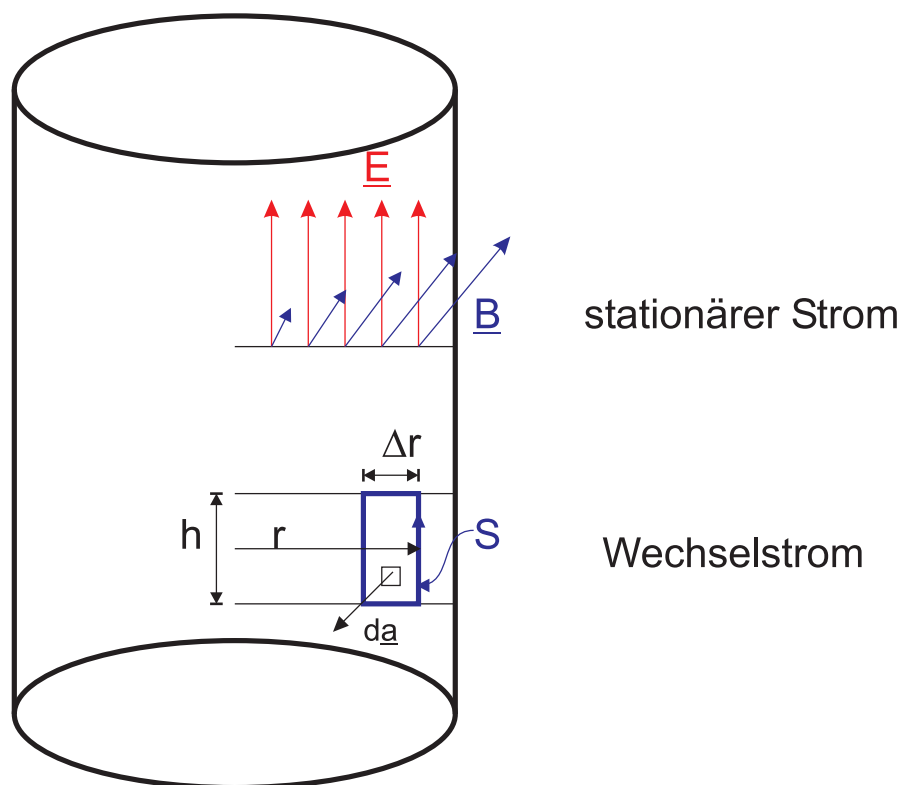


Abb. 4.30.: Berechnung des Skin-Effektes

Bei Gleichstrom in einem zylindrischen Leiter ist das elektrische Feld konstant über dem Querschnitt. Nach dem Ampèreschen Durchflutungsgesetz (Siehe Gleichung (3.8.32)) ist das Magnetfeld proportional zum Abstand.

Für den Fall eines Wechselstroms mit niedriger Frequenz müssen wir das Induktionsgesetz berücksichtigen. Nach dem Induktionsgesetz gilt für die zeitunabhängige Kurve  $S$ , die auf einer Ebene, in der auch die Zylinderachse liegt, liegt

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d}{dt} \iint_{A(S)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} \quad (4.1.156)$$

Für die eingezeichnete Schleife gilt ( $d\mathbf{a}$  ist antiparallel zu  $\mathbf{B}$ )

$$h [E(r) - E(r - \Delta r)] = \frac{d(-\bar{B})}{dt} \cdot (-h \cdot \Delta r) \quad (4.1.157)$$

wobei wieder  $\bar{B}$  das über die Fläche  $\Delta r \cdot h$  gemittelte Magnetfeld ist. Als Zwischenresultat bekommen wir:

$$\frac{[E(r) - E(r - \Delta r)]}{\Delta r} = \frac{d(\bar{B})}{dt}$$

Da der STROM zeitabhängig ist, muss auch das  $\mathbf{E}$ -Feld ortsabhängig sein. Eine homogene Stromverteilung bei Wechselstrom ist bei einem Ohmschen Leiter nicht vereinbar mit dem INDUKTIONSGESETZ. Die Taylorentwicklung von Gleichung (4.1.156) liefert die betragsmässige Bedingung

$$\frac{\partial E(r, t)}{\partial r} = \frac{\partial B(r, t)}{\partial t} \quad (4.1.158)$$

Das elektrische Feld muss also bei Wechselstrom mit zunehmendem Abstand vom Radius zunehmen. Da der Gesamtstrom gegeben ist, ist die Stromdichte an der Oberfläche konzentriert. Dies ist der SKINEFFEKT.

### Anwendung

- Bei Überlandleitungen wird um ein Stahlseil Kupfer (Luxusausführung) oder Aluminium (das Übliche) gewickelt. Dies erhöht den WIDERSTAND kaum, da der Skin-Effekt die Stromleitung bei 50 Hz auf etwa 1 cm Tiefe beschränkt.

Die Berechnung der Skintiefe kann nach Jackson [Jac75, pp. 334-338]<sup>2</sup> aus dem Ampèreschen Gesetz Gleichung (3.8.32), dem Faraday'schen Gesetz Gleichung (4.1.24) und dem mikroskopischen Ohm'schen Gesetz (3.2.2) abgeleitet werden.

Wir beginnen mit den drei Gleichungen

$$\mathbf{rot} \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{B} = \mu\mu_0 \mathbf{i} \quad (4.1.159)$$

$$\mathbf{rot} \mathbf{E} = \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (4.1.160)$$

$$\mathbf{i} = \sigma \mathbf{E} \quad (4.1.161)$$

und damit

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu\mu_0 \sigma \mathbf{E} \quad (4.1.162)$$

Wir nehmen mit Jackson eine harmonische Welle an, also  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 \exp(i\omega t)$  und  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(i\omega t)$ . Damit können die obigen Gleichungen umgeschrieben werden

$$\nabla \times \mathbf{B}_0 = \mu\mu_0 \sigma \mathbf{E}_0 \quad (4.1.163)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -i\omega \mathbf{B}_0 \quad (4.1.164)$$

Wenn  $\mathbf{n}$  der nach aussen zeigende Normalenvektor auf die Grenzfläche Vakuum-Metall ist und  $\xi$  die nach innen zeigende Koordinate ist, kann in der Nähe der Oberfläche der Nabla-Operator als

$$\nabla \simeq -\mathbf{n} \frac{\partial}{\partial \xi} \quad (4.1.165)$$

geschrieben werden. Gleichungen (4.1.163) und (4.1.164) lauten dann

<sup>2</sup>Jackson rechnet im cgs-System!



$$-\frac{\partial}{\partial \xi} (\mathbf{n} \times \mathbf{B}_0) = \mu\mu_0\sigma \mathbf{E}_0 \quad (4.1.166)$$

$$-\frac{\partial}{\partial \xi} (\mathbf{n} \times \mathbf{E}_0) = -i\omega \mathbf{B}_0 \quad (4.1.167)$$

Um die beiden Gleichungen zu kombinieren, multiplizieren wir mit dem Kreuzprodukt oder Vektorprodukt von links mit  $-\mathbf{n} \frac{\partial}{\partial \xi}$  und verwenden weiter, dass nach (C.8.1)  $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c}$  ist.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} (\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{B}_0)) &= \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} ((\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_0) \mathbf{n} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{B}_0) \\ &= -\mu\mu_0\sigma \frac{\partial}{\partial \xi} (\mathbf{n} \times \mathbf{E}_0) = i\mu\mu_0\sigma\omega \mathbf{B}_0 \end{aligned} \quad (4.1.168)$$

Diese Gleichung hat zwei Komponenten. Es gibt Summanden, die in die Richtung von  $\mathbf{B}_0$  zeigen und Summanden, die in die Richtung von  $\mathbf{n}$  zeigen. Die Summanden für die beiden Richtungen ergeben die folgenden zwei Gleichungen, da das Resultat ja unabhängig von den einzelnen Vektoren sein muss.

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \mathbf{B}_0 + i\mu\mu_0\sigma\omega \mathbf{B}_0 = 0 \quad (4.1.169)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_0 = 0 \quad (4.1.170)$$

Gleichung (4.1.169) ist eine Differentialgleichung zweiter Ordnung. Deshalb machen wir den Lösungsansatz  $\mathbf{B}_0(\xi) = \mathbf{B}_{0,0} \exp(a\xi)$  und setzen

$$\frac{2i}{\delta^2} = i\mu\mu_0\sigma\omega \implies \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu\mu_0\sigma\omega}} \quad (4.1.171)$$

und erhalten über

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \mathbf{B}_0 + \frac{2i}{\delta^2} \mathbf{B}_0 = 0 \quad (4.1.172)$$

die charakteristische Gleichung

$$a^2 + \frac{2i}{\delta^2} = 0 \quad (4.1.173)$$

die Lösungen

$$a = \pm \frac{\sqrt{2i}}{\delta} = \pm \frac{i-1}{\delta} \quad (4.1.174)$$

Das Vorzeichen + ist physikalisch sinnvoll (es gibt keine zunehmende Amplitude). Damit besteht die Lösung aus einem exponentiellen Abfall mit der Abfalllänge  $\delta$  und einem örtlich oszillierenden Teil, also

$$\mathbf{B}(\xi, t) = \mathbf{B}_{0,0} \exp\left(-\frac{\xi}{\delta}\right) \exp\left(i\left(\omega t - \frac{\xi}{\delta}\right)\right) \quad (4.1.175)$$

Damit ist

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu\mu_0\sigma\omega}} = \frac{1}{\sqrt{\pi\mu\mu_0\sigma\nu}} \quad (4.1.176)$$

die Skintiefe bei der Frequenz  $\omega$  eines Metalls mit der relativen Permeabilität  $\mu$  und der Leitfähigkeit  $\sigma$ . Aus Gleichung (4.1.176) kann abgelesen werden, dass

- die Skintiefe mit zunehmender LEITFÄHIGKEIT abnimmt,
- mit zunehmender relativer PERMEABILITÄT abnimmt und
- mit zunehmender FREQUENZ abnimmt.

---

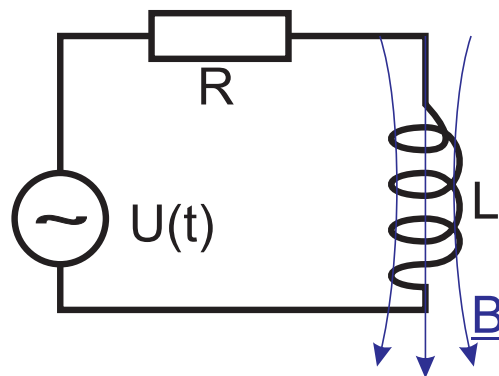
	1 Hz	16.67 Hz	50 Hz	100 Hz	1 kHz	10 kHz	100 kHz	1 MHz
Kupfer	66 mm	16 mm	9.3 mm	6.6 mm	2.1 mm	660 $\mu\text{m}$	21 $\mu\text{m}$	6.6 $\mu\text{m}$
Aluminium	83 mm	20 mm	12 mm	8.3 mm	2.6 mm	830 $\mu\text{m}$	26 $\mu\text{m}$	8.3 $\mu\text{m}$
Eisen ( $\mu = 10^4$ )	1.6 mm	390 $\mu\text{m}$	230 $\mu\text{m}$	160 $\mu\text{m}$	50 $\mu\text{m}$	16 $\mu\text{m}$	5.0 $\mu\text{m}$	1.6 $\mu\text{m}$
Edelstahl ( $\mu = 300$ )	25 mm	6.0 mm	3.5 mm	2.5 mm	780 $\mu\text{m}$	250 $\mu\text{m}$	78 $\mu\text{m}$	25 $\mu\text{m}$
Meerwasser	230 m	55 m	32 m	23 m	7.1 m	2.3 m	710 mm	230 m
Leitungswasser	7.1 km	1.7 km	1.0 km	712 m	230 m	71 m	23 m	7.1 km

**Tab. 4.2.:** Skintiefen verschiedener Materialien (nach [Wik16a; Wik16b])

---

## 4.2. Energie des Magnetfeldes

---



**Abb. 4.31.:** Berechnung der Energie im Magnetfeld

---

Wir betrachten eine mit einer Wechselstromquelle  $U(t) = U_0 \sin(\omega t)$  verbundene reale Spule. Diese Spule wird modelliert durch einen WIDERSTAND  $R$  und eine ideale Spule  $L$ . Die Differentialgleichung dieses Kreises lautet

$$U(t) = L \cdot \dot{I}(t) + R \cdot I(t) \quad (4.2.1)$$

Die stationäre Lösung dieser Gleichung hat die Form

$$I_S(t) = I_0 \cos(\omega t - \delta) \quad (4.2.2)$$

Für den Fall, dass  $R \ll \omega L$  ist, bekommt man

$$I_S(t) = -\frac{U_0}{\omega L} \cdot \cos \omega t \quad (4.2.3)$$

Die momentane Leistung der Spannungsquelle ist

$$P_U(t) = U(t) \cdot I(t) = -\frac{U_0^2}{\omega L} \cdot \sin \omega t \cdot \cos \omega t = -\frac{U_0^2}{\omega L} \cdot \frac{1}{2} \sin(2\omega t) \quad (4.2.4)$$

Die Leistung der Spannungsquelle kann nur die Energie des  $\mathbf{B}$ -Feldes ändern, da wir keine dissipativen Elemente haben ( $R = 0$ ). Wenn man die Differentialgleichung für den Fall mit  $I(t)$  multipliziert, bekommt man

$$P_U = U(t) \cdot I(t) = L \cdot I \cdot \dot{I} = \frac{d}{dt} \left( \frac{L}{2} I^2 \right) \quad (4.2.5)$$

Nun ist aber  $P = dE/dt$ . Damit ist die Energie des Magnetfeldes

$$E_L = \frac{L}{2} I^2 \quad (4.2.6)$$

Um die Energiedichte eines Magnetfeldes zu berechnen betrachten wir eine Spule

$$B = \mu_0 n I \quad (4.2.7)$$

mit der Selbstinduktivität

$$L = \mu_0 n^2 A \ell \quad (4.2.8)$$

wobei  $A$  der Querschnitt der Spule und  $\ell$  ihre Länge ist. Eingesetzt in die Gleichung für die Energie  $E_L$  bekommt man

$$E_L = \frac{1}{2} \cdot \mu_0 n^2 A \ell \cdot \left( \frac{B}{\mu_0 n} \right)^2 = \frac{B^2}{2\mu_0} A \ell \quad (4.2.9)$$

Deshalb ist die Energiedichte des  $\mathbf{B}$ -Feldes

$$w_B = \frac{B^2}{2\mu_0} \quad (4.2.10)$$

### 4.3. Magnetische Eigenschaften der Materie

Wir haben bei Magnetfeldern wie bei elektrischen Feldern zwei Größen, die diese Felder beschreiben. Bei elektrischen Feldern haben wir einerseits die materieunab-

hängige Grösse ELEKTRISCHES FELD  $\mathbf{E}$  und die materieabhängige Grösse DIELEKTRISCHE VERSCHIEBUNG  $\mathbf{D}$ . Die beiden Grössen sind bei isotropen Materialien parallel, müssen es aber nicht sein. Der Zusammenhang ist:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \mathbf{E} = (1 + \chi_E) \varepsilon_0 \mathbf{E} \quad (4.3.1)$$

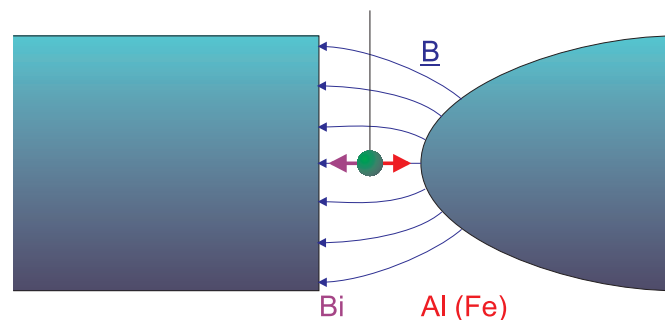
Dabei ist  $\varepsilon = 1 + \chi_e$  die RELATIVE ELEKTRISCHE PERMITTIVITÄT, eine Materialkonstante. Sie wird auch RELATIVE DIELEKTRIZITÄTSZAHL genannt und manchmal als  $\varepsilon_r$  geschrieben.  $\chi_E$  ist die ELEKTRISCHE SUSZEPTIBILITÄT und auch eine Materialkonstante. Beide,  $\varepsilon$  und  $\chi_E$  können Tensoren sein.

Bei den magnetischen Feldern haben wir die materialunabhängige Grösse MAGNETISCHES FELD  $\mathbf{H}$  und die materialabhängige Grösse MAGNETISCHE FLUSSDICHTE oder MAGNETISCHE INDUKTION  $\mathbf{B}$ . Analog zu den elektrostatischen Grössen hängen diese über

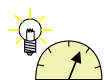
$$\mathbf{B} = \mu \mu_0 \mathbf{H} = (1 + \chi) \mu_0 \mathbf{H} \quad (4.3.2)$$

zusammen. Dabei ist  $\mu = 1 + \chi$  die RELATIVE ELEKTRISCHE PERMEABILITÄT, eine Materialkonstante.  $\chi$  ist die (magnetische) SUSZEPTIBILITÄT und auch eine Materialkonstante. Beide,  $\mu$  und  $\chi$  können Tensoren sein.

### 4.3.1. Kugeln im inhomogenen Magnetfeld

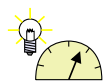


**Abb. 4.32.:** Diamagnetische (Bi), paramagnetische (Al) und ferromagnetische (Fe) Materialien im inhomogenen Magnetfeld.



#### Versuch 73: Versuch zur Vorlesung:

Dia- und Paramagnetismus ([Versuchskarte EM-177](#), [Video](#))



#### Versuch 74: Versuch zur Vorlesung:

Dia- und Paramagnetismus ([Versuchskarte EM-177](#), [Video](#))



### Versuch 75: Versuch zur Vorlesung:

Dia- und Paramagnetismus (Versuchskarte EM-177, Video (VPN oder intern))

Materie im inhomogenen Magnetfeld zeigt drei verschiedene Verhalten:

**diamagnetisches Verhalten** Die Materie wird aus dem starken magnetischen Feld herausgedrückt ( $\chi < 0$ ).

**paramagnetisches Verhalten** Die Materie wird in das starke Feld hineingezogen ( $\chi > 0$ ).

**ferromagnetisches Verhalten** Die Materie wird in das starke Feld hineingezogen, aber sehr viel stärker als bei paramagnetischen Substanzen. Zudem zeigen diese Substanzen ein remanentes Magnetfeld, auch wenn das äussere Magnetfeld wieder verschwunden ist ( $\chi(\mathbf{H})$ ).

Es gibt alle möglichen Zwischenzustände in Materialien, so zum Beispiel

**ferrimagnetisch** 2 ferromagnetische Gitter mit antiparalleler Orientierung, die sich aber nicht komplett kompensieren.

**antiferromagnetisch** Je nach Ausrichtung, permanente magnetische Momente kompensieren sich (Spinwellen)

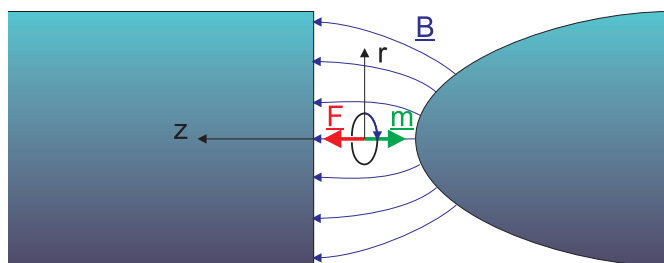


Abb. 4.33.: Kreisströme als Ursache des Dia- und des Paramagnetismus

Die Materie im inhomogenen Magnetfeld verhält sich wie wenn die Materie aus einem Kreisstrom bestünde. Auf diesen Kreisstrom wirkt, je nach Umlaufsinn eine Kraft zum hohen oder zum niedrigen Feld. Das magnetische Moment der Kreisströme ist beim DIAMAGNETISMUS antiparallel zu  $\mathbf{B}$ . Beim PARAMAGNETISMUS und beim FERROMAGNETISMUS zeigt das magnetische Moment in die Richtung von  $\mathbf{B}$ . Der Kreisstrom ist induziert, das heisst, dass seine Richtung von der von  $\mathbf{B}$  abhängt. Die resultierende Kraft ist die Biot-Savart-Kraft (Siehe Gleichung (3.8.16)). Sie ist proportional zum Produkt  $\mathbf{B} \times d\mathbf{l}$ . Wenn man die Richtung des Magnetfeldes umkehrt, wird auch  $d\mathbf{l}$  umgekehrt. Die Richtung der Kraft ist als unabhängig von der Richtung von  $\mathbf{B}$ .

Wenn der Kreisstrom (die Materie) sich auf der Symmetrieachse eines rotations-symmetrischen inhomogenen Magnetfeldes befindet, ist

$$F_z = m_z \cdot \frac{\partial B_z(z, 0)}{\partial z} \quad (4.3.3)$$

wobei  $m_z$  das induzierte magnetische Moment des Kreisstromes ist.

### 4.3.2. Der Satz von Larmor

(Siehe Leisi, Klassische Physik II [Lei98, pp. 162])

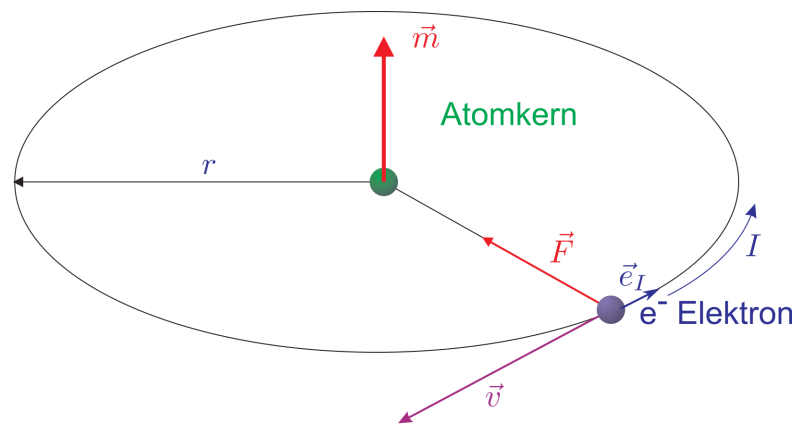


Abb. 4.34.: Illustration zum Satz von Larmor

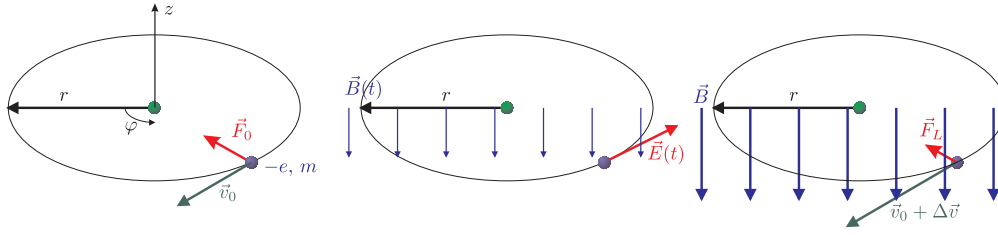
Wir hatten postuliert, dass das Verhalten der Materie in einem Gradienten eines Magnetfeldes durch atomare Kreisströme gegeben ist. Wenn wir ein Modell (nach der Quantenphysik nicht realistisch) eines Atoms betrachten, bei dem ein einzelnes Elektron auf einer Bahn mit dem Radius  $r$  sich um den positiv geladenen Kern bewegt, ist der resultierende STROM

$$I = -e \frac{v}{2\pi r} \quad (4.3.4)$$

Der Betrag des magnetischen Momentes ist dann

$$|\mathbf{m}| = \pi r^2 I = \frac{1}{2} e \cdot v \cdot r \quad (4.3.5)$$

Die Wirkung eines äusseren Magnetfeldes wird berechnet, indem man betrachtet, wie ein einzelnes Atom auf ein von null anwachsendes äusseres Feld reagiert.



**Abb. 4.35.:** Langsames Einschalten eines Magnetfeldes für ein Elektron in einem Atom. Im linken Schaubild sind die positiven Richtungen definiert.

Im Ausgangszustand ist die Zentripetalkraft  $\mathbf{F}_0 = -m_e v^2/r$  die Coulombanziehung zwischen dem Elektron und dem Kern sowie durch die gemittelte Coulombabstoßung durch die anderen Elektronen gegeben. Das anwachsende Magnetfeld hat die gleiche Wirkung wie beim Betatron: es entsteht ein tangentiales  $\mathbf{E}$ -Feld, das das Elektron beschleunigt. Wir setzen die  $z$ -Achse nach oben an. In einem rechtshändigen System ist dann

- das Magnetfeld:  $-B$ , Betrag:  $B$
- die Geschwindigkeit:  $-v$ , Betrag:  $v$
- die Zentripetalkraft:  $-F_0$ , Betrag:  $F_0$
- das induzierte elektrische Feld:  $E$ , Betrag:  $E$

Wir setzen diese Größen ein, um vorzeichenrichtig zu rechnen. Aus dem Induktionsgesetz (Siehe Gleichung (4.1.22)) folgt

$$\oint_{S(r)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 2\pi \cdot r \cdot E(t) = -\frac{\partial \phi_B}{\partial t} = -\pi r^2 \cdot \frac{d(-B(t))}{dt} = \pi r^2 \cdot \frac{dB(t)}{dt} \quad (4.3.6)$$

Dabei ist  $\phi_B = (-B) \cdot A$ . Wir erhalten also

$$E(t) = \frac{r}{2} \cdot \frac{dB(t)}{dt} \quad (4.3.7)$$

Die Beschleunigung des Elektrons (nicht-relativistisch) ist durch das zweite Newtonsche Gesetz gegeben

$$m_e \frac{dv}{dt} = -e \cdot E = -\frac{e \cdot r}{2} \cdot \frac{dB(t)}{dt} \quad (4.3.8)$$

Hier ist  $m_e$  die Ruhemasse des Elektrons. Die Geschwindigkeitsänderung hängt also mit der Magnetfeldänderung wie folgt zusammen

$$dv = -\frac{e \cdot r}{2m_e} \cdot dB \quad (4.3.9)$$

Der gesamte Geschwindigkeitszuwachs des Elektrons ist also

$$\Delta v = -\frac{e \cdot r}{2m_e} \cdot B \quad (4.3.10)$$

wenn  $B$  das Feld im Endzustand ist. Der Betrag der Geschwindigkeit hat also zugenommen. Nun bewirkt das äussere  $\mathbf{B}$ -Feld die Lorentzkraft

$$\mathbf{F}_L = -e \cdot (-v) \cdot (-B) \mathbf{e}_r \quad (4.3.11)$$

die, nach der rechten Hand-Regel, zum Kreiszentrum zeigt. Die Zentripetalkraft ist im Endzustand durch

$$F = -m_e \frac{(-v + \Delta v)^2}{r} \quad (4.3.12)$$

Da  $v \gg \Delta v$  ist, können wir nach Taylor entwickeln

$$\begin{aligned} F &\approx -\frac{m_e}{r} (v^2 - 2v \cdot \Delta v) \\ &= -\frac{m_e}{r} \left( v^2 + 2v \cdot \frac{e \cdot r}{2m_e} \cdot B \right) \\ &= -\frac{m_e}{r} v^2 - e \cdot v \cdot B \\ &= F_0 + F_L \end{aligned} \quad (4.3.13)$$

Die Lorentz-Kraft bewirkt also, dass die Elektronenbahnen für kleine Geschwindigkeitsänderungen sich nicht ändern. Die LARMORWINKELGESCHWINDIGKEIT in Abhängigkeit der Zunahme der Bahngeschwindigkeit und der magnetischen Induktion ist

$$\Omega \equiv \frac{\Delta v}{r} = \frac{e \cdot B}{2m_e} \quad (4.3.14)$$

und vektoriell geschrieben

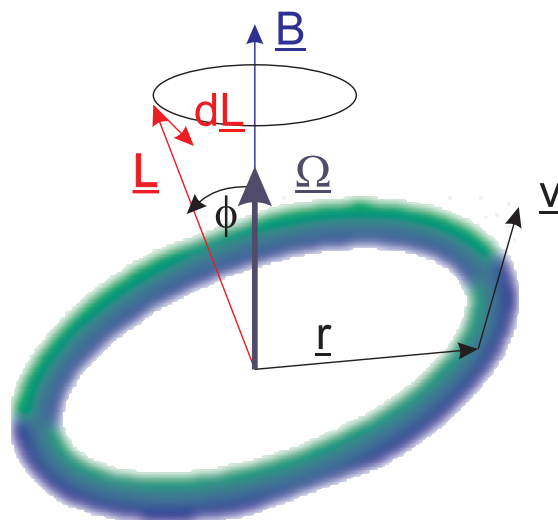
### Larmorwinkelgeschwindigkeit

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{e}{2m_e} \mathbf{B} \quad (4.3.15)$$

In einem mit der Winkelgeschwindigkeit  $\boldsymbol{\Omega}$  rotierenden System sind die Elektronenbahnen im Atom unverändert.

Der SATZ VON LARMOR gilt allgemein, auch bei beliebiger Orientierung von Magnetfeld und Bahnebene des Elektrons. Der Satz von Larmor bildet die Grundlage des Verständnisses des Diamagnetismus.





**Abb. 4.36.:** Berechnung der Larmorfrequenz mit einem Kreisel

Man kann den SATZ VON LARMOR aus der Kreiseltheorie ableiten. Das Elektron ist, bei einer Bahn mit konstantem Radius, ein starrer Körper. Dieser Kreisel hat den Drehimpuls

$$\mathbf{L} = m_e \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \quad (4.3.16)$$

Das magnetische Moment des Kreisstromes ist nach Gleichung (4.3.5)

$$\mathbf{m} = -\frac{e}{2m_e} \mathbf{L} \quad (4.3.17)$$

Der Kreisel erfährt ein mechanisches Drehmoment (Siehe Gleichung (3.8.25))

$$\mathbf{T} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} \quad (4.3.18)$$

Der Drehimpulssatz bedeutet, dass

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{T} = -\frac{e}{2m_e} \mathbf{L} \times \mathbf{B} = \frac{e}{2m_e} \mathbf{B} \times \mathbf{L} \quad (4.3.19)$$

Wir erhalten also eine Präzessionsbewegung des Drehimpulsvektors  $\mathbf{L}$  um  $\mathbf{B}$  mit der Winkelgeschwindigkeit  $\mathbf{\Omega}$  (siehe auch [Mar14, Seite 190, Gleichung (6.3.30)])

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{L} \quad (4.3.20)$$

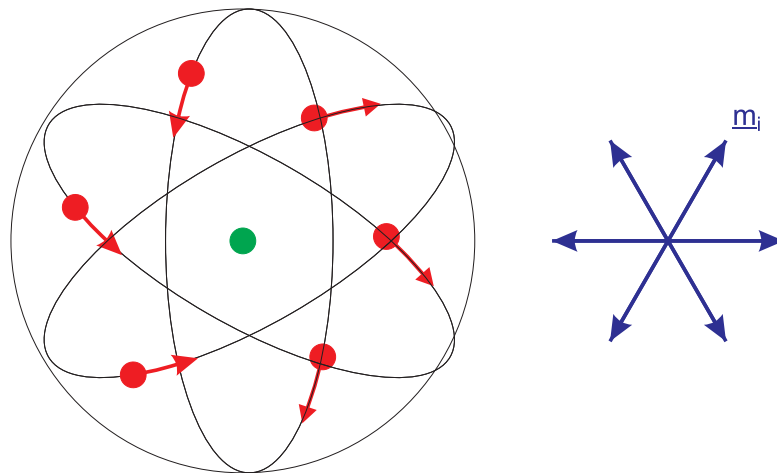
Wir erhalten die

**vektorielle Schreibweise der LARMORKREISFREQUENZ**

$$\mathbf{\Omega} = \frac{e}{2m_e} \mathbf{B} \quad (4.3.21)$$

**Bemerkung:**

In der Physik wird manchmal auch der Ausdruck «Frequenz» für die «Kreisfrequenz» gebraucht, eine ungenaue Ausdrucksweise.

**4.3.3. Diamagnetismus**

**Abb. 4.37.:** Berechnung des Diamagnetismus

Im diamagnetischen Atom ist die Summe aller magnetischer Momente der Elektronen exakt null.

$$\mathbf{m}_A = \sum_j \mathbf{m}_j = 0 \quad (4.3.22)$$

Man kann sich dies vereinfacht so vorstellen, dass jede Elektronenbahn von zwei gegenläufigen Elektronen besetzt ist. Ein diamagnetisches Atom hat deshalb, ohne äusseres  $\mathbf{B}$ -Feld eine kugelsymmetrische Ladungsverteilung. Diese entsteht, weil sich die einzelnen Elektronenbewegungen über die Zeit ausmitteln.

Wenn ein  $\mathbf{B}$ -Feld eingeschaltet wird, beginnt diese kugelsymmetrische Ladungsverteilung mit der Larmorfrequenz zu präzedieren. Durch diese Präzession im Magnetfeld entsteht ein von null verschiedenes magnetisches Moment  $\mathbf{m}_A$ , das zum Diamagnetismus führt. Zur vereinfachten Berechnung nimmt man an, dass das Atom eine homogen geladene Kugel ist mit der Ladungsdichte

$$\rho_{el} = -\frac{Ze}{(4/3)\pi R^3} \quad (4.3.23)$$

wobei  $Z$  die Kernladungszahl und  $R$  der Radius der Elektronenwolke ist.

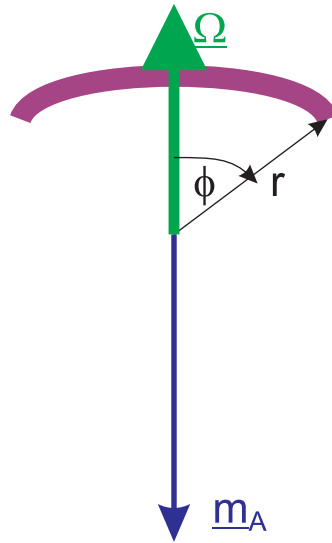


Abb. 4.38.: Ein einzelner Kreisstrom

Diese homogen geladene Kugel rotiert im äusseren Magnetfeld mit

$$\Omega = \frac{e}{2m_e} B \quad (4.3.24)$$

Durch ein raumfestes Flächenelement fliesst der STROM

$$\delta I = \rho_{el} \cdot r \cdot dr \cdot d\varphi \cdot v(r, \varphi) \quad (4.3.25)$$

mit

$$v(r, \varphi) = \Omega \cdot r \cdot \sin \varphi \quad (4.3.26)$$

Da die LADUNGEN negativ sind, ist das magnetische Moment  $\mathbf{m}_A$  entgegengesetzt zu  $\Omega$  und entgegengesetzt zu  $\mathbf{B}$ , hier also nach unten, gerichtet. Dieses magnetische Moment ist

$$\delta m_A(r, \varphi) = \text{Fläche} \cdot \text{Strom} = \pi r^2 \sin^2 \varphi \cdot \delta I \quad (4.3.27)$$

oder

$$\begin{aligned} \delta m_A(r, \varphi) &= \pi r^2 \sin^2 \varphi \cdot \rho_{el} \cdot r \cdot dr \cdot d\varphi \cdot v(r, \varphi) \\ &= \pi r^2 \sin^2 \varphi \cdot \rho_{el} \cdot r \cdot dr \cdot d\varphi \cdot \Omega \cdot r \cdot \sin \varphi \\ &= \pi r^4 \sin^3 \varphi \cdot \rho_{el} \cdot \Omega \cdot dr \cdot d\varphi \end{aligned} \quad (4.3.28)$$

Der Betrag des gesamten magnetischen Momentes erhält man durch Integration

über  $r$  und  $\varphi$  Er ist

$$\begin{aligned}
 |\mathbf{m}_A| &= \int_0^R \int_0^\pi \delta m_A(r, \varphi) dr d\varphi \\
 &= \pi \cdot \rho_{el} \cdot \Omega \cdot \int_0^R r^4 \cdot dr \cdot \int_0^\pi \sin^3 \varphi \cdot d\varphi \\
 &= \pi \cdot \rho_{el} \cdot \Omega \cdot \int_0^R r^4 \cdot dr \cdot \frac{4}{3} \\
 &= \pi \cdot \rho_{el} \cdot \Omega \cdot \frac{R^5}{5} \cdot \frac{4}{3} \\
 &= \pi \cdot \frac{Z \cdot e}{\frac{4\pi}{3} R^3} \cdot \Omega \cdot \frac{R^5}{5} \cdot \frac{4}{3} \\
 &= \pi \cdot \frac{Z \cdot e}{\frac{4\pi}{3} R^3} \cdot \frac{eB}{2m_e} \cdot \frac{R^5}{5} \cdot \frac{4}{3} \\
 &= \frac{Z \cdot e^2 \cdot B \cdot R^2}{10m_e}
 \end{aligned} \tag{4.3.29}$$

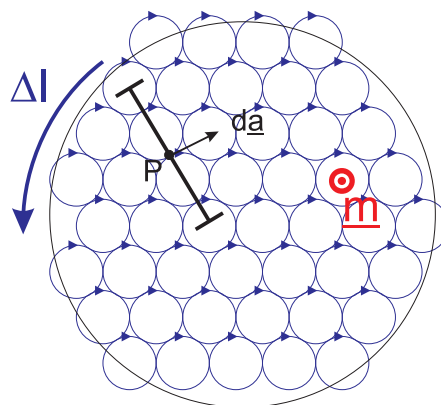
Vektoriell geschrieben erhalten wir für das diamagnetische Moment

$$\mathbf{m}_A = -\frac{Z \cdot e^2 \cdot R^2}{10m_e} \mathbf{B} \tag{4.3.30}$$

**Diese diamagnetische Moment ist in allen Atomen vorhanden.** Bei paramagnetischen und ferromagnetischen Substanzen wird es unterdrückt.

#### 4.3.4. Magnetisierung

(Siehe Leisi, Klassische Physik II [Lei98, pp. 170])



**Abb. 4.39.:** Atomare Kreisströme

Die gesamte makroskopische MAGNETISIERUNG ist das mittlere magnetische Mo-

ment pro Volumeneinheit

$$\mathbf{M}(\mathbf{R}) = \frac{\sum_{\Delta V} \mathbf{m}_{A_i}}{\Delta V} \quad (4.3.31)$$

Dabei ist  $\mathbf{m}_{A_1}$  das magnetische Moment eines Atoms oder einer Atomgruppe, wobei  $\Delta V$  ein geeignetes Volumenelement ist. Eine Probe heisst homogen magnetisiert, wenn  $\mathbf{M}(\mathbf{r})$  unabhängig vom Probenort ist.

Die Einheit der Magnetisierung ist  $[\mathbf{M}] = \text{A m}^{-1}$ .

Das externe Magnetfeld soll senkrecht zur Bildebene des obigen Bildes sein. Die atomaren Kreisströme müssen dann in der Bildebene liegen. Betrachten wir ein Flächenelement  $d\mathbf{a}$ , das senkrecht zur Bildebene liegt, dann stellen wir fest, dass alle Kreisströme zweimal durch dieses Ebenenelement gehen, einmal in positiver und einmal in negativer Richtung. Bis auf die Ströme an den Rändern heben sich alle Ströme auf. Das heisst, dass das mittlere Stromdichtefeld

$$\mathbf{i} = 0 \quad (4.3.32)$$

ist, da  $dI(a) = \mathbf{i} \cdot d\mathbf{a}$ . Nur die Ströme am Rand, die Oberflächenströme mit der Stromdichte  $j$ , können deshalb die Quelle der beobachteten makroskopischen Magnetisierung sein. Für eine Probe der Höhe  $\Delta z$  ist der gesamte STROM an der Oberfläche

$$\Delta I = \Delta z \cdot j \quad (4.3.33)$$

Diese makroskopischen Oberflächenströme erklären die experimentellen Beobachtungen. Da für ein diamagnetisches Atom  $\mathbf{m}$  entgegengesetzt zum Magnetfeld gerichtet ist, und da damit auch die makroskopische Magnetisierung  $\mathbf{M}$  entgegengesetzt zum Magnetfeld gerichtet ist, wird diese Probe wie beobachtet vom Magnetfeldgradienten abgestossen.

Das magnetische Feld aller Kreisströme muss identisch mit dem externen Feld  $\mathbf{B}$  sein. Nun ist aber das magnetische Moment eines Kreisstromes in genügender Entfernung nicht von der Fläche dieses Stromes abhängig. Deshalb muss die Summe aller einzelner atomarer magnetischer Momente dem magnetischen Moment des Oberflächenstromes gleich sein.

$$m_a \cdot n \cdot A \cdot \Delta z = A \cdot I = A \cdot j \cdot \Delta z \quad (4.3.34)$$

wobei  $n$  die Volumendichte der Atome ist. Die Oberflächenstromdichte

$$j = m_a \cdot n = M \quad (4.3.35)$$

ist gleich der Magnetisierung.

### 4.3.5. Das magnetische Moment des Elektrons: Spin

Neben den von der Bahnbewegung herrührenden magnetischen Momenten hat zum Beispiel das ELEKTRON ein magnetisches Moment, das von seinem Drehimpuls  $\mathbf{s}$  (SPIN) herrührt.

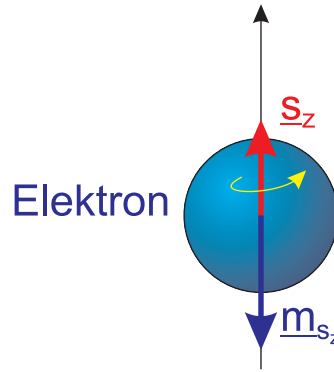


Abb. 4.40.: Elektronenspin

Zu diesem Drehimpuls oder Spin gehört ein entsprechendes magnetisches Moment  $\mathbf{m}_s$ . Aus der Quantenmechanik weiss man, dass die Projektion des Spins auf eine raumfeste Achse einen festen Betragswert

$$s_z = \frac{1}{2} \frac{h}{2\pi} = \frac{1}{2} \hbar \quad (4.3.36)$$

hat, wobei das Plancksche Wirkungsquantum durch

$$h = 6.63 \cdot 10^{-34} \text{ J s} \quad (4.3.37)$$

oder mit  $2\pi\hbar = h$

$$\hbar \approx 10^{-34} \text{ J s}$$

ist. Nach der Quantenmechanik gilt

$$\mathbf{m}_s = -\frac{e}{m_e} \mathbf{s} \quad (4.3.38)$$

Nach der klassischen Mechanik (rotierende homogen geladene Kugel) wäre  $\mathbf{m}_{s, \text{klass}} = -(1/2) \frac{e}{m_e} \mathbf{s}$ . Die Grösse des magnetischen Momentes eines Elektrons ist

$$|m_{s,z, \text{klass}}| = \frac{e}{2m_e} \hbar \equiv 1\mu_B = 0.927 \cdot 10^{-23} \text{ A m}^2 \quad (4.3.39)$$

auch bekannt unter dem Namen BOHRSCHE MAGNETON. Das magnetische Moment des Elektrons ist dann

$$\mathbf{m}_s = g\mu_B \mathbf{e}_s \quad (4.3.40)$$

Hier ist  $g$  der LANDÉ-FAKTOR, der für die klassische Quantenmechanik und das Elektron  $g = -2$  und gemessen  $g = -2.002\,319\,304\,361\,82(52)$  ist[codata2017]. (52) ist die Unsicherheit der letzten zwei Stellen. Dieser Wert ist in Übereinstimmung mit der QUANTENELEKTRODYNAMIK.  $g$ -Faktoren können auch für Atome und andre Objekte definiert werden. Für das Proton erhält man  $g_p = 5.585694702(17)$  [Cod17].

### 4.3.6. Paramagnetismus

(Siehe Kneubühl, Repetitorium der Physik [Kne78, pp. 262])

Bei paramagnetischen Atomen hebt sich das magnetische Bahnmoment der einzelnen Elektronen eines Atoms sowie deren von den Spins herrührendes magnetisches Moment nicht vollständig auf.

$$\mathbf{m}_A \neq 0 \quad (4.3.41)$$

Das magnetische Moment eines paramagnetischen Atoms hat die Grössenordnung eines Bohrsche Magneton  $1\mu_B$ . Ohne äusseres Magnetfeld verschwindet die makroskopische Magnetisierung, da die einzelnen atomaren magnetischen Momente ungeordnet sind. Im äusseren Magnetfeld ordnen sich die magnetischen Momente teilweise, da die thermische Brownsche Bewegung, temperaturabhängig, für Unordnung sorgt.

Die Magnetisierung kann mit der folgenden Überlegung berechnet werden. Wir setzen an

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= (0, 0, H) \\ \mathbf{m} &= (m \sin \Theta \cos \phi, m \sin \Theta \sin \phi, m \cos \Theta) \\ d\Omega &= \sin \Theta d\Theta d\phi = -d(\cos \Theta) d\phi \end{aligned} \quad (4.3.42)$$

Die Energie des magnetischen Dipols  $\mathbf{m}$  im Magnetfeld  $\mathbf{H}$  hängt nur von  $\Theta$  ab. Wir machen eine Koordinatentransformation auf  $u = \cos \Theta$ . Die Energie ist dann

$$E_{\text{pot}} = -\mathbf{m}_A \cdot \mathbf{B} = -\mathbf{m}_A \cdot (\mu_0 \mathbf{H}) = -\mu_0 m_A H \cos \Theta = -\mu_0 m_A H u \quad (4.3.43)$$

Die Magnetisierung  $M_z$  in der  $z$ -Richtung, der Richtung des Magnetfeldes  $\mathbf{H}$  ist

$$M_z = \frac{1}{V} \left( \sum \mathbf{m}_A \right)_z = n m_A \langle \cos \Theta \rangle = n m_A \langle u \rangle \quad (4.3.44)$$

Hier ist  $n = \frac{N}{V}$  die ZAHLENDICHTE der magnetischen Momente. Bei endlichen Temperaturen müssen die potentiellen Energien  $E_{\text{pot}}$  nach der BOLTZMANNSTATISTIK verteilt sein, also

$$\langle \cos \Theta \rangle = \frac{\int_{\Omega} \cos \Theta e^{-E_{\text{pot}}/k_B T} d\Omega}{\int_{\Omega} e^{-E_{\text{pot}}/k_B T} d\Omega} = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \cos \Theta e^{x \cos \Theta} \sin \Theta d\Theta d\phi}{\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} e^{x \cos \Theta} \sin \Theta d\Theta d\phi} \quad (4.3.45)$$

mit  $x = \mu_0 m H / k_B T$ . In der Koordinate  $u$  und nach Ausführen der trivialen Integration über  $\phi$  lautet die Gleichung

$$\langle u \rangle = \frac{\int_{-1}^1 u e^{xu} du}{\int_{-1}^1 e^{xu} du} \quad (4.3.46)$$

Wir wechseln auf  $\hat{u} = -u$  und erhalten

$$\langle u \rangle = -\frac{\int_{-1}^1 \hat{u} e^{-x\hat{u}} d\hat{u}}{\int_{-1}^1 e^{-x\hat{u}} d\hat{u}} = \coth x - \frac{1}{x} = L(x) \quad (4.3.47)$$

wobei  $L(x)$  die LANGEVIN-FUNKTION ist. Also ist

$$\begin{aligned} M_z &= nm_A L\left(\frac{\mu_0 m_A H}{kT}\right) \\ &= nm_A L\left(\frac{m_A B}{k_B T}\right) \\ &= nm_A \left[ \coth\left(\frac{m_A B}{k_B T}\right) - \frac{k_B T}{m_A B} \right] \end{aligned} \quad (4.3.48)$$

wobei  $n$  die Zahlendichte der Spins ist.

Diese klassisch berechnete Magnetisierung ist für kleine Magnetfelder, also  $kT \gg m_A B$  verifizierbar. Da für  $x \ll 1$  die Reihenentwicklung  $L(x) = x/3 + O(x^2)$  gilt, bekommen wir das CURIE-GESETZ

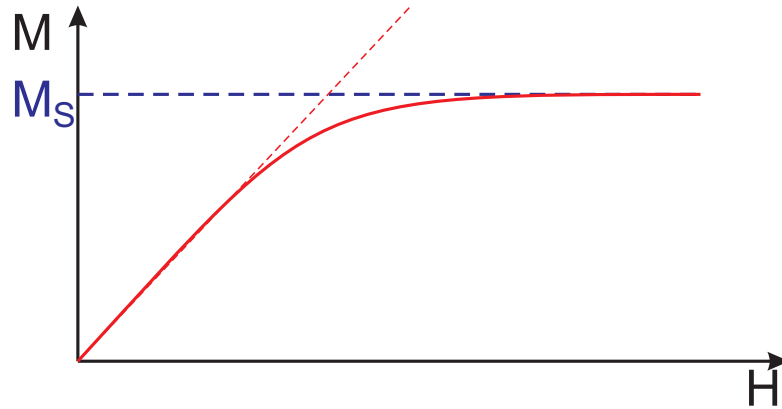
$$M = \frac{1}{3} \frac{nm_A^2}{k_B T} B = \chi H = \frac{C}{T} H \quad (4.3.49)$$

Hier ist  $C$  die volumenbezogene CURIE-KONSTANTE

$$C = \mu_0 n \frac{m_A^2}{3k_B} \quad (4.3.50)$$

Alternativ kann die Curie-Konstante auch mit molaren Größen ausgedrückt werden, indem wir  $m_{mol} = N_A m_A$  setzen.

$$C_{mol} = \mu_0 \frac{m_{mol}^2}{3R} \quad (4.3.51)$$



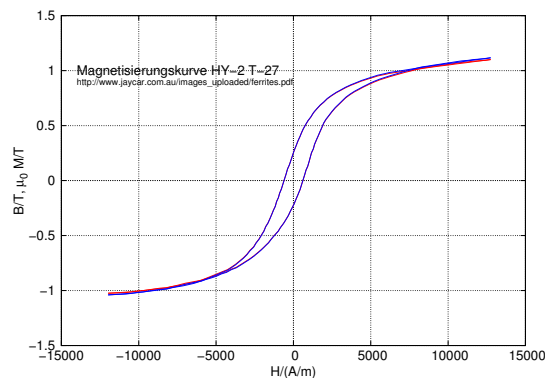
**Abb. 4.41.:** Schematischer Verlauf der Magnetisierung (CURIE-GESETZ für kleine  $B$ ).  $M_S$  ist die Sättigungsmagnetisierung.

Die magnetische Induktion  $\mathbf{B}$  ist durch das Magnetfeld  $\mathbf{H}$  und die Magnetisierung  $\mathbf{M}$  gegeben

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{M} + \mathbf{H}) = \mu_0 (\chi + 1) \mathbf{H} = \mu_0 \mu \mathbf{H} \quad (4.3.52)$$

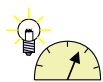


Für ein homogenes Material zeigt Abbildung 4.42 den Zusammenhang zwischen dem Magnetfeld  $|\mathbf{H}|$ , der Magnetisierung  $|\mathbf{M}|$  und der magnetischen Induktion  $|\mathbf{B}/\mu_0|$ . Während die Magnetisierung  $\mathbf{M}$  für grosse Magnetfelder  $\mathbf{H}$  sättigt (alle Dipole sind ausgerichtet), steigt die magnetische Induktion  $\mathbf{B}$  weiter an, aber mit kleinerer Steigung.



**Abb. 4.42.:** Beispielhafter Zusammenhang zwischen dem Magnetfeld  $|\mathbf{H}|$ , der Magnetisierung  $|\mathbf{M}|$  und der magnetischen Induktion  $|\mathbf{B}|$  für ein isotropes Material

### 4.3.7. Ferromagnetismus



#### Versuch 76: Versuch zur Vorlesung:

Ferromagnetismus - Modellversuch (Versuchskarte EM-175)

Ferromagnetische Atome haben genau so wie paramagnetische Atome ein permanentes magnetisches Moment  $\mathbf{m}_A$ . Im Gegensatz zu den Paramagneten bleibt jedoch auch ohne äusseres Magnetfeld ein magnetisches Moment übrig. Die Magnetisierung als Funktion des Magnetfeldes kann mit der unten stehenden Apparatur gemessen werden.

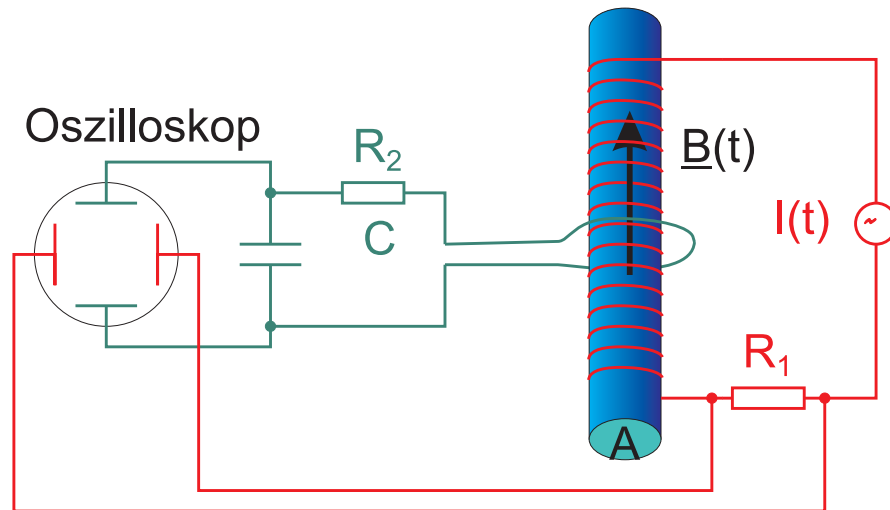
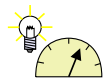
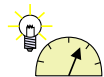


Abb. 4.43.: Messung der Hysterese eines Ferromagneten. Rot ist der Primärkreis, grün der Sekundärkreis.



#### Versuch 77: Versuch zur Vorlesung:

Hysterese des Ferromagneten (Versuchskarte EM-205, Video)



#### Versuch 78: Versuch zur Vorlesung:

Hysterese des Ferromagneten (Versuchskarte EM-205, Video (VPN oder intern))



#### Versuch 79: Versuch zur Vorlesung:

Hysterese des Ferromagneten (Versuchskarte EM-205, Video)

Unter Vernachlässigung der Selbstinduktion ist die Differentialgleichung für den Sekundärkreis

$$-A \cdot \frac{dB(t)}{dt} - \frac{Q(t)}{C} = R_2 \cdot I_2(t) \quad (4.3.53)$$

Dabei ist  $Q(t)$  die LADUNG am Kondensator. Wir schreiben den STROM als zeitliche Ableitung der LADUNG.

$$-\frac{A}{R_2} \cdot \frac{dB(t)}{dt} = \frac{Q(t)}{R_2 C} + \frac{dQ(t)}{dt} \quad (4.3.54)$$

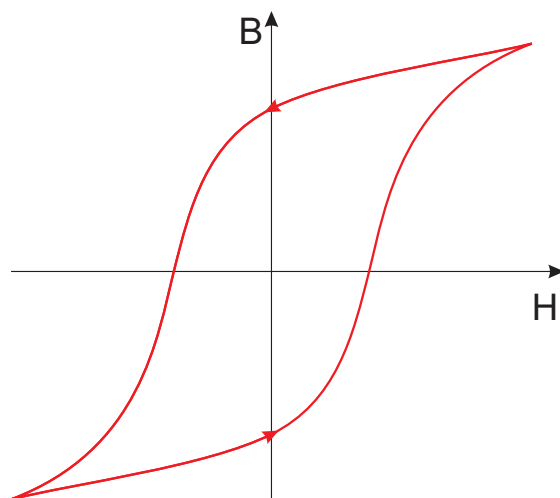
Die Anregung in dieser Schaltung ist ein STROM  $I_1(t)$ , der die Frequenz  $\omega$  hat. Also ist auch  $Q(t)$  eine periodische Funktion mit der gleichen Frequenz. Bei harmonischen Funktionen gilt, dass  $dQ(t)/dt \approx \omega Q(t)$  ist. Wenn  $1/RC \ll \omega$  ist, kann der erste Term auf der rechten Seite vernachlässigt werden. Dann gilt

$$Q(t) = \text{const} \cdot B(t) \quad (4.3.55)$$

und damit für die SPANNUNG am Kondensator

$$U_C(t) = Q(t)/C \propto B(t) \quad (4.3.56)$$

Der Ausgangsstrom  $I(t)$  selber erzeugt das anregende Feld.

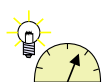


**Abb. 4.44.:** Hysteresekurve eines Ferromagneten

Diese Abbildung zeigt das skizzierte Resultat des obigen Versuches. Interessant ist, dass bei  $I = 0$ , also ohne anregendes Magnetfeld, trotzdem ein Feld  $B \neq 0$  gemessen wird. Diese Feld kann nur von einer nichtverschwindenden Magnetisierung ohne äusseres Feld herrühren. Diese nichtverschwindende Magnetisierung  $M \neq 0$  ist das Kennzeichen eines FERROMAGNETEN.

Andererseits gibt es zwei Punkte, bei denen das resultierende Magnetfeld null ist, obwohl ein äusseres Magnetfeld angelegt wurde. Dies kann nur sein, wenn die Magnetisierung im Material das äussere Feld gerade kompensiert.

Weiter nimmt für sehr grosse anregende Felder das resultierende Magnetfeld kaum mehr zu. Man spricht von einer Sättigung der Magnetisierung.



#### Versuch 80: Versuch zur Vorlesung:

Magnetische Bezirke (Versuchskarte EM-178, Video (VPN oder intern))

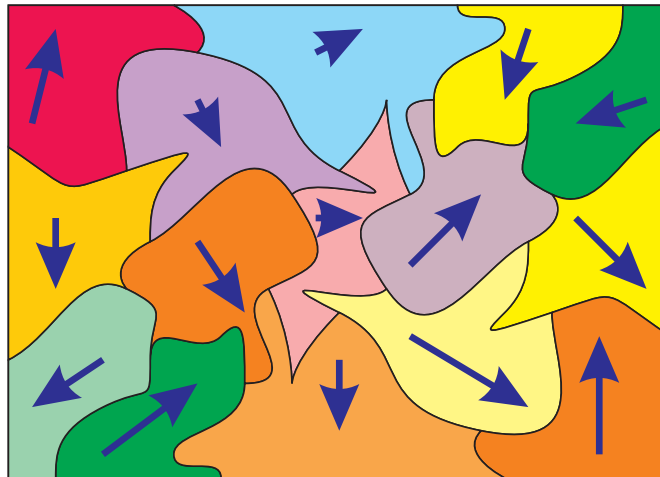


Abb. 4.45.: Ferromagnetische Domänen

Das beobachtete Verhalten kann mit FERROMAGNETISCHEN DOMÄNEN, auch Weiss'sche Bezirke genannt, erklärt werden. Das Material besteht, wie oben skizziert, aus einer grossen Zahl kleiner Bereiche, die jeder seine eigene Orientierung der Magnetisierung haben. Die gemittelte Magnetisierung hängt davon ab, wie zufällig die Domänen verteilt sind.

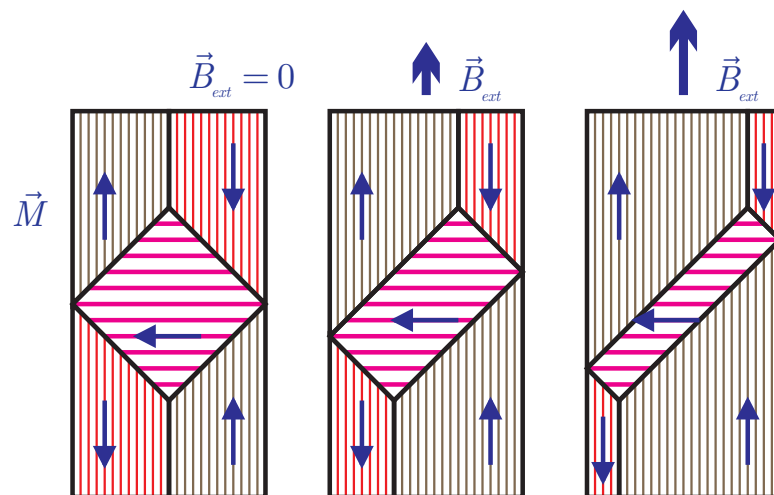


Abb. 4.46.: Änderung der Domänenstruktur bei stärker werdendem äusserem Magnetfeld

Wird ein äusseres Magnetfeld angelegt, beginnen die Domänen, die bezüglich des externen Feldes richtig orientiert sind, zu wachsen, die anderen schrumpfen. Die makroskopische Magnetisierung wächst, hinkt aber hinter der Anregung zurück.

Domänen ändern die Richtung ihrer Magnetisierung nicht, sie ändern nur ihre Grösse.

Bei der Änderung der Grösse der Domänen müssen Domänenwände verschoben werden. Dies kostet Energie und zeigt sich als HYSTERESE. Dieser Energieverlust bei der Grössenänderung stabilisiert aber auch die Domänen.

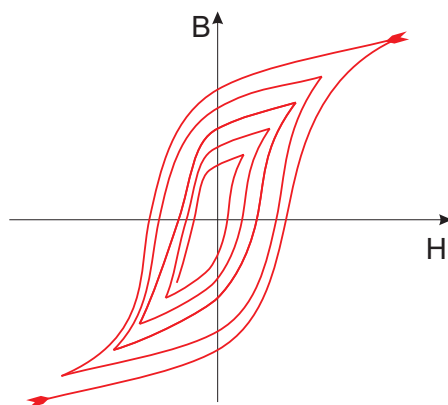


Abb. 4.47.: Löschen des remanenten Magnetismus

Um die makroskopische Orientierung der Domänen zum Verschwinden zu bringen, muss man die ferromagnetische Substanz langsam aus einem Wechselfeld entfernen. Das Bild oben zeigt die resultierenden Hysteresekurven. Die Hystereseschleife wird so quasikontinuierlich auf einen Punkt, den Ursprung des Koordinatensystems zusammengezogen.

**Anwendung:** Entmagnetisieren von Schraubenziehern, Löschen von Tonbändern.

## 4.4. Zusammenfassung: Elektrodynamik: zeitlich veränderliche Magnetfelder

**Magnetischer Fluss** Gleichung (4.1.4)

$$\phi_B = \iint_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$$

**Lorentztransformation der EMK** Gleichung (4.1.11)

$$U'_{EMK} = \gamma(v)U_{EMK}$$

**Induktionsgesetz von Faraday** Gleichung (4.1.22)

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = - \iint_{A(S)} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$$

**Differentielle Form des Induktionsgesetzes von Faraday** Gleichung (4.1.24)

$$\text{rot } \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

**Magnetfeld einer langen Spule** Gleichung (4.1.37)

$$B = \mu_0 \frac{N}{\ell} I$$

**Fluss einer langen Spule** Gleichung (4.1.38)

$$\phi_B = N \cdot B \cdot A = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} I \cdot A = \mu_0 n^2 A \ell I$$

**Selbstinduktivität einer langen Spule** Gleichung (4.1.39)

$$L = \frac{\phi_B}{I} = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} A = \mu_0 n^2 A \ell$$

**Selbstinduktionsspannung** Gleichung (4.1.42)

$$U = - \frac{d\phi_m}{dt} = -L \frac{dI}{dt}$$

**Übersetzungsverhältnis eines Transformators** Gleichung (4.1.54)

$$U_2 = - \frac{N_2}{N_1} U_1$$

**Übersetzungsverhältnis eines Transformators** Gleichung (4.1.55)

$$I_2 = - \frac{N_1}{N_2} I_1$$

**Übersetzungsverhältnis eines Transformators für Leistungen** Gleichung (4.1.56)

$$U_2 I_2 = U_1 I_1$$

**Maschenregel** Gleichung (4.1.57)

$$\sum_{\forall k \text{ Quellen}} U_k = \sum_{\forall j \text{ Verbraucher}} U_j$$

**Knotenregel** Gleichung (4.1.58)

$$\sum_{\forall k \text{ eines Knotens}} I_k = 0$$

**Effektivspannung** Gleichung (4.1.68)

$$U_{eff} = U_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_t^{t+T} U^2(\tau) d\tau}$$

**Reelle Impedanz einer Spule** Gleichung (4.1.78)

$$X_L = \omega L$$

**Komplexe Impedanz einer Spule** Gleichung (4.1.85)

$$Z_L = i\omega L$$

**Reelle Impedanz eines Kondensators** Gleichung (4.1.91)

$$X_C = \frac{1}{\omega C}$$

**Komplexe Impedanz eines Kondensators** Gleichung (4.1.97)

$$Z_C = \frac{1}{i\omega C}$$

**Berechnung nichtlinearer Gleichungen mit komplexen Impedanzen** Beispiel Leistung, Gleichung (4.1.86)

$$P(t) = \Re(U(t))\Re(I(t)) = \frac{1}{2} (U(t) + U^*(t)) \cdot \frac{1}{2} (I(t) + I^*(t)) = \text{usw.}$$

**Schwingkreis** Gleichung (4.1.107)

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI}{dt} + \frac{1}{LC} I = 0$$

**Induzierte Spannung in Generator** Gleichung (4.1.120)

$$U_{eff,i} = \frac{NBA\omega}{\sqrt{2}}$$

**Drehmomentkurve eines Nebenschlussmotors** Gleichung (4.1.126)

$$T_{eff}(\omega) = \frac{NAB}{\sqrt{2}} \left( \frac{U}{R} - \frac{NBA}{R\sqrt{2}} \omega \right) = \frac{NABU}{R\sqrt{2}} - \frac{N^2 A^2 B^2}{2R} \omega$$

**Drehmomentkurve eines Hauptschlussmotors** Gleichung (4.1.147)

$$T_{eff}(\omega) = \frac{2 N A K U_0^2}{\left[ \sqrt{2} R + \sqrt{2} R_E + K N A \omega \right]^2}$$

**Wideroe-Beziehung für das Betatron** Gleichung (4.1.155)

$$\bar{B}(t) = 2 \cdot B(t)$$

**Skin-Effekt** Gleichung (4.1.158)

$$\frac{\partial E(r, t)}{\partial r} = \frac{\partial B(r, t)}{\partial t}$$

**Skin-Tiefe** Gleichung (4.1.176)

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu \mu_0 \sigma \omega}} = \frac{1}{\sqrt{\pi \mu \mu_0 \sigma \nu}}$$

**Energiedichte des Magnetfeldes** Gleichung (4.2.10)

$$w_B = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

**Larmorfrequenz** Gleichung (4.3.21)

$$\Omega = \frac{e}{2m} B$$

**Diamagnetisches Moment** Gleichung (4.3.30)

$$\mathbf{m}_A = -\frac{Z \cdot e^2 \cdot R^2}{10m_e} \mathbf{B}$$

**Magnetisches Moment des Elektrons** Gleichung (4.3.38)

$$\mathbf{m}_s = -\frac{e}{m_e} \mathbf{s}$$

**Langevin-Funktion** Gleichung (4.3.47)

$$L(x) = \coth x - \frac{1}{x}$$

**Curie-Gesetz** Gleichung (4.3.49)

$$M = \frac{1}{3} \frac{n m_A^2}{k_b T} B = \chi H = \frac{C}{T} H$$



**Curie-Kontante** Gleichung (4.3.50)

$$C = \mu_0 n \frac{m_A^2}{3k_b}$$

**molare Curie-Konstante** Gleichung (4.3.51)

$$C_{mol} = \mu_0 \frac{m_{mol}^2}{3R}$$

**Magnetisierung und magnetische Induktion** Gleichung (4.3.52)

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{M} + \mathbf{H}) = \mu_0 (\chi + 1) \mathbf{H} = \mu_0 \mu \mathbf{H}$$



# 5. Die Maxwell'schen Gleichungen

## 5.1. Was wissen wir?

(Siehe Leisi, Klassische Physik II [Lei98, pp. 251])

Maxwellgleichungen werden gebraucht, um die Funktionsweise von

- Radiowellen
- Mikrowellen
- Mobiltelefonen

zu erklären.

Bis jetzt kennen wir die folgenden Gleichungen um die elektrischen Phänomene zu beschreiben:

Gauss'sches Gesetz (2.3.9)

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_{el} \quad \text{I}$$

Induktionsgesetz (4.1.24)

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \text{II}$$

Quellenfreiheit (3.8.43)

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad \text{III}$$

Durchflutungsgesetz (3.8.35)

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{i} \quad \text{IV}$$

## 5.2. Auflösung des Widerspruchs zur Kontinuitätsgleichung, Maxwellgleichungen

Zusätzlich zu den obigen Gleichungen muss die Kontinuitätsgleichung für LADUNGEN gelten

$$\operatorname{div} \mathbf{i} = -\frac{\partial \rho_{el}}{\partial t} \quad (5.2.1)$$

Diese Kontinuitätsgleichung ist im Widerspruch zum Durchflutungsgesetz. Dies sieht man, indem man die Divergenz auf das Durchflutungsgesetz anwendet.

$$\operatorname{div} (\mathbf{i}) = -\frac{\partial \rho_{el}}{\partial t} = \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{H} \equiv 0 \quad (5.2.2)$$

im Widerspruch zur Kontinuitätsgleichung. Dieser Widerspruch wurde von MAXWELL aufgelöst, indem er das Durchflutungsgesetz ergänzt hat.

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (5.2.3)$$

Die Grösse  $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$  hat die Dimension einer Stromdichte. Diese MAXWELLSCHE VERSCHIEBUNGSSTROMDICHTEN macht das Durchflutungsgesetz mit der Kontinuitäts-

gleichung kompatibel. Der Strom ist bei dem modifizierten Durchflutungsgesetz durch

$$\mathbf{i} = \mathbf{rot} \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (5.2.4)$$

Die Divergenz davon ist (mit  $\mathbf{div} \mathbf{rot} \mathbf{X} \equiv 0$ )

$$\mathbf{div} \mathbf{i} = -\mathbf{div} \left( \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{div} \mathbf{D}) = -\frac{\partial \rho_{el}}{\partial t} \quad (5.2.5)$$

Damit ist gezeigt, dass die Gleichungen **I-III** zusammen mit dem modifizierten Durchflutungsgesetz auch die Kontinuitätsgleichung beinhalten.

### 5.3. Maxwellgleichungen

Dieser Satz Gleichungen wird die

#### MAXWELL-GLEICHUNGEN

$$\mathbf{div} \mathbf{D} = \rho_{el} \quad \text{I} \quad (5.3.1a)$$

$$\mathbf{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \text{II} \quad (5.3.1b)$$

$$\mathbf{div} \mathbf{B} = 0 \quad \text{III} \quad (5.3.1c)$$

$$\mathbf{rot} \mathbf{H} = \mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad \text{IV} \quad (5.3.1d)$$

genannt. (Ursprüngliche Ableitung der Gleichungen: (2.3.9), (4.1.24), (3.8.43) und (5.2.3))

Zusammen mit dem Kraftgesetz (siehe (4.1.21))

$$\mathbf{F} = q \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (5.3.2)$$

hat man eine vollständige Charakterisierung der Elektrodynamik für isotrope Materialien.

Die Maxwellsche Verschiebungsstromdichte, die eingeführt wurde um die Maxwellgleichungen mit der Kontinuitätsgleichung kompatibel zu machen, führt dazu, dass man aus den Maxwellgleichungen elektromagnetische Wellen vorhersagen kann.

Die Maxwellgleichungen sind nicht invariant unter der Galilei-Transformation. Diese Beobachtung war ein wichtiger Meilenstein auf dem Weg zur speziellen Relativitätstheorie.

Die Integralform des modifizierten Durchflutungsgesetzes lautet

$$\iint_{A(S)} \mathbf{rot} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{a} = \iint_{A(S)} \left( \mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{a} = \oint_S \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} \quad (5.3.3)$$

wenn man den Satz von Stokes (Siehe Gleichung (C.11.1)) anwendet.  $S$  ist eine beliebige Kurve und  $A(S)$  die durch sie berandete Fläche.

Das Gausssche Gesetz liefert

$$\frac{\partial \rho_{el}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \mathbf{D}) = \operatorname{div} \left( \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \quad (5.3.4)$$

Damit wird die Kontinuitätsgleichung

$$\operatorname{div} \mathbf{i} + \frac{\partial \rho_{el}}{\partial t} = 0 = \operatorname{div} \mathbf{i} + \operatorname{div} \left( \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = \operatorname{div} \left( \mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \quad (5.3.5)$$

Damit ist das Integral über die Fläche in Gleichung (5.3.3) unabhängig von  $S$ .

Die Integralformeln der Maxwellgleichungen lauten (ursprüngliche Ableitungen: (2.3.7), (4.1.22), (3.8.42) und (5.3.3))

$$\iint_{A(V)} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} = \iiint_V \rho_{el}(\mathbf{r}) dV \quad \text{I} \quad (5.3.6a)$$

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = - \frac{\partial}{\partial t} \iint_{A(S)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} \quad \text{II} \quad (5.3.6b)$$

$$\iint_{A(V)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = 0 \quad \text{III} \quad (5.3.6c)$$

$$\oint_S \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \iint_{A(S)} \left( \mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{a} \quad \text{IV} \quad (5.3.6d)$$

Der Unterschied zwischen der zweiten und der dritten Maxwellgleichung ist, dass in der zweiten Gleichung über eine einfache, von der Kurve  $S$  aufgespannte Fläche  $A(S)$  integriert wird, während in der dritten Gleichung über die das Volumen  $V$  einschliessende Fläche  $A(V)$  integriert wird.

Die angegebenen Maxwellgleichungen gelten für alle Medien, auch mit tensoriellen Eigenschaften. Dort benötigt man die beiden Materialgleichungen

$$\mathbf{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \mathbf{E} \quad (5.3.7a)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mu_0 \mathbf{H} \quad (5.3.7b)$$

$$\mathbf{E} = \varepsilon^{-1} \frac{1}{\varepsilon_0} \mathbf{D} \quad (5.3.7c)$$

$$\mathbf{H} = \mu^{-1} \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \quad (5.3.7d)$$

um das elektrische Feld und die dielektrische Verschiebung, bzw. das magnetische Feld und die magnetische Induktion miteinander zu verknüpfen, wobei  $\varepsilon$  und  $\mu$  Tensoren sind.

Die Maxwellgesetze mit explizit eingesetzten Materialgesetzen lauten für beliebige Materialien

$$\varepsilon_0 \operatorname{div} (\varepsilon \mathbf{E}) = \rho_{el} \quad \text{I} \quad (5.3.8a)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \text{II} \quad (5.3.8b)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad \text{III} \quad (5.3.8c)$$

$$\operatorname{rot} \left( \mu^{-1} \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \right) = \left( \mathbf{i} + \varepsilon_0 \frac{\partial (\varepsilon \mathbf{E})}{\partial t} \right) \quad \text{IV} \quad (5.3.8d)$$

in der differentiellen Schreibweise und

$$\iint_{A(V)} \varepsilon \varepsilon_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \iiint_V \rho_{el}(\mathbf{r}) dV \quad \text{I} \quad (5.3.9a)$$

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_{A(S)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} \quad \text{II} \quad (5.3.9b)$$

$$\iint_{A(V)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = 0 \quad \text{III} \quad (5.3.9c)$$

$$\oint_S \left( \mu^{-1} \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \right) \cdot d\mathbf{s} = \iint_{A(S)} \left( \mathbf{i} + \varepsilon_0 \frac{\partial (\varepsilon \mathbf{E})}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{a} \quad \text{IV} \quad (5.3.9d)$$

in der Integralschreibweise. Beachten Sie, dass sowohl  $\varepsilon$  wie auch  $\mu$  sowohl von der Zeit wie auch vom Ort abhängen können!

## 5.4. Maxwellgleichungen in isotropen zeitunabhängigen Medien

Die Maxwellgesetze beliebige isotrope und zeitunabhängige Materialien

$$\operatorname{div} (\mathbf{E}) = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0} \rho_{el} \quad \text{I} \quad (5.4.1a)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \text{II} \quad (5.4.1b)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad \text{III} \quad (5.4.1c)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu\mu_0 \left( \mathbf{i} + \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial (\mathbf{E})}{\partial t} \right) \quad \text{IV} \quad (5.4.1d)$$

in der differentiellen Schreibweise und

$$\iint_{A(V)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \iiint_V \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0} \rho_{el}(\mathbf{r}) dV \quad \text{I} \quad (5.4.2a)$$

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_{A(S)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} \quad \text{II} \quad (5.4.2b)$$

$$\iint_{A(V)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = 0 \quad \text{III} \quad (5.4.2c)$$

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \iint_{A(S)} \mu\mu_0 \left( \mathbf{i} + \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial (\mathbf{E})}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{a} \quad \text{IV} \quad (5.4.2d)$$

in der Integralschreibweise.

## 5.5. Anwendung der Maxwellgleichungen

### Beispiel: Anwendung

Wir betrachten einen langen kreiszylindrischen Leiter mit dem Durchmesser  $R$ , aus dem eine Scheibe mit der Dicke  $d \ll R$  herausgeschnitten wurde. Dieser Leiter werde an eine Gleichstromquelle mit  $I(t) = I_0$  angeschlossen. Die Endflächen beim herausgeschnittenen Stück wirken wie ein Kondensator. Also ist

$$Q(t) = I_0 \cdot t \quad (5.5.1)$$

Da wir eine zeitlich konstante Situation haben, sind alle zeitlichen Ableitungen null. Mit der Integralform des Gaußschen Gesetzes bekommt man mit einer geschlossenen Fläche  $A$ , die eine Kondensatorplatte beinhaltet

$$\varepsilon_0 \iint_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \iiint_{V(A)} \rho_{el} dV \quad (5.5.2a)$$

$$\varepsilon_0 E(t) \pi R^2 = Q(t) \quad (5.5.2b)$$

wobei wir berücksichtigt haben, dass innerhalb des Leiters sowie ausserhalb des herausgeschnittenen Stückes  $\mathbf{E} = 0$  gilt. Damit erhalten wir

$$E(t) = \frac{Q(t)}{\varepsilon_0 \pi R^2} = \frac{I_0(t)}{\varepsilon_0 \pi R^2} t = \frac{i_0}{\varepsilon_0} t \quad (5.5.3)$$

Dabei ist  $i_0$  die Stromdichte im Draht, nicht in der Lücke. Das VEKTORFELD

$$\left( \mathbf{i} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$$

ist homogen im ganzen Zylinder, einschliesslich des herausgeschnittenen Stückes. Im Leiter ist  $\mathbf{E} = 0$ , also

$$i_0 = \frac{I_0}{\pi R^2} \quad (5.5.4)$$

Im herausgeschnittenen Stück ist  $i = 0$  und damit

$$i' = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \frac{I_0(t)}{\varepsilon_0 \pi R^2} t = \frac{I_0}{\pi R^2} = i_0 \quad (5.5.5)$$

Deshalb muss  $\mathbf{B}$  über den ganzen Leiter, inklusive des herausgeschnittenen Stückes, tangential und translationsinvariant entlang des Leiters sein.

$$B(r) = \frac{\mu_0}{2\pi} I_0 \cdot \frac{r}{R^2} \quad \text{für} \quad r < R \quad (5.5.6)$$

sowie

$$B(r) = \frac{\mu_0}{2\pi} I_0 \cdot \frac{1}{r} \quad \text{für} \quad r \geq R \quad (5.5.7)$$

Der Maxwellsche Verschiebungsstrom bewirkt also, dass die Stromverteilung im Leiter in den Zwischenraum verschoben wird. Das modifizierte Ampèresche Durchflutungsgesetz ist die physikalische Rechtfertigung für den umgangssprachlichen Ausdruck **der Strom fliesst durch den Kondensator**.



# 6. Elektromagnetische Wellen

## 6.1. Die Wellengleichung im Vakuum

Im VAKUUM gibt es keine Teilchen, also auch keine geladenen Teilchen. Wir können also setzen:

$$\rho_{el}(\mathbf{r}) = 0$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = 0$$

Damit lauten die Maxwellgleichungen [Max73] in der Integralform

$$\iint_{A(V)} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} = 0 \quad \text{I} \quad (6.1.1a)$$

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = - \frac{\partial}{\partial t} \iint_{A(S)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} \quad \text{II} \quad (6.1.1b)$$

$$\iint_{A(V)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = 0 \quad \text{III} \quad (6.1.1c)$$

$$\oint_S \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \varepsilon \varepsilon_0 \iint_{A(S)} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} \quad \text{IV} \quad (6.1.1d)$$

oder in der differentiellen Form

$$\text{div } \mathbf{D} = 0 \quad \text{I} \quad (6.1.2a)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \text{II} \quad (6.1.2b)$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0 \quad \text{III} \quad (6.1.2c)$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad \text{IV} \quad (6.1.2d)$$

Im Vakuum ist  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$  sowie  $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$  sowie  $\mu = 1$  und  $\varepsilon = 1$ . Zur Ableitung der Wellengleichung sind die differentiellen Maxwellgleichungen besser als die integralen geeignet. Wir verwenden  $\mu_0 \varepsilon_0 = 1/c^2$  und erhalten also

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0 \quad \text{I} \quad (6.1.3a)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \text{II} \quad (6.1.3b)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad \text{III} \quad (6.1.3c)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad \text{IV} \quad (6.1.3d)$$

Die Maxwellgleichungen im VAKUUM (Gleichung (6.1.3)) sind symmetrisch bezüglich  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$ . Wir nehmen die Rotation der zweiten Maxwellgleichung.

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\operatorname{rot} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{B} \quad (6.1.4)$$

Indem wir die Austauschbarkeit von Ableitungen verwenden. Nun setzt man die vierte Maxwellgleichung in die zweite Gleichung ein. Wir erhalten eine Differentialgleichung für  $\mathbf{E}$  allein.

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (6.1.5)$$

Nun gilt die Vektoridentität

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E} - \operatorname{div} \operatorname{grad} \mathbf{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E} - \Delta \mathbf{E} \quad (6.1.6)$$

Wegen der ersten Maxwellgleichung verschwindet der erste Term auf der rechten Seite. Also lauten die WELLENGLEICHUNGEN

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = c^2 \Delta \mathbf{E} \quad (6.1.7)$$

sowie nach einer analogen Ableitung für  $\mathbf{B}$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = c^2 \Delta \mathbf{B} \quad (6.1.8)$$

Die nicht-trivialen Lösungen der WELLENGLEICHUNGEN heissen ELEKTROMAGNETISCHE WELLEN. Dieses Phänomen ist implizit in den Maxwellgleichungen enthalten, die aus makroskopischen Experimenten abgeleitet wurden. Die WELLENGLEICHUNG beschreibt alle Wellenphänomene aus der Kommunikationstechnik, der OPTIK und der Wechselwirkung von Atomen und Molekülen untereinander, für Abstände von  $1nm$  oder mehr. Die Maxwellgleichungen sind invariant unter der LORENTZ-TRANSFORMATION, nicht aber unter der GALILEI-TRANSFORMATION. In jedem Inertialsystem im Vakuum ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1} \quad (6.1.9)$$

Damit haben die Maxwellgleichungen implizit schon 1864 die spezielle Relativitätstheorie vorweggenommen.

In Medien ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit entsprechend

$$c_m = \frac{1}{\sqrt{\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \cdot c \quad (6.1.10)$$

wobei  $\mu$  die relative Permeabilität und  $\varepsilon$  die relative Permittivität ist.

## 6.2. Allgemeine Lösung der Wellengleichung

Es gibt eine grosse Klasse von Funktionen (skalar oder vektoriell), die die Wellenleitergleichung lösen. Im Folgenden besprechen wir skalare Funktionen, die aber auch als eine Vektorkomponente aufgefasst werden können. Alle Funktionen, die nur von einer skalaren Variablen

$$u = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t \quad (6.2.1)$$

abhängen lösen die Wellengleichung, wenn sie genügend oft stetig differenzierbar sind. Wir betrachten die Funktion  $f(u) = f(u(\mathbf{r}, t))$ . und setzen sie in  $c^2 \Delta f(u(\mathbf{r}, t)) = (\partial^2 / \partial t^2) f(u(\mathbf{r}, t))$  ein. Die Kettenregel der Differentiation ergibt für  $u = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t = k_x x + k_y y + k_z z - \omega t$

$$\frac{\partial}{\partial t} f(u(x, y, z, t)) = \frac{\partial f(u)}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \quad (6.2.2a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} f(u(x, y, z, t)) &= \frac{\partial}{\partial t} \cdot \left[ \frac{\partial f(u(x, y, z, t))}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \right] \\ &= \frac{\partial^2 f(u)}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u(x, y, z, t))}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ &= \frac{\partial^2 f(u)}{\partial u^2} \cdot \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \end{aligned} \quad (6.2.2b)$$

Die letzte Umformung in Gleichung (6.2.2b) beruht auf

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (k_x x + k_y y + k_z z - \omega t) = 0$$

Da  $(\partial / \partial t) u = -\omega$  ist, ist auch

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} f(u(x, y, z, t)) = \frac{\partial^2 f(u)}{\partial u^2} \cdot \omega^2 \quad (6.2.3)$$

Analog erhalten wir für die Raumkomponente  $x$

$$\frac{\partial}{\partial x} f(u(x, y, z, t)) = \frac{\partial f(u)}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \quad (6.2.4a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(u(x, y, z, t)) &= \frac{\partial}{\partial x} \cdot \left[ \frac{\partial f(u(x, y, z, t))}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right] \\ &= \frac{\partial^2 f(u)}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f(u(x, y, z, t))}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ &= \frac{\partial^2 f(u)}{\partial u^2} \cdot \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \end{aligned} \quad (6.2.4b)$$

Also ist wieder mit  $\frac{d^2 u}{dx^2} = 0$  und zyklisch für  $x, y, z$

$$\begin{aligned} \Delta f(\mathbf{r}, t) &= \Delta f(u(\mathbf{r}, t)) \\ &= \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(u(x, y, z, t)) \right) + \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(u(x, y, z, t)) \right) + \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} f(u(x, y, z, t)) \right) \\ &= \frac{\partial^2 f(u)}{\partial u^2} \cdot \left( \left( \frac{\partial}{\partial x} u \right)^2 + \left( \frac{\partial}{\partial y} u \right)^2 + \left( \frac{\partial}{\partial z} u \right)^2 \right) \\ &= \frac{\partial^2 f(u)}{\partial u^2} \cdot (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \\ &= \frac{\partial^2 f(u)}{\partial u^2} \cdot (\mathbf{k}^2) \end{aligned} \quad (6.2.5)$$

Damit lautet die Wellengleichung mit Gleichung (6.2.2b), Gleichung (6.2.4b), Gleichung (6.2.3) und Gleichung (6.2.5)

$$\begin{aligned} c^2 \Delta f(\mathbf{r}, t) &= c^2 \Delta f(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} f(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} f(\mathbf{r}, t) \\ c^2 \frac{\partial^2 f(u)}{\partial u^2} \cdot (\mathbf{k}^2) &= \frac{\partial^2 f(u)}{\partial u^2} \cdot \omega^2 \\ c^2 \mathbf{k}^2 &= c^2 |\mathbf{k}|^2 = \omega^2 \end{aligned} \quad (6.2.6)$$

Damit können wir sagen:

Jede Funktion  $\mathbf{E}(u)$  mit  $u = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t$  ist eine Lösung der Wellengleichung

$$c^2 \Delta \mathbf{E}(u(\mathbf{r}, t)) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E}(u(\mathbf{r}, t)), \quad (6.2.7)$$

sofern

$$c = \frac{\omega}{|\mathbf{k}|} \quad (6.2.8)$$

gilt.

Aus den Gleichungen (6.1.3) kann die ORIENTIERUNG VON  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{E}$  UND  $\mathbf{B}$  berechnet werden. Wir verwenden die Gleichungen (6.2.7) und (6.2.8) und schreiben alle Ableitungen nach  $x$ ,  $y$ ,  $z$  und  $t$  als Kettenableitungen zuerst nach  $u$ . Wenn  $\mathbf{E}(u)$  aus der Wellengleichung bekannt ist, verwenden wir die II. Maxwellgleichung aus (6.1.3) und erhalten

$$\begin{aligned}\text{rot } \mathbf{E}(u) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \mathbf{E}(u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{d}{du} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \frac{d}{du} \\ \frac{\partial u}{\partial z} \frac{d}{du} \end{pmatrix} \times \mathbf{E}(u) = \mathbf{k} \times \frac{d}{du} \mathbf{E}(u) \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(u) = \frac{\partial u}{\partial t} \frac{d}{du} \mathbf{B}(u) = \omega \frac{d}{du} \mathbf{B}(u) \\ \mathbf{k} \times \frac{d}{du} \mathbf{E}(u) &= \omega \frac{d}{du} \mathbf{B}(u)\end{aligned}\quad (6.2.9)$$

Wir haben dabei verwendet, dass  $du/dx = k_x$ ,  $du/dy = k_y$ ,  $du/dz = k_z$  und  $du/dt = -\omega$ . Damit ist auch  $(du/dx, du/dy, du/dz)^T = (k_x, k_y, k_z)^T = \mathbf{k}$ . Integrieren wir die Gleichung (6.2.9) nach  $u$  erhalten wir

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega \mathbf{B} \quad (6.2.10)$$

$\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  bilden in dieser Reihenfolge ein RECHTSHÄNDIGES DREIBEIN. Die drei Vektoren stehen paarweise rechtwinklig aufeinander.

Hätten wir die Wellengleichung für  $\mathbf{B}$  gelöst, hätten wir die Beziehung

$$\mathbf{k} \times \mathbf{B} = -\frac{\omega}{c^2} \mathbf{E} \quad (6.2.11)$$

bekommen. Diese Beziehung (6.2.11) ist aber unter Verwendung von (6.2.8) identisch mit (6.2.10).

Betragsmässig haben wir im Vakuum weiter die Beziehung

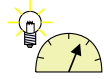
$$|\mathbf{E}| = c |\mathbf{B}|. \quad (6.2.12)$$

## 6.3. Elektromagnetische Wellen im Doppelleitersystem

Wir untersuchen die Wellenphänomene an 3 Testsystemen,

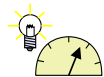
- A. Doppelleitung oder LECHER-LEITUNG, die besonders einfach auszumessen ist

- B. Der Doppelleitung aus parallelen Ebenen, die wichtig für die Printplattentechnologie ist und besonders einfach zu berechnen ist
- C. dem Koaxialkabel, der technisch wichtigen Anwendung für Verbindungen.



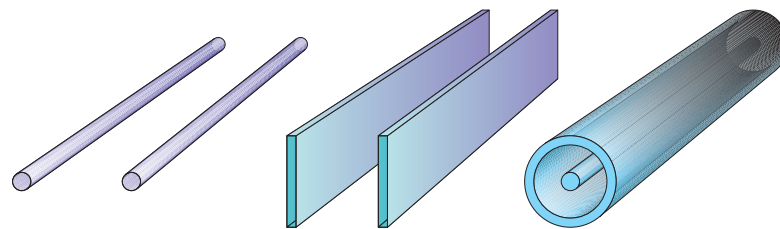
### Versuch 81: Versuch zur Vorlesung:

Lecherleitung (Versuchskarte SW-025, Video (VPN oder intern))



### Versuch 82: Versuch zur Vorlesung:

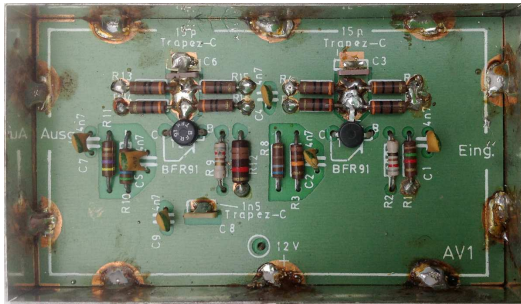
Koaxialleitung (Versuchskarte SW-085, Video)



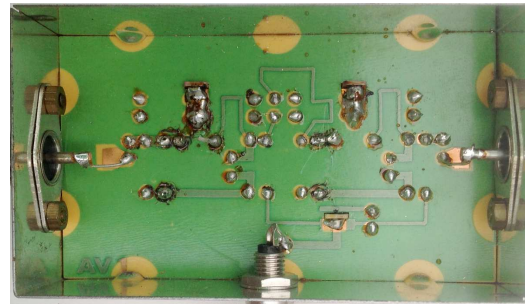
**Abb. 6.1.:** 3 mögliche DOPPELLEITERSYSTEME. Links die Lecherleitung, in der Mitte eine Doppelleiterleitung, wie sie bei Printplatten üblich ist und rechts ein Koaxialkabel

Wenn man das Doppelleitersystem mit elektromagnetischen Wellen mit einer Wellenlänge von etwa  $\lambda = 1$  m speist, beobachtet man folgendes

1. Das am Ende offene Doppelleitersystem zeigt Knoten und Bäuche des  $\mathbf{E}$ - und des  $\mathbf{B}$ -Feldes in Richtung des Wellenleiters. Der Abstand der Intensitätsmaxima beträgt  $\lambda/2$  für beide Felder. Die Maxima der  $\mathbf{E}$ -Feldes sind gegen denen des  $\mathbf{B}$ -Feldes verschoben. Wir haben stehende Wellen.
2. Das am Ende mit einem Kurzschlussbügel versehene System zeigt das gleiche Verhalten wie vorher. Die Maxima sind jedoch verschoben. Wieder haben wir stehende Wellen.
3. Wenn das Doppelleitersystem mit einem WIDERSTAND von etwa  $400\Omega$  abgeschlossen ist, verschwinden die Maxima. Es gibt keine stehenden Wellen.
4. Die Richtungen von  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  sind analog wie beim Kondensator.



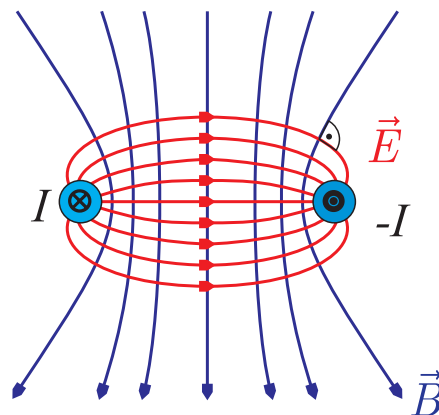
Ansicht von oben  
Bestückungsseite



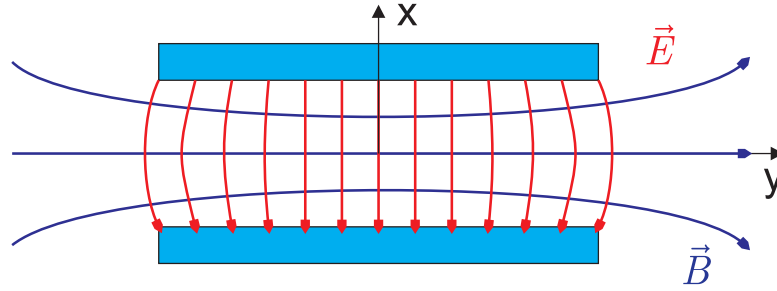
Ansicht von unten  
Seite mit Wellenleitern

**Abb. 6.2.:** 800 MHz-Breitbandverstärker für Fernsehsignale. Auf der Unterseite sind die Wellenleiterstrukturen sichtbar (Mittlere Struktur in Abbildung 6.1)

Abbildung 6.2 zeigt beispielhaft eine Hochfrequenzschaltung. Die Wellenlänge der verstärkten Signale ist zwar einiges grösser als die Schaltung. Die auf der Unterseite sichtbaren Wellenleiterstrukturen verhindern eine unkontrollierte Abstrahlung elektromagnetischer Energie.



**Abb. 6.3.:** Magnetfelder und elektrische Felder bei einer Lecherleitung.



**Abb. 6.4.:** Magnetfelder und elektrische Felder bei einer Doppelleitung aus parallelen Platten

Wir setzen für die  $\mathbf{E}$ -Welle in der Geometrie der obigen Zeichnung an

$$\begin{aligned} E_x(z, t) &= -E_0 \cos(kz - \omega t) \\ E_y(z, t) &= 0 \\ E_z(z, t) &= 0 \end{aligned} \quad (6.3.1)$$

Dieses Feld erfüllt die Wellengleichung. Wir behaupten, dass das  $\mathbf{B}$ -Feld durch

$$\begin{aligned} B_x(z, t) &= 0 \\ B_y(z, t) &= -\frac{E_0}{c} \cos(kz - \omega t) \\ B_z(z, t) &= 0 \end{aligned} \quad (6.3.2)$$

gegeben ist. Auch diese Gleichung erfüllt die Wellengleichung. Wir verwenden die zweite Maxwellgleichung, um zu zeigen, dass die Kopplung richtig ist. Wir schreiben  $\mathbf{rot E} = -(\partial/\partial t)\mathbf{B}$  in Komponenten

$$\left( \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}, \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}, \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) = - \left( \frac{\partial B_x}{\partial t}, \frac{\partial B_y}{\partial t}, \frac{\partial B_z}{\partial t} \right) \quad (6.3.3)$$

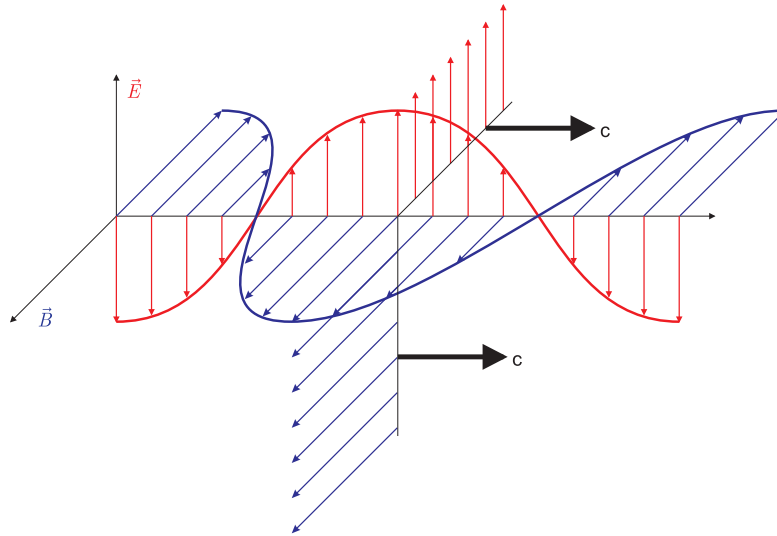
Die  $x$ - und die  $z$ -Komponenten sind null, nach der Voraussetzung. Die  $y$ -Komponente lautet

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \quad (6.3.4)$$

Mit  $c = \omega/k$  ist diese Kopplungsgleichung, die zweite Maxwellgleichung erfüllt. Die vierte Maxwellgleichung ist ebenfalls erfüllt. Aus ihr erhält man

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = -c^2 \frac{\partial B_y}{\partial z} \quad (6.3.5)$$





**Abb. 6.5.:** Ausbreitung von elektromagnetischen Wellen

Diese elektromagnetischen Wellen im Innenraum zwischen den beiden Leitern müssen auch in den angrenzenden Leitern Ladungswellen und Stromwellen erzeugen, die mit den Maxwellgleichungen kompatibel sind. Für die LADUNGEN gilt mit der ersten Maxwell'schen Gleichung für die Oberflächenladungsdichte

$$\sigma(z, t) = -\varepsilon_0 E_x(z, t) = \varepsilon_0 E_0 \cdot \cos(kz - \omega t) \quad (6.3.6)$$

Die Oberflächenladungsdichte ist eine fortlaufende Welle. Die Erhaltung der elektrischen LADUNG bedingt für die Oberflächenladungsdichte in einem Abschnitt der Breite  $b$

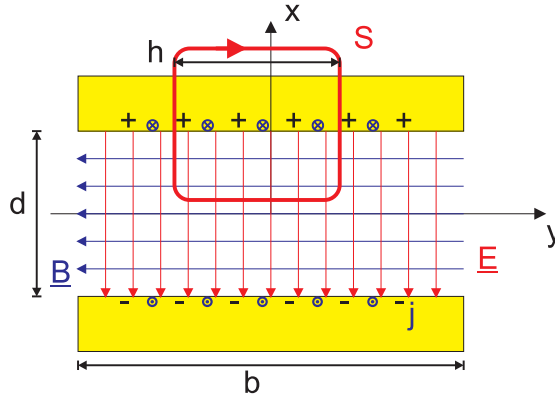
$$b \cdot [j(z + dz, t) - j(z, t)] = -\frac{\partial \sigma(z, t)}{\partial t} \cdot b \cdot dz \quad (6.3.7)$$

und damit

$$\frac{\partial j(z, t)}{\partial z} = -\frac{\partial \sigma(z, t)}{\partial t} = \varepsilon_0 E_0 \cdot \omega \cdot \sin(kz - \omega t) \quad (6.3.8)$$

Die Integration über  $z$  und die Verwendung von  $c = \omega/k$  ergibt

$$j(z, t) = \varepsilon_0 E_0 \cdot c \cdot \cos(kz - \omega t) \quad (6.3.9)$$



**Abb. 6.6.:** Integrationspfad zur Anwendung des vierten Maxwell'schen Gesetzes

Mit dem vierten Maxwell'schen Gesetz  $\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \iint_{A(S)} \mu_0 \left( \mathbf{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{a}$  erhalten wir mit dem eingezeichneten Integrationsweg, da der Term mit  $\mathbf{E}$  keinen Beitrag gibt (er liegt in der Integrationsebene)

$$-B_y(z, t) \cdot h = \mu_0 \cdot h \cdot j(z, t) = \mu_0 \cdot h \cdot \varepsilon_0 \cdot E_0 \cdot c \cdot \cos(kz - \omega t) \quad (6.3.10)$$

Mit  $\varepsilon_0 \cdot \mu_0 = 1/c^2$  folgt

$$B_y(z, t) = -\frac{E_0}{c} \cdot \cos(kz - \omega t) \quad (6.3.11)$$

eine identische Gleichung zu der im Zwischenraum abgeleiteten. Die Lösung für die auf dem Zweileitersystem transportierten Wellen ist also kompatibel mit den Maxwellgleichungen. LADUNGEN und Ströme bewegen sich als Wellen auf der Innenseite der Leiter.

### 6.3.1. Wellenwiderstand

Durch die in Abschnitt 6.3 abgeleiteten Gleichungen sind an jedem Ort  $z$  entlang des Doppelleitersystems und zu jeder Zeit  $t$  die lokal fließenden Ströme  $I(z, t)$  und die elektromotorische Kraft (Spannung)  $U_{EMK}(z, t)$  gegeben. Wenn wir nun an einer festen Stelle  $z$  in Gedanken einen ohmschen Widerstand zwischen den beiden Leitern einfügen, so muss dieser WIDERSTAND einen vom Wellenleitersystem gegebenen Wert haben, dass die elektromotorische Kraft  $U_{EMK}(z, t)$  genau den Strom  $I(z, t)$  durch den WIDERSTAND treibt.  $U_{EMK}$  und  $I$  sind dabei von der Wellengleichung gegeben. Nur wenn der WIDERSTAND angepasst ist, also wenn

$$U_{emk}(z, t) = \int_{\text{unten}}^{\text{oben}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -d \cdot E_x(z, t) = d \cdot E_0 \cdot \cos(kz - \omega t) \quad (6.3.12)$$

gilt, wird aller Strom verbraucht. In allen anderen Fällen bleibt Strom übrig, der an der Stelle reflektiert werden kann, oder die elektromotorische Kraft treibt zusätz-

lichen Strom durch den WIDERSTAND: dieser wird mit umgekehrtem Vorzeichen reflektiert.

Der gesamte Oberflächenstrom auf der oberen Platte an der Stelle  $z$  ist

$$I(z, t) = b \cdot j(z, t) = b \cdot \varepsilon_0 \cdot E_0 \cdot c \cdot \cos(kz - \omega t) \quad (6.3.13)$$

Wenn man an einer beliebigen Stelle das Doppelleitersystem entzweischneidet und dort den WIDERSTAND

$$R^* = \frac{U_{emk}(z, t)}{I(z, t)} = \frac{d}{b} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \quad (6.3.14)$$

den WELLENWIDERSTAND, anschliesst, gibt es einen reflexionsfreien Abschluss, wir haben eine reine fortlaufende Welle. Das gleiche gilt für jede beliebige fortlaufende Welle, auch wenn sie nicht harmonisch ist.

Das Zweidraht-Doppelleitersystem hat den Wellenwiderstand

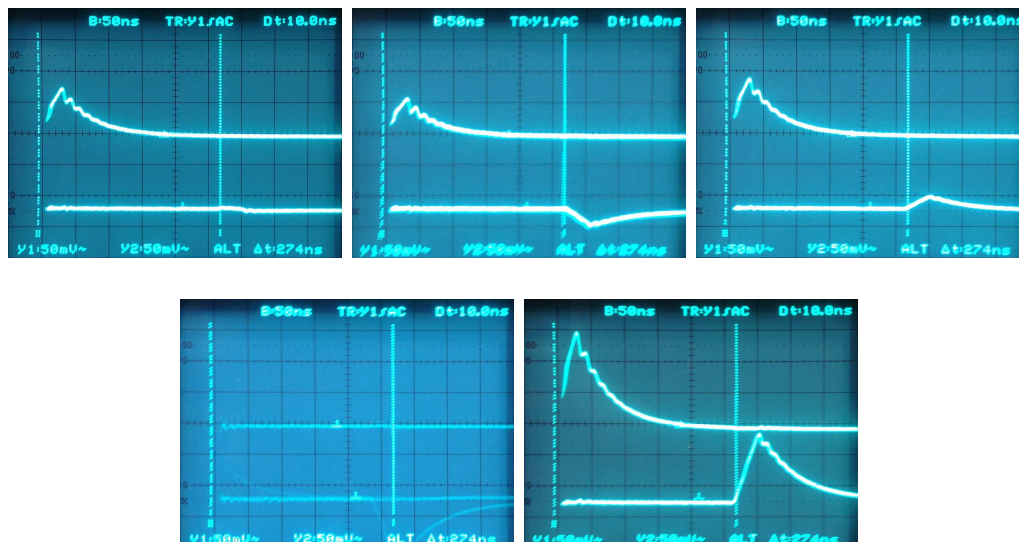
$$R^* = \frac{1}{\pi} \ln\left(\frac{4a}{d}\right) \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \quad (6.3.15)$$

Die Grösse

$$R_0^* = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 377 \, \Omega \quad (6.3.16)$$

ist der Wellenwiderstand des Vakuums.

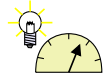
Der Wellenwiderstand ist wichtig für das korrekte Arbeiten von Hoch- und Höchstfrequenzschaltungen.



**Abb. 6.7.:** Pulse in einem Koaxialkabel. Oben links: korrekter Abschlusswiderstand, Oben Mitte zu kleiner und rechts zu grosser Abschlusswiderstand. Unten links ein Kurzschluss und rechts ein offenes Ende.

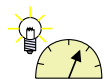
Wellenleiter (KOAXIALKABEL, LECHERLEITUNGEN, HOHLLEITER) erzeugen nur dann keine Reflexionen, wenn sie mit einem Abschlusswiderstand mit dem Wert ihres Wellenwiderstandes abgeschlossen werden (Siehe Abbildung 6.7).

### 6.3.2. Stehende Wellen



#### Versuch 83: Versuch zur Vorlesung:

Stehende Wellen (Versuchskarte SW-032, Video)



#### Versuch 84: Versuch zur Vorlesung:

Stehende Wellen (Versuchskarte SW-032, Video (VPN oder intern))

Stehende Wellen werden aus zwei fortlaufenden Wellen mit entgegengesetztem Wellenvektor  $\mathbf{k}$  zusammengesetzt. Dabei müssen  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  und  $\mathbf{k}$  in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem bilden<sup>1</sup>. Die nach rechts laufende Welle wurde schon berechnet (hier sind nur die von null verschiedenen Komponenten angegeben)

$$E_x(z, t) = -E_0 \cos(kz - \omega t) \quad (6.3.17a)$$

$$B_y(z, t) = -\frac{E_0}{c} \cos(kz - \omega t) \quad (6.3.17b)$$

Die nach links laufende Welle ist dann gegeben durch (Rechtssystem!)

$$E'_x(z, t) = -E_0 \cos(kz + \omega t) \quad (6.3.18a)$$

$$B'_y(z, t) = \frac{E_0}{c} \cos(kz + \omega t) \quad (6.3.18b)$$

Die Superposition der beiden Wellen ergibt die folgenden nicht verschwindenden Komponenten

$$\hat{E}_x(z, t) = -2E_0 \cos(kz) \cos(\omega t) \quad (6.3.19a)$$

$$\hat{B}_y(z, t) = -2\frac{E_0}{c} \sin(kz) \sin(\omega t) \quad (6.3.19b)$$

Im Gegensatz zu laufenden Wellen sind bei **stehenden Wellen** die Orte der Extrema (Maxima oder Minima) der  $\mathbf{E}$ -Felder und der  $\mathbf{B}$ -Felder gegeneinander um  $\lambda/4$  verschoben.

Sensoren, die auf elektrische Felder empfindlich und Sensoren, die auf magnetische

<sup>1</sup>Wegen der Rotation in den Maxwellgleichungen!

Induktionen empfindlich sind, zeigen Extrema im Abstand einer halben Wellenlänge. Die Extrema von  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  sind dann um  $\lambda/4$  gegeneinander örtlich verschoben.

## 6.4. Poynting-Vektor und Energiefluss

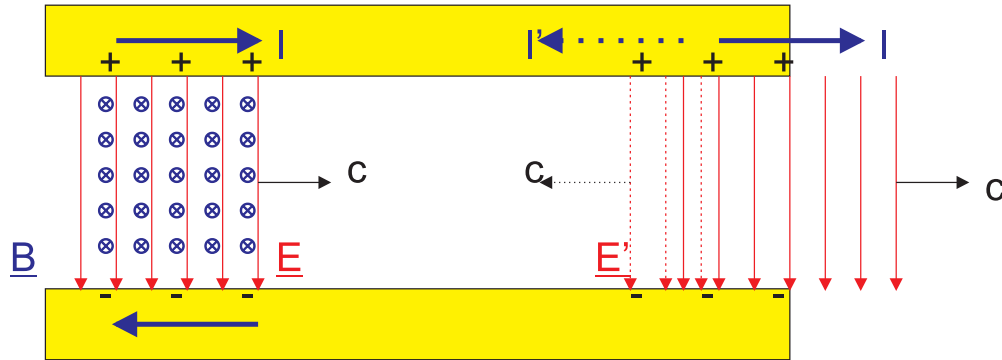


Abb. 6.8.: Berechnung des Poynting-Vektors

Wir hatten gesehen, dass das elektrische wie das magnetische Feld eine Energiedichte haben. Da sich bei Wellen diese Felder mit der Geschwindigkeit  $c$  ausbreiten, muss es einen Energiefluss geben. Wir betrachten einen Rechteckpuls auf einem Zweileitersystem. Der Energiefluss durch eine raumfeste Fläche  $A = b \cdot d$  bezeichnen wir mit  $S_z$ , dem Energiefluss pro Flächen- und Zeiteinheit. Die in der Zeit  $dt$  transportierte Energie ist

$$S_z \cdot A \cdot dt = \left( \frac{\varepsilon_0}{2} E_x^2 + \frac{1}{2\mu_0} B_y^2 \right) \cdot A \cdot dt \cdot c \quad (6.4.1)$$

Für beliebige fortlaufende Wellen im Vakuum gilt

$$B_y(z, t) = \frac{1}{c} E_x(z, t) \quad (6.4.2)$$

Wir können damit die Gleichung (6.4.1) symmetrisch schreiben

$$\begin{aligned} S_z &= \left( \frac{\varepsilon_0 \cdot c}{2} E_x \cdot B_y + \frac{1}{2\mu_0 \cdot c} E_x \cdot B_y \right) \cdot c \\ &= \frac{1}{2\mu_0} E_x \cdot B_y + \frac{1}{2\mu_0} E_x \cdot B_y \\ &= \frac{1}{\mu_0} E_x \cdot B_y \end{aligned} \quad (6.4.3)$$

Mit  $H = \frac{1}{\mu_0} B = \frac{1}{c\mu_0} E = \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}} E$  bekommen wir

$$S = \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}} E^2 \quad (6.4.4)$$

Damit ist auch klar, dass das  $\mathbf{E}$ -Feld und das  $\mathbf{B}$ -Feld je zur Hälfte zum Energiefluss beitragen.

Die allgemeine Form des Energieflusses im Vakuum ist

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \quad (6.4.5)$$

In Medien muss der Energiefluss wie

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \quad (6.4.6)$$

geschrieben werden.  $|\mathbf{S}|$  gibt die in Richtung  $\mathbf{S}$  fließende Energie pro Flächeneinheit und Zeit wieder. Die Einheit von  $\mathbf{S}$  ist  $\text{J m}^{-2} \text{s}^{-1}$ . Da  $\mathbf{H}$  und  $\mathbf{B}$  über einen TENSOR verbunden sein können, muss der Energiefluss nicht unbedingt in die Richtung des Wellenvektors zeigen. Dieses Verhalten ist die Grundlage von optisch doppelbrechenden Materialien.

Ein ähnliches Verhalten zeigen Wasserwellen am Strand. Die Energie der Wellen fließt zum Strand, aber die Wellen können sich durchaus schräg dazu bewegen.

### 6.4.1. Energiefluss bei stehenden Wellen

Wir können nun den Poynting-Vektor einer stehenden Welle (siehe Abschnitt 6.3.2) berechnen. Wir verwenden die Gleichungen (6.3.19) und (6.4.5). Ausgeschrieben und mit Vektoren erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(z, t) &= \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E}(z, t) \times \mathbf{B}(z, t) \\ &= \frac{1}{\mu_0} \begin{pmatrix} -2E_0 \cos(kz) \cos(\omega t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -2\frac{E_0}{c} \sin(kz) \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\mu_0 c} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4E_0^2 \cos(kz) \cos(\omega t) \sin(kz) \sin(\omega t) \end{pmatrix} \\ &= \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos(2kz - 2t\omega) - \cos(2kz + 2t\omega) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6.4.7)$$

Das Zeitintegral über eine Zeitperiode  $2\pi/\omega$  ergibt den Nullvektor! Bei einer stehenden Welle wird keine Energie transportiert.

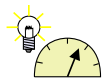
## 6.5. Elektromagnetische Wellen im Raum

Hier soll mit einer beschleunigten LADUNG erklärt werden, wie Wellen im Raum entstehen.

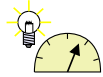


### Versuch 85: Versuch zur Vorlesung:

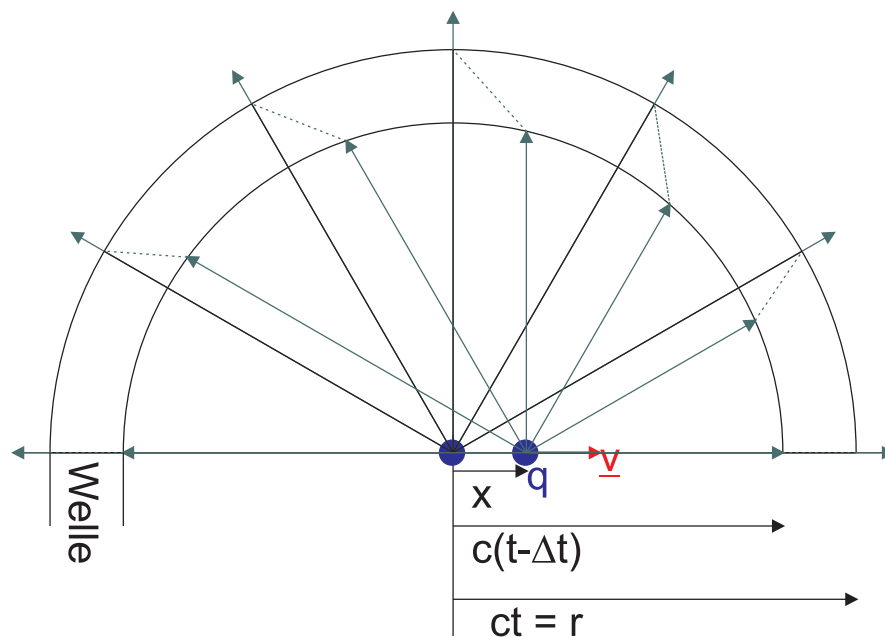
Hertzscher Dipol ([Versuchskarte SW-099](#), [Video](#))


**Versuch 86: Versuch zur Vorlesung:**

Hertzscher Dipol (Versuchskarte SW-099, Video)


**Versuch 87: Versuch zur Vorlesung:**

Hertzscher Dipol (Versuchskarte SW-099, Video (VPN oder intern))


**Abb. 6.9.:** Wellenausbreitung

Wir betrachten eine LADUNG  $q$ , die die folgende Geschwindigkeit hat

$$\mathbf{v} = \begin{cases} 0 & \text{für } -\infty < t < 0 \\ \mathbf{a} \cdot t & \text{für } 0 \leq t < \Delta t \\ \mathbf{a} \cdot \Delta t & \text{für } t \geq \Delta t \end{cases}$$

Die Beschleunigungszeit  $\Delta t$  sowie die Beschleunigung  $\mathbf{a}$  sollen so gewählt sein, dass

$$a \cdot \Delta t = v \ll c$$

gilt. Die Behauptung ist, dass das elektrische Feld  $\mathbf{E}$  für  $t \gg \Delta t$  wie in der Zeichnung oben aussieht. In der Beschleunigungsphase soll eine elektromagnetische Welle erzeugt worden sein. Ausserhalb der Kugel mit dem Radius

$$r = c \cdot t$$

muss das elektrische Feld das Feld einer im Ursprung ruhenden LADUNG sein, da nach der RELATIVITÄTSTHEORIE die Information über die Beschleunigung diesen Raum noch nicht erreicht haben kann.

Innerhalb der Kugel mit

$$r \leq c(t - \Delta t)$$

haben wir das Feld der LADUNG  $q$ , die sich mit der konstanten Geschwindigkeit  $v$  bewegt, denn in diesem Bereich ist die noch unbekannte Welle erzeugt durch die Beschleunigung einer Ladung schon wieder vorbei. Die Feldlinien im Laborsystem können wir erhalten, indem wir das elektrische Feld im Ruhesystem der LADUNG (radiale Feldlinien) in das Laborsystem transformieren. Wenn  $v \ll c$  ist, haben wir auch im Laborsystem radiale Feldlinien, die von der momentanen Position der LADUNG weggehen. Die Maxwellgleichung im Vakuum  $\text{div } \underline{E} = 0$  bedingt, dass die Feldlinien geschlossen und stetig sind. Die Vermutung ist, dass die Feldlinien in der Wellenzone linear die beiden Feldlinienmuster miteinander verbinden.

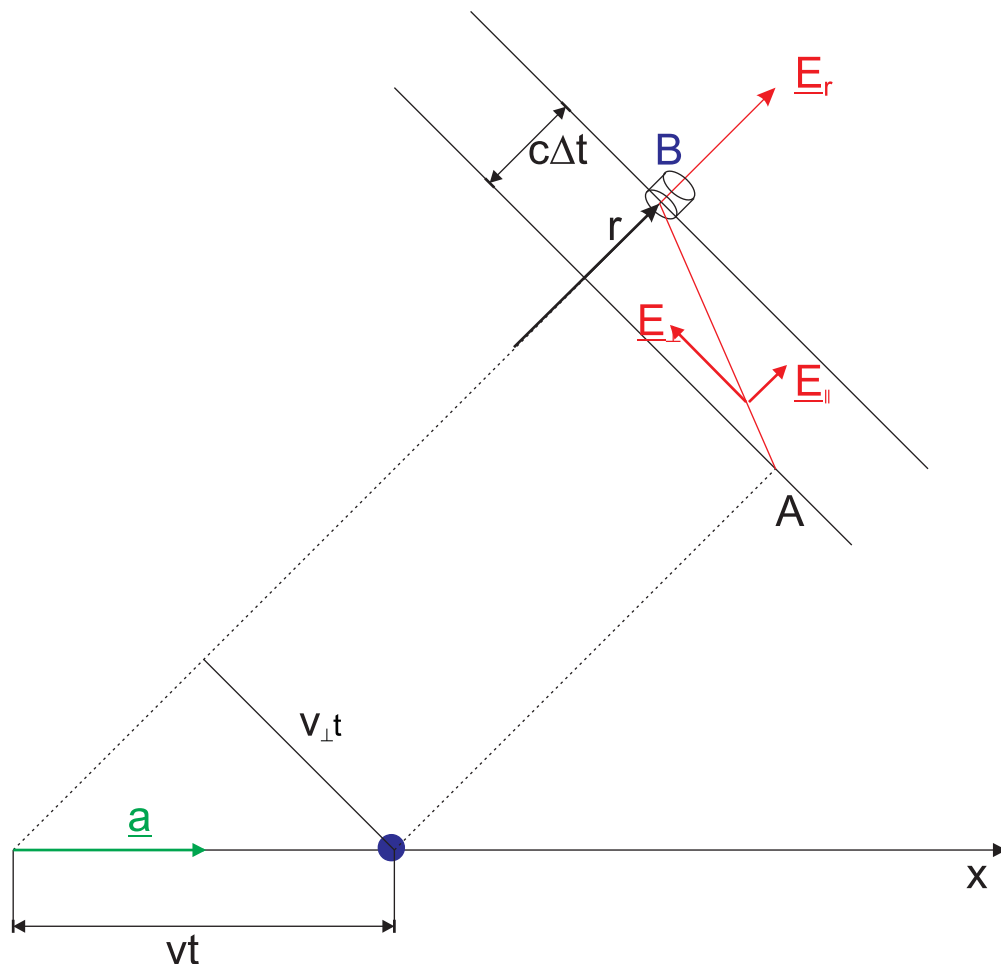


Abb. 6.10.: Berechnung der Wellenausbreitung

Da  $t \gg \Delta t$  ist, kann die Beschleunigungsphase für die Bestimmung der Position der LADUNG zur Zeit  $t$  vernachlässigt werden. Wir haben also



$$x(t) = v \cdot t \quad (6.5.1)$$

Wegen  $v \ll c$  ist dann auch

$$r = c \cdot t \gg x \quad (6.5.2)$$

sowie wegen  $t \gg \Delta t$  auch

$$r \gg c \cdot \Delta t \quad (6.5.3)$$

Wir bezeichnen mit  $\perp$  die Richtung senkrecht zum Radiusvektor  $\mathbf{r}$ . Wir erhalten dann, unter der Annahme, dass das  $\mathbf{E}$ -Feld in der Wellenzone linear sei,

$$\frac{E_{\perp}}{E_{\parallel}} = \frac{v_{\perp} \cdot t}{c \cdot \Delta t} \quad (6.5.4)$$

Mit

$$v_{\perp} = a_{\perp} \cdot \Delta t \quad (6.5.5)$$

sowie mit  $t = r/c$  bekommen wir

$$\frac{E_{\perp}}{E_{\parallel}} = a_{\perp} \frac{r}{c^2} \quad (6.5.6)$$

Wenn wir die Integralform der ersten Maxwellgleichung auf den kleinen Zylinder an der Stelle  $\mathbf{r}$  anwenden, erhalten wir andererseits

$$\iint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = 0 \quad (6.5.7)$$

und damit mit dem Coulombgesetz

$$E_{\parallel} = E_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} \quad (6.5.8)$$

Dies bedeutet, dass das radiale  $\mathbf{E}_r$ -Feld sich stetig durch die Kugelschale hindurch fortsetzt. Die Komponente  $\mathbf{E}_{\perp}$  existiert nur in der Wellenzone. Das  $\mathbf{E}_{\perp}$ -Feld ist das gesuchte Feld der elektromagnetischen Feldes, das STRAHLUNGSFELD. Seine Grösse ist

$$E_{\perp} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{a_{\perp}}{c^2 \cdot r} \quad (6.5.9)$$

Vektoriell geschrieben lautet diese Gleichung

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \cdot \frac{\mathbf{a}_{\perp}(t')}{r} \quad t' = t - \frac{r}{c} \quad (6.5.10)$$

Das elektrische Feld  $\mathbf{E}$  an der Stelle  $\mathbf{r}$  ist proportional zur senkrechten Komponente der Beschleunigung, aber zur RETARDIERTEN ZEIT  $t' = t - r/c$ . Zum Strahlungsfeld gehört auch ein  $\mathbf{B}$ -Feld, das so gerichtet ist, dass  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  und  $\mathbf{k}$  ein Rechtssystem bilden.  $\mathbf{k}$  ist die Ausbreitungsrichtung. Das Magnetfeld ist, in vektorieller Schreibweise,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \left( \frac{\mathbf{k}}{k} \right) \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (6.5.11)$$

Wenn wir  $\Delta t$  halbieren, bleibt der äussere Teil der des Strahlungsfeldes konstant, der innere Teil liegt dann in der Mitte der Verbindungslinie durch die Wellenzone. Durch fortgesetzte Anwendung dieses Verfahrens wird die Linearität des elektrischen Feldes in der Wellenzone gezeigt.

Wenn  $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$  ist, gilt die Vektoridentität  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \times \mathbf{a} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{b} = |\mathbf{a}|^2 \mathbf{b}$ . Also ist im Vakuum

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \frac{1}{c} \left( \frac{\mathbf{k}}{k} \right) \times \mathbf{E} = \frac{1}{\mu_0 c} |\mathbf{E}|^2 \frac{\mathbf{k}}{k} \quad (6.5.12)$$

Also ist  $\mathbf{S}$  kollinear zur Ausbreitungsrichtung  $\mathbf{k}$ . Mit  $\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} = 1/c$  erhalten wir auch im Vakuum

$$\mathbf{S} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} |\mathbf{E}|^2 \frac{\mathbf{k}}{k} \quad (6.5.13)$$

Diese Gleichung kann auf lokal isotrope Medien erweitert werden ( $\varepsilon$  und  $\mu$  sind Zahlen!)

$$\mathbf{S} = \sqrt{\frac{\varepsilon \varepsilon_0}{\mu \mu_0}} |\mathbf{E}|^2 \frac{\mathbf{k}}{k} \quad (6.5.14)$$

**Beispiel:** Ein Elektron in einem Atom führe in die  $z$ -Richtung die harmonische Bewegung

$$z(t') = z_0 \cdot \sin \omega t' \quad (6.5.15)$$

aus. Dabei ist  $t'$  die retardierte Zeit. Die Beschleunigung ist

$$a(t') = \ddot{z}(t') = -z_0 \cdot \omega^2 \cdot \sin \omega t' \quad (6.5.16)$$

Aus dem Wellenvektor  $\mathbf{k}$  und der Beschleunigung  $\mathbf{a}$  kann mit  $\mathbf{a}_\perp = \frac{\mathbf{k}}{k} \times (\mathbf{a} \times \frac{\mathbf{k}}{k})$  die Senkrechtkomponente von  $\mathbf{a}$  genannt  $\mathbf{a}_\perp$  berechnet werden. Das linke Kreuzprodukt mit der Klammer dreht den Vektor in die richtige Richtung, da die Klammer und  $\mathbf{k}$  schon senkrecht sind. Das eingeklammerte Produkt ergibt dann den Zwischenwinkel  $\sin(\Theta)$ . Durch die Normierung von  $\mathbf{k}$  kann dieser Zwischenwinkel direkt in die Gleichung für den Betrag des elektrischen Feldes

$$\begin{aligned} E(r, \Theta, t) &= \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 c^2} \cdot \frac{1}{r} \cdot |a_\perp(t')| = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 c^2} \cdot \frac{1}{r} \cdot \left| \frac{\mathbf{k}}{k} \times \left( \mathbf{a}(t') \times \frac{\mathbf{k}}{k} \right) \right| \\ &= \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 c^2} \cdot \frac{1}{r} \cdot |a(t')| \sin \Theta = \frac{e z_0 \omega^2}{4\pi\varepsilon_0 c^2} \cdot \frac{1}{r} \cdot \sin \left[ \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right] \sin \Theta \end{aligned} \quad (6.5.17)$$

eingetragen werden. Das Magnetfeld ist

$$\mathbf{B}(r, \Theta, t) = \frac{1}{c} \mathbf{E}(r, \Theta, t) \quad (6.5.18)$$

Der Poynting-Vektor oder Energiefluss ist

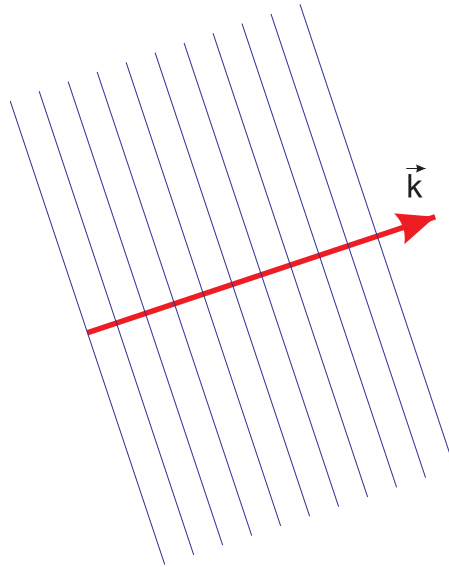
$$S(r, \Theta, t) = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E^2(r, \Theta, t) \quad (6.5.19)$$

Mit  $\langle \sin^2(\omega t - kr) \rangle_t = 1/2$  wird die Intensität

$$I(r, \Theta) = \langle S(r, \Theta, t) \rangle_t = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \frac{e^2 z_0^2 \omega^4}{(4\pi \varepsilon_0 c^2)^2} \frac{\sin^2 \Theta}{2r^2} \quad (6.5.20)$$

Damit haben wir gezeigt, dass die Annahme eines harmonischen Oszillators das Strahlungsfeld eines Atoms erklären kann. Die abgeführte Energie dämpft dabei den Oszillator. Je stärker die Dämpfung ist, das heisst, je kürzer die Lebensdauer ist, desto breiter wird das Frequenzspektrum sein.

### 6.5.1. Ebene Wellen



**Abb. 6.11.:** Bild einer ebenen Welle

Eine ebene Welle entsteht aus der allgemeinen Wellengleichung dadurch, dass die AMPLITUDE und der Wellenvektor nicht vom Ort abhängen. Eine ebene Transversalwelle des elektromagnetischen Feldes ist durch

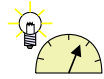
$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \mathbf{E}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t) \quad \text{mit} \quad \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{k} = 0 \quad (6.5.21)$$

gegeben. Der Vektor  $\mathbf{k}$ , der , gibt die Ausbreitungsrichtung an, der Betrag  $|\mathbf{k}| = k = \frac{2\pi}{\lambda}$  heisst die WELLENZAHL. Bei elektromagnetischen Wellen im Sichtbaren kann man alternativ auch von LICHTSTRAHLEN sprechen. Zum Vergleich, eine Longitudinalwelle ist eine örtliche Schwankung einer skalaren Funktion, zum Beispiel, des Druckes, gegeben durch

$$\Psi(\mathbf{x}) = \Psi_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t) \quad (6.5.22)$$

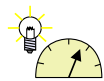
### 6.5.2. Kugelwellen

**Literatur:** (Siehe Hecht, Optik [Hec05, pp. 48, 710]) (Siehe Pérez, Optik [Pér96, pp. 287])



**Versuch 88: Versuch zur Vorlesung:**

Wellenwanne (Versuchskarte O-021, Video)

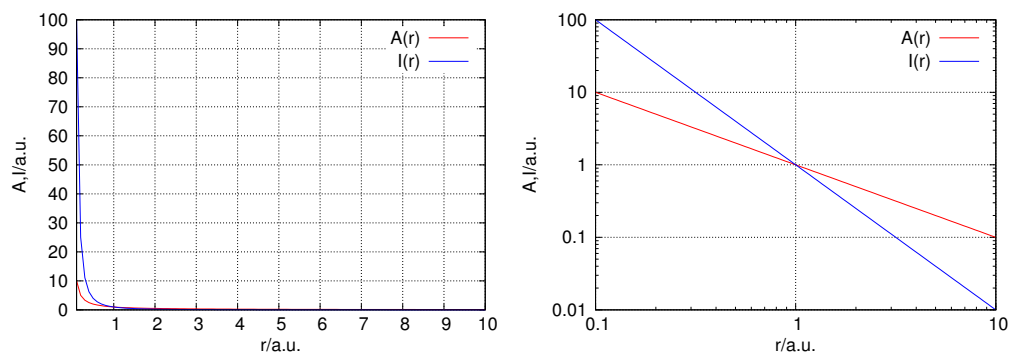


**Versuch 89: Versuch zur Vorlesung:**

Wellenwanne (Versuchskarte O-021, Video (VPN oder intern))

Eine weitere häufig vorkommende Form von Wellen sind die Kugelwellen. Wir können die Amplitudenabhängigkeit durch folgende Überlegung erhalten.

- Wir denken uns eine Kugeloberfläche um die Quelle, wobei die Quelle im Mittelpunkt der Kugel sein soll.
- Der Energiefluss pro Zeit, die Leistung, die durch die gesamte Kugeloberfläche fließt ist konstant, unabhängig vom Radius der Kugel.
- Damit diese Gleichung für alle  $r$  gilt muss  $E(r) = \mathfrak{E}_0 \frac{r_0}{r}$  sein.



**Abb. 6.12.:** AMPLITUDE und INTENSITÄT einer Kugelwelle in Abhängigkeit der Distanz  $r$  von der Quelle. Links eine lineare, rechts eine logarithmische Darstellung.

Bei elektromagnetischen Wellen gilt

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(r, \phi, \theta) = \frac{\hat{\mathbf{E}}_0(\phi, \theta)}{r} \cos(kr - \omega t) \quad \text{mit} \quad \mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_0(\phi, \theta) = 0 \quad (6.5.23)$$

Wenn im Abstand  $r_0$  von der Quelle der Kugelwelle der Betrag der Amplitude des elektrischen Feldes  $E_0$  oder die Intensität  $I_0$  ist, können der ortsabhängige Betrag der Amplitude  $E(r)$  oder die ortsabhängige Intensität  $I_0$  vereinfacht geschrieben werden.

Bei einer Kugelwelle ist

- die BETRAG DER AMPLITUDE:  $E(r) = E_0 \frac{r_0}{r}$
- die INTENSITÄT  $I(r) = I_0 \frac{r_0^2}{r^2}$

$E_0$  beziehungsweise  $I_0$  enthalten die Details der Physik und kapseln diese.

## 6.6. Lichtgeschwindigkeit im Medium und Intensität

In einem Medium bewegen sich elektromagnetische Wellen langsamer. Die einfallende Welle regt die polarisierbaren Atome zum Schwingen an. Diese schwingen mit der gleichen Frequenz, aber mit einer frequenzabhängigen Phasenverschiebung. Die Resonanzfrequenz des Elektron-Atomrumpfsystems liegt im Ultraviolett. In der Summe wird die elektromagnetische Welle durch diese mit der zunehmenden Frequenz zunehmenden Phasenverschiebung verlangsamt. Mit dem (frequenzabhängigen) BRECHUNGSINDEX  $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$  bekommt man

$$c_m = \frac{1}{\sqrt{\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0}} = \frac{c}{n} \quad (6.6.1)$$

wobei  $c$  die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ist. Die BRECHZAHL oder der BRECHUNGSINDEX  $n$  gibt an, um wieviel langsamer elektromagnetische Wellen in einem Medium sind als im Vakuum. Die INTENSITÄT ist gegeben durch den Mittelwert des Poynting-Vektors  $\mathbf{S}(\mathbf{r}) = \mathbf{S}_0(\mathbf{r}) \sin^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$ . Für harmonische Schwingungen erhält man für die auf die Fläche mit der Flächennormale  $\mathbf{a}$  einfallende Intensität

$$\begin{aligned} I_a(\mathbf{r}) &= \langle |\mathbf{S}(\mathbf{r})| \rangle_t = \frac{1}{2} \mathbf{S}_0(\mathbf{r}) \cdot \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}} |\mathbf{E}|^2 \cos(\angle \mathbf{S}_0, \mathbf{a}) \\ &= \frac{n\varepsilon_0 c}{2\mu} E^2 \cos(\angle \mathbf{S}_0, \mathbf{a}) \end{aligned} \quad (6.6.2)$$

wenn  $E$  das elektrische Feld, d.h. eine der beiden möglichen Amplituden der elektromagnetischen Welle ist.  $\varepsilon_0 = 8.8542 \cdot 10^{-12} \frac{AS}{Vm}$  ist die VAKUUMPERMITTIVITÄT

und  $c = 2.9979 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$  die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum. Der Vorfaktor  $\frac{1}{2}$  entsteht durch die Mittelung über viele Perioden. Bei nichtmagnetischen Materialien ( $\mu = 1$ ) kann man auch schreiben:

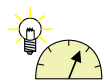
$$I_a(\mathbf{r}) = \frac{n\varepsilon_0 c}{2} E^2 \cos(\angle \mathbf{S}_0, \mathbf{a}) \quad (6.6.3)$$

Gleichung (6.6.2) kann auch so geschrieben werden:

$$I = \frac{n}{\mu} E^2 \cdot 1.3272 \cdot 10^{-3} \frac{A}{V} \quad (6.6.4)$$

## 6.7. Polarisation

**Literatur:** (Siehe Hecht, Optik [Hec05, pp. 475]) (Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 1044])



### Versuch 90: Versuch zur Vorlesung:

Polarisiertes Licht: Polarisator und Analysator (Versuchskarte SW-048, Video (VPN oder intern))

Elektromagnetische Wellen (auch Licht) sind transversale Wellen. Das heisst, dass das elektrische und das magnetische Feld senkrecht zur Ausbreitungsrichtung schwingen. Die Wellengleichung für das elektrische Feld und damit auch für die elektromagnetischen Wellen sind durch  $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{E}_0(\mathbf{x}) \cos(\mathbf{k}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} - \omega t)$  und  $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{B}_0(\mathbf{x}) \cos(\mathbf{k}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} - \omega t)$  gegeben. Die Tatsache, dass wir eine Transversalwelle haben erfordert, dass  $\mathbf{E}_0$  der Bedingung

$$\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{k} = 0 \quad (6.7.1)$$

gilt.

Wenn wir nun, ohne Einschränkung der Allgemeinheit, die Ausbreitungsrichtung der Welle in die x-Richtung legen, dann sind

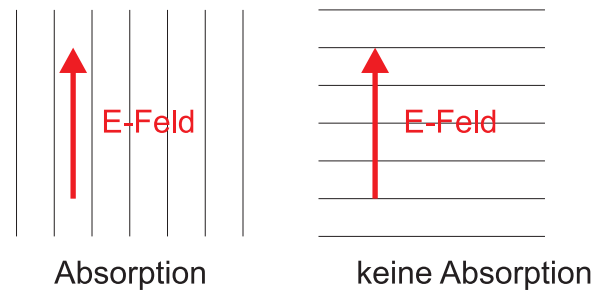
- der Wellenvektor  $\mathbf{k} = (k; 0; 0)$
- und die AMPLITUDE  $\mathbf{E}_0 = (0; E_y; E_z)$

Diese Wahl erfüllt die Bedingung der Transversalität.

Es gibt zwei mögliche orthogonale Orientierungen von  $\mathbf{E}_0$  sowie die daraus folgenden Linearkombinationen. Die Richtung, in die  $\mathbf{E}_0$  zeigt ist die **Polarisationsrichtung**.

### 6.7.1. Polarisation durch Absorption (Dichroismus)

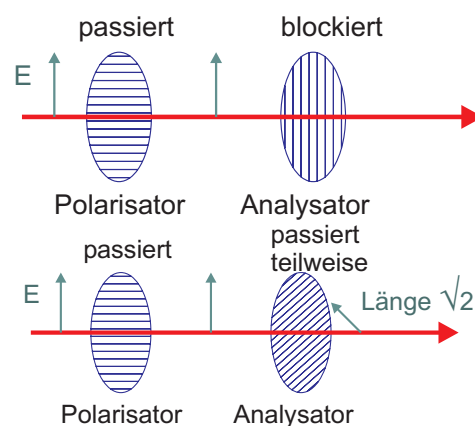
**Literatur:** (Siehe Pérez, Optik [Pér96, pp. 323]) (Siehe Hecht, Optik [Hec05, pp. 487]) (Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 1044])



**Abb. 6.13.:** Polarisation durch Absorption in einem Drahtpolarisator

Wenn das elektrische Feld einer Mikrowellen entlang eines Drahtes zeigt, kann dieses Feld im Draht **Ladungen** bewegen und so Energie abgeben. Die **INTENSITÄT** der Welle und damit die Absorption hängen von der **Polarisation** ab.

Ebenso gibt es Moleküle mit Doppelbindungen zwischen den Kohlenstoffatomen, bei denen  $\pi$ -Elektronen beweglich sind, die wie Drähte wirken. Werden diese Moleküle orientiert zu einer Folie gemacht, so erhält man eine polarisierende Folie.



**Abb. 6.14.:** Elektromagnetische Wellen durchstrahlen durch einen POLARISATOR und einen ANALYSATOR mit gekreuzten Polarisationsrichtungen. Darunter die gleiche Anordnung, aber der Analysator ist nun um  $\pi/4$  gedreht.

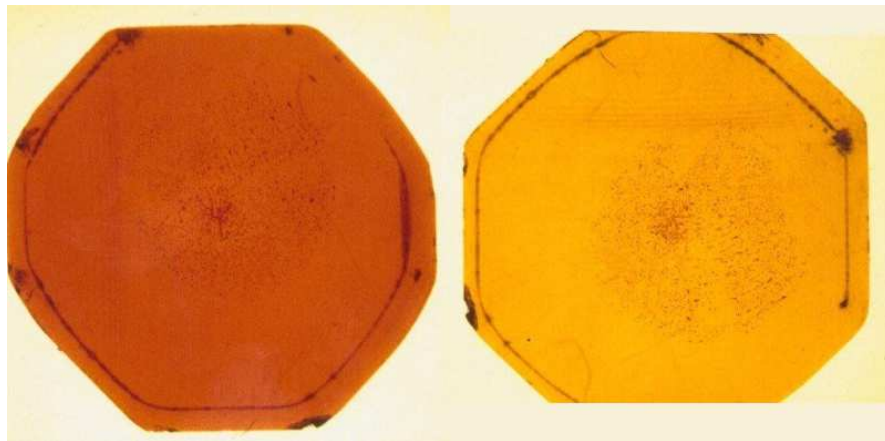
Bei einer Anordnung von ANALYSATOR und POLARISATOR polarisiert der POLARISATOR die elektromagnetische Welle. Der ANALYSATOR lässt nur die Projektion des **E**-Feldes auf seine Durchlassachse durch. Für die **AMPLITUDE** gilt

$$E = E_0 \cos \theta \quad (6.7.2)$$

wobei  $\theta$  der Winkel zwischen den Polarisationsrichtungen von POLARISATOR und ANALYSATOR ist. Da die INTENSITÄT der elektromagnetischen Welle durch  $I = \frac{n\epsilon_0 c}{2} E^2$  ist und somit proportional zum Quadrat der AMPLITUDE  $I \propto E^2$ , gilt

$$I = I_0 \cos^2 \theta \quad (6.7.3)$$

(Gesetz von Malus). Wenn zwischen gekreuzten Polarisatoren und Analysatoren eine Substanz eingebracht wird, die die Polarisationsebene der elektromagnetischen Welle dreht (eine „OPTISCH AKTIVE SUBSTANZ“) eingebracht wird, kann mit dieser Anordnung die Grösse der optischen Aktivität gemessen werden<sup>2</sup>.



**Abb. 6.15.:** Dichroismus in einem Kristall von  $\text{NaVO}_4\text{Mn}$  (gezüchtet von A. Lentz, fotografiert von M. Pietralla, verwendet mit Erlaubnis des Fotografen).

## 6.8. Die Fresnelschen Formeln

**Literatur:** (Siehe Hecht, Optik [[Hec05](#), pp. 190]) (Siehe Gerthsen, Physik [[Mes06](#), pp. 539])

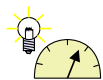
<sup>2</sup>Die Analyse von Spannungen in Bauteilen nachgebildet mit Plexiglas war eine wichtige Anwendung (heute gibt es Programme zur Finite-Elemente-Analyse)





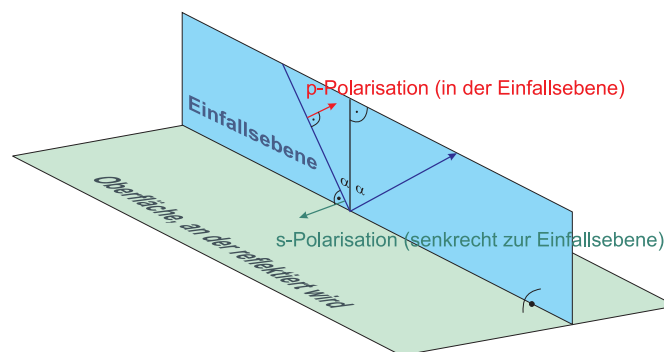
**Abb. 6.16.:** Das gleiche Gebäude mit Polarisationsfilter aufgenommen. Die Achse des Polarisationsfilters wurde dabei um  $90^\circ$  gedreht. Links sind die Reflexionen im Glas kaum zu erkennen, rechts ist dafür der Kontrast des Himmels schwächer.

Die beiden Aufnahmen in Abbildung 6.16 wurden mit dem POLARISATIONSFILTER in zwei um  $90^\circ$  gedrehten Stellungen aufgenommen. Aus den Abschnitten 2.9, 6.5 und 6.7.1 wissen wir, dass Licht vom Himmel polarisiert ist. Links wird durch den Polarisator das diffus gestreute Licht mit der falschen Polarisation unterdrückt. Links ist die Spiegelung des linken Gebäudes im rechten nicht sichtbar, Die Fensterfront ist hell. Rechts ist das linke Gebäude dunkel. Das bedeutet, dass das gespiegelte Licht polarisiert ist. Die im folgenden abgeleiteten Fresnelschen Formeln erklären dieses Phänomen, aber auch die Spiegelung an Metallen. Sie beschreiben die Wechselwirkung von elektromagnetischen Wellen mit Grenzflächen jeder Art.



### Versuch 91: Versuch zur Vorlesung:

Fresnelsche Formeln (Versuchskarte O-039)



**Abb. 6.17.:** Definition der s-POLARISATION und der p-POLARISATION

Die REFLEXION und die Brechung von elektromagnetischen Wellen werden durch die Maxwell'schen Gleichungen und die daraus abgeleiteten Randbedingungen bestimmt. Die resultierenden Beziehungen für die Amplituden und die Intensitäten werden die FRESNELSCHEN FORMELN genannt. Zur Berechnung verwenden die Definitionen

- Der einfallende und der reflektierte Strahl elektromagnetischer Wellen definiert die EINFALLSEBENE. Diese ist senkrecht zur Grenzfläche der beiden Medien.
- Elektromagnetische Wellen, deren Polarisationssebene senkrecht zur EINFALLSEBENE liegt, heissen S-POLARISIERT. Die Polarisationssebene gibt die Richtung des elektrischen Feldes an.
- Elektromagnetische Wellen, deren Polarisationssebene parallel zur EINFALLSEBENE liegt, heissen P-POLARISIERT.
- Für die INTENSITÄT der elektromagnetischen Wellen in nichtmagnetischen Medien gilt  $I \propto \sqrt{\varepsilon} E^2$ , wobei  $\varepsilon = n^2$  ist.
- Genauer gilt für die Intensität:  $I = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon \varepsilon_0}{\mu \mu_0}} E^2 = \frac{n \varepsilon_0 c}{2 \mu} E^2$  für sinusförmige Wellen mit der Amplitude  $E$ .

Wir betrachten eine Welle  $\mathbf{E}_e$ , die aus dem Medium mit  $\mu_1$  und  $\varepsilon_1$  auf eine ebene Grenzfläche zum Medium mit  $\mu_2$  und  $\varepsilon_2$  fällt. Neben der einfallenden Welle existieren eine reflektierte und eine transmittierte elektromagnetische Welle

$$\mathbf{E}_e = \mathfrak{E}_e \cos(\mathbf{k}_e \cdot \mathbf{r} - \omega_e t) \quad (6.8.1a)$$

$$\mathbf{E}_r = \mathfrak{E}_r \cos(\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} - \omega_r t + \varphi_r) \quad (6.8.1b)$$

$$\mathbf{E}_t = \mathfrak{E}_t \cos(\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r} - \omega_t t + \varphi_t) \quad (6.8.1c)$$

$$\mathbf{E}_e = \mathfrak{E}_e e^{i(\mathbf{k}_e \cdot \mathbf{r} - \omega_e t)} \quad (6.8.1d)$$

$$\mathbf{E}_r = \mathfrak{E}_r e^{i(\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} - \omega_r t + \varphi_r)} \quad (6.8.1e)$$

$$\mathbf{E}_t = \mathfrak{E}_t e^{i(\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r} - \omega_t t + \varphi_t)} \quad (6.8.1f)$$

Gegeben sind  $\mathfrak{E}_e$ ,  $\mu_1$ ,  $\varepsilon_1$ ,  $\mu_2$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $\mathbf{k}_e$  und  $\omega_e$  ( $|\mathbf{k}_e|$ ). An den Grenzflächen gilt

- Die tangentielle Komponente von  $\mathbf{E}$  ist stetig.
- Die tangentielle Komponente von  $\mathbf{H}$  ist stetig.

Sei  $\mathbf{e}_n$  der Normaleneinheitsvektor auf die Grenzfläche. Der resultierende Vektor des Kreuzproduktes von  $\mathbf{E}_e$  mit  $\mathbf{e}_n$  liegt senkrecht zu  $\mathbf{e}_n$  und damit in der Grenzfläche der beiden Medien. Um den Tangentialvektor in die ursprüngliche Richtung zurück zu drehen, wenden wir nochmals ein Kreuzprodukt mit  $\mathbf{e}_n$  an. Unabhängig von der Richtung von  $\mathbf{E}_e$  bekommt man mit dieser Operation immer die Komponente von  $\mathbf{E}_e$  tangential zur Grenzfläche

$$\mathbf{E}_{e,\text{tangential}} = \mathbf{e}_n \times \mathbf{E}_e \times \mathbf{e}_n \quad (6.8.2)$$

Mit der gleichen Methode kann man auch die Komponenten der Vektoren  $\mathbf{E}_r$  und  $\mathbf{E}_t$  in der Grenzfläche berechnen. Die Bedingung der Stetigkeit der Tangentialkomponente des elektrischen Feldes kann dann mit den Kreuzprodukten so geschrieben werden

$$\mathbf{e}_n \times \mathbf{E}_e \times \mathbf{e}_n + \mathbf{e}_n \times \mathbf{E}_r \times \mathbf{e}_n = \mathbf{e}_n \times \mathbf{E}_t \times \mathbf{e}_n \quad (6.8.3)$$

Die Gleichung besagt, dass die Summe der Tangentialkomponenten des elektrischen Feldes im Medium 1 (einfallende und reflektierte Welle) gleich der Tangentialkomponente der transmittierten Welle ist. Ausgeschrieben erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_n \times \mathfrak{E}_e \cos(\mathbf{k}_e \cdot \mathbf{r} - \omega_e t) \times \mathbf{e}_n + \mathbf{e}_n \times \mathfrak{E}_r \cos(\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} - \omega_r t + \varphi_r) \times \mathbf{e}_n \\ = \mathbf{e}_n \times \mathfrak{E}_t \cos(\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r} - \omega_t t + \varphi_t) \times \mathbf{e}_n \end{aligned} \quad (6.8.4a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_n \times \mathfrak{E}_e e^{i(\mathbf{k}_e \cdot \mathbf{r} - \omega_e t)} \times \mathbf{e}_n + \mathbf{e}_n \times \mathfrak{E}_r e^{i(\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} - \omega_r t + \varphi_r)} \times \mathbf{e}_n \\ = \mathbf{e}_n \times \mathfrak{E}_t e^{i(\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r} - \omega_t t + \varphi_t)} \times \mathbf{e}_n \\ e^{i(\mathbf{k}_e \cdot \mathbf{r} - \omega_e t)} \mathbf{e}_n \times \mathfrak{E}_e \times \mathbf{e}_n + e^{i(\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} - \omega_r t + \varphi_r)} \mathbf{e}_n \times \mathfrak{E}_r \times \mathbf{e}_n \\ = e^{i(\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r} - \omega_t t + \varphi_t)} \mathbf{e}_n \times \mathfrak{E}_t \times \mathbf{e}_n \end{aligned} \quad (6.8.4b)$$

Die Gleichung (6.8.4) muss für alle Zeiten und alle Orte auf der Grenzfläche gelten. Deshalb gilt

$$\begin{aligned} \cos(\mathbf{k}_e \cdot \mathbf{r} - \omega_e t) \Big|_{\text{in der Grenzfläche}} &= \cos(\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} - \omega_r t + \varphi_r) \Big|_{\text{in der Grenzfläche}} \\ &= \cos(\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r} - \omega_t t + \varphi_t) \Big|_{\text{in der Grenzfläche}} \end{aligned} \quad (6.8.5a)$$

$$\begin{aligned} e^{i(\mathbf{k}_e \cdot \mathbf{r} - \omega_e t)} \Big|_{\text{in der Grenzfläche}} &= e^{i(\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} - \omega_r t + \varphi_r)} \Big|_{\text{in der Grenzfläche}} \\ &= e^{i(\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r} - \omega_t t + \varphi_t)} \Big|_{\text{in der Grenzfläche}} \end{aligned} \quad (6.8.5b)$$

wobei  $\mathbf{r}$  nach Definition ein Vektor in der Grenzfläche ist, also mit  $\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{r} = 0$ . Damit Gleichung (6.8.5) zu allen Zeiten an einem beliebigen Punkt gilt, müssen die Kreisfrequenzen gleich sein

$$\omega_e = \omega_r = \omega_t \quad (6.8.6)$$

Weiter muss dann gelten: Die Gleichung (6.8.4) muss für alle Zeiten und alle Orte auf der Grenzfläche gelten. Deshalb gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_e \cdot \mathbf{r} \Big|_{\text{in der Grenzfläche}} &= \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} + \varphi_r \Big|_{\text{in der Grenzfläche}} \\ &= \mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r} + \varphi_t \Big|_{\text{in der Grenzfläche}} \end{aligned} \quad (6.8.7)$$

$\mathbf{r}$  zeigt auf einen Punkt in der Grenzfläche. Da der Ursprung des Koordinatensystems nicht in der Grenzfläche liegen muss, ist  $\mathbf{r}$  im Allgemeinen nicht parallel zur Grenzfläche. Aus der ersten Gleichung in (6.8.7) folgt

$$((\mathbf{k}_e - \mathbf{k}_r) \cdot \mathbf{r})_{\text{in der Grenzfläche}} = \varphi_r \quad (6.8.8)$$

Eine Gleichung vom Typ  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{r} = \varpi$  beschreibt eine Ebene. Die Endpunkte von  $\mathbf{r}$  liegen in der Ebene mit dem Normalenvektor  $\mathbf{a}$ .  $\varpi$  gibt die Verschiebung zum Nullpunkt an. Gleichung (6.8.8) ist also die Gleichung einer Ebene, die senkrecht zu  $\mathbf{k}_e - \mathbf{k}_r$  liegt. Andererseits wissen wir, nach unserer Konstruktion, dass  $\mathbf{r}$  in der Grenzfläche mit dem Normalenvektor  $\mathbf{e}_n$  liegt.  $\mathbf{e}_n$  ist also parallel zu  $\mathbf{k}_e - \mathbf{k}_r$ . Weiter sind beide Wellen im gleichen Medium 1, das heisst  $|\mathbf{k}_e| = k_e = |\mathbf{k}_r| = k_r$ . Wir können also schreiben

$$\mathbf{e}_n \times (\mathbf{k}_e - \mathbf{k}_r) = 0 \quad (6.8.9)$$

Mit Beträgen geschrieben heisst dies

$$k_e \sin \alpha = k_r \sin \beta \Rightarrow \sin \alpha = \sin \beta \Rightarrow \alpha = \beta \quad (6.8.10)$$

Dabei ist  $\alpha$  der Winkel zwischen der Oberflächennormale  $\mathbf{e}_n$  und dem Wellenvektor der einfallenden Welle  $\mathbf{k}_e$  und  $\beta$  der Winkel zwischen der Oberflächennormale  $\mathbf{e}_n$  und dem Wellenvektor der reflektierten Welle  $\mathbf{k}_r$ .

Das Reflexionsgesetz besagt, dass

$$\alpha = \beta \quad (6.8.11)$$

(Einfallswinkel=Ausfallswinkel)

Aus Gleichung (6.8.7) folgt weiter

$$((\mathbf{k}_e - \mathbf{k}_t) \cdot \mathbf{r})_{\text{Grenzfläche}} = \varphi_t \quad (6.8.12)$$

Gleichung (6.8.8) ist also die Gleichung einer Ebene, die senkrecht zu  $\mathbf{k}_e - \mathbf{k}_t$  liegt. Andererseits wissen wir, nach unserer Konstruktion, dass  $\mathbf{r}$  in der Grenzfläche mit dem Normalenvektor  $\mathbf{e}_n$  liegt.  $\mathbf{e}_n$  ist also parallel zu  $\mathbf{k}_e - \mathbf{k}_t$ . Wir können also schreiben

$$\mathbf{e}_n \times (\mathbf{k}_e - \mathbf{k}_t) = 0 \quad (6.8.13)$$

Mit Beträgen geschrieben heisst dies

$$k_e \sin \alpha = k_t \sin \gamma \quad (6.8.14)$$

Dabei ist  $\alpha$  der Winkel zwischen der Oberflächennormale  $\mathbf{e}_n$  und dem Wellenvektor der einfallenden Welle  $\mathbf{k}_e$  und  $\gamma$  der Winkel zwischen der Oberflächennormale  $\mathbf{e}_n$  und dem Wellenvektor der transmittierten Welle  $\mathbf{k}_t$ . Aus der Wellengleichung folgt

$$\frac{\omega}{k_i} = c_i = \frac{1}{\sqrt{\mu_i \mu_0 \varepsilon_i \varepsilon_0}} \quad (6.8.15)$$

Da  $\omega_e = \omega_r = \omega_t$  ist, kann Gleichung (6.8.14) auch als

$$\frac{\omega_e}{c_e} \sin \alpha = \frac{\omega_t}{c_t} \sin \gamma \quad (6.8.16)$$

oder

$$\sqrt{\mu_1 \mu_0 \varepsilon_1 \varepsilon_0} \sin \alpha = \sqrt{\mu_2 \mu_0 \varepsilon_2 \varepsilon_0} \sin \gamma \Rightarrow \sqrt{\mu_1 \varepsilon_1} \sin \alpha = \sqrt{\mu_2 \varepsilon_2} \sin \gamma \quad (6.8.17)$$

Mit der Definition (6.6.1) ( $n = \sqrt{\mu\varepsilon}$ ) bekommt man auch

$$n_1 \sin(\alpha) = n_2 \sin(\gamma) \quad (6.8.18)$$

Dies ist das Brechungsgesetz nach Snellius.

Schliesslich können wir noch eine Beziehung der Tangentialkomponenten aller Felder erhalten. Analog zur Gleichung (6.8.3) können wir die Tangentialkomponenten der Wellenvektoren angeben:

$$\mathbf{k}_{e,tangential} = \mathbf{e}_n \times \mathbf{k}_e \times \mathbf{e}_n \quad (6.8.19a)$$

$$\mathbf{k}_{r,tangential} = \mathbf{e}_n \times \mathbf{k}_r \times \mathbf{e}_n \quad (6.8.19b)$$

$$\mathbf{k}_{t,tangential} = \mathbf{e}_n \times \mathbf{k}_t \times \mathbf{e}_n \quad (6.8.19c)$$

Wir subtrahieren Gleichung (6.8.19a) von Gleichung (6.8.19b), beziehungsweise von Gleichung (6.8.19c) erhalten wir die Beziehungen

$$\mathbf{k}_{r,tangential} - \mathbf{k}_{e,tangential} = \mathbf{e}_n \times (\mathbf{k}_r - \mathbf{k}_e) \times \mathbf{e}_n \quad (6.8.20a)$$

$$\mathbf{k}_{t,tangential} - \mathbf{k}_{e,tangential} = \mathbf{e}_n \times (\mathbf{k}_t - \mathbf{k}_e) \times \mathbf{e}_n \quad (6.8.20b)$$

Gleichungen (6.8.9) und (6.8.13) sagen, dass  $\mathbf{k}_t - \mathbf{k}_e$  und  $\mathbf{k}_r - \mathbf{k}_e$  parallel zu  $\mathbf{e}_n$  sind. Damit können wir  $\mathbf{k}_r - \mathbf{k}_e = \Gamma_{re} \mathbf{e}_n$  und  $\mathbf{k}_t - \mathbf{k}_e = \Gamma_{te} \mathbf{e}_n$  schreiben. Wir können die Gleichungen (6.8.20a) beziehungsweise (6.8.20b) umformen

$$\mathbf{k}_{r,tangential} - \mathbf{k}_{e,tangential} = \mathbf{e}_n \times (\mathbf{k}_r - \mathbf{k}_e) \times \mathbf{e}_n = \mathbf{e}_n \times \Gamma_{re} \mathbf{e}_n \times \mathbf{e}_n = 0 \quad (6.8.21a)$$

$$\mathbf{k}_{t,tangential} - \mathbf{k}_{e,tangential} = \mathbf{e}_n \times (\mathbf{k}_t - \mathbf{k}_e) \times \mathbf{e}_n = \mathbf{e}_n \times \Gamma_{te} \mathbf{e}_n \times \mathbf{e}_n = 0 \quad (6.8.21b)$$

Damit gilt für die Tangentialkomponenten der Wellenvektoren

Die Tangentialkomponenten der Wellenvektoren der einfallenden, reflektierten und gebrochenen Wellen sind gleich.

$$\mathbf{k}_{e,tangential} = \mathbf{k}_{r,tangential} = \mathbf{k}_{t,tangential} \quad (6.8.22)$$

Die Änderung der Ausbreitungsrichtung bei Reflexion und Brechung stammt al-

leine von den Komponenten der Wellenvektoren, die parallel zum Normalenvektor der Grenzfläche liegen.

### 6.8.1. s-Polarisation

Zur Berechnung der Amplitude der reflektierten und transmittierten Wellen mit einer allgemeinen Polarisation verwenden wir zwei orthogonale Polarisationsrichtungen, die s-Polarisation und die p-Polarisation. Jeder Polarisationszustand kann als Linearkombination der s-Polarisation und der p-Polarisation geschrieben werden.

Wir beginnen die Rechnungen für elektromagnetische Wellen mit einer Polarisation senkrecht zur EINFALLSEBENE (S-POLARISATION).

Wenn in den beiden angrenzenden Medien die DIELEKTRIZITÄTSKONSTANTEN  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$  sind, dann muss der POINTINGVEKTOR (Energiestrom) senkrecht zur Grenzfläche an der Grenzfläche kontinuierlich sein, also

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_0}{\mu_1 \mu_0}} (\mathfrak{E}_e^2 - \mathfrak{E}_r^2) \cos \alpha = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_2 \varepsilon_0}{\mu_2 \mu_0}} \mathfrak{E}_t^2 \cos \gamma \quad (6.8.23)$$

wobei  $\alpha$  und  $\gamma$  die Winkel zur OBERFLÄCHENNORMALEN  $\mathbf{e}_n$  sind,  $\mathfrak{E}_e$  ist die Amplitude der  $\mathbf{E}$ -Feldkomponente der einfallenden elektromagnetischen Welle parallel zur OBERFLÄCHE (s-Polarisation),  $\mathfrak{E}_r$  die Amplitude der reflektierten und  $\mathfrak{E}_t$  die der gebrochenen elektromagnetischen Welle.

Vereinfacht kann man die Energieerhaltung schreiben als

$$\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} (\mathfrak{E}_e^2 - \mathfrak{E}_r^2) \cos \alpha = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \mathfrak{E}_t^2 \cos \gamma \quad (6.8.24)$$

Die Komponente von  $\mathbf{E}$  parallel zur OBERFLÄCHE muss stetig sein, also ist nach Gleichung (6.8.3)

$$\mathfrak{E}_e + \mathfrak{E}_r = \mathfrak{E}_t \quad (6.8.25)$$

Wir beachten, dass  $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$  ist und dividieren die beiden Gleichungen durcheinander. Wir erhalten

$$\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} (\mathfrak{E}_e - \mathfrak{E}_r) \cos \alpha = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \mathfrak{E}_t \cos \gamma \Rightarrow \sqrt{\frac{\varepsilon_1 \mu_2}{\mu_1 \varepsilon_2}} (\mathfrak{E}_e - \mathfrak{E}_r) \cos \alpha = \mathfrak{E}_t \cos \gamma \quad (6.8.26)$$

Aus der Kombination der Gleichungen (6.8.25) und (6.8.26) erhalten wir die Fresnelschen Gleichungen für die s-Polarisation.

Die Fresnelschen Gleichungen für die  $s$ -Polarisation lauten

$$\mathfrak{E}_r = \mathfrak{E}_e \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos \alpha - \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \cos \gamma}{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos \alpha + \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \cos \gamma} \quad (6.8.27a)$$

$$\mathfrak{E}_t = \mathfrak{E}_e \frac{2\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos \alpha}{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos \alpha + \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \cos \gamma} \quad (6.8.27b)$$

Mit den Brechungsindizes  $n_1 = \sqrt{\mu_1 \varepsilon_1}$  und  $n_2 = \sqrt{\mu_2 \varepsilon_2}$  erhält man

$$\mathfrak{E}_r = \mathfrak{E}_e \frac{\frac{n_1}{\mu_1} \cos \alpha - \frac{n_2}{\mu_2} \cos \gamma}{\frac{n_1}{\mu_1} \cos \alpha + \frac{n_2}{\mu_2} \cos \gamma} \quad (6.8.28a)$$

$$\mathfrak{E}_t = \mathfrak{E}_e \frac{2\frac{n_1}{\mu_1} \cos \alpha}{\frac{n_1}{\mu_1} \cos \alpha + \frac{n_2}{\mu_2} \cos \gamma} \quad (6.8.28b)$$

Nach dem Brechungsgesetz ist

$$\frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} = \sqrt{\frac{\mu_1 \varepsilon_1}{\mu_2 \varepsilon_2}} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \sqrt{\frac{\varepsilon_1 \mu_2}{\mu_1 \varepsilon_2}} \quad \sqrt{\frac{\varepsilon_1 \mu_2}{\mu_1 \varepsilon_2}} = \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha}$$

Wir setzen dies ein und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} (\mathfrak{E}_e - \mathfrak{E}_r) \cos \alpha &= \mathfrak{E}_t \cos \gamma \\ \frac{(\mathfrak{E}_e - \mathfrak{E}_r) \cos \alpha \sin \gamma}{\mu_1} &= \frac{\mathfrak{E}_t \cos \gamma \sin \alpha}{\mu_2} \end{aligned} \quad (6.8.29)$$

Wir setzen  $\mathfrak{E}_e + \mathfrak{E}_r = \mathfrak{E}_t$  ein und bekommen

**Fresnelsche Formeln für die s-POLARISATION**

$$\mathfrak{E}_r = \mathfrak{E}_e \frac{\frac{1}{\mu_1} \sin \gamma(\alpha) \cos \alpha - \frac{1}{\mu_2} \sin \alpha \cos \gamma(\alpha)}{\frac{1}{\mu_1} \sin \gamma(\alpha) \cos \alpha + \frac{1}{\mu_2} \sin \alpha \cos \gamma(\alpha)} \quad (6.8.30a)$$

$$\mathfrak{E}_t = \mathfrak{E}_e \frac{\frac{2}{\mu_1} \sin \gamma(\alpha) \cos \alpha}{\frac{1}{\mu_1} \sin \gamma(\alpha) \cos \alpha + \frac{1}{\mu_2} \sin \alpha \cos \gamma(\alpha)} \quad (6.8.30b)$$

Dabei ist

$$\sqrt{\mu_1 \varepsilon_1} \sin \alpha = \sqrt{\mu_2 \varepsilon_2} \sin \gamma$$

Für nichtmagnetische Materialien können die Fresnelgleichungen umgeschrieben werden

**Fresnelsche Formeln für die s-POLARISATION bei nichtmagnetischen Materialien**

$$\begin{aligned}\mathfrak{E}_r &= \mathfrak{E}_e \frac{\sin \gamma(\alpha) \cos \alpha - \sin \alpha \cos \gamma(\alpha)}{\sin \gamma(\alpha) \cos \alpha + \sin \alpha \cos \gamma(\alpha)} \\ &= -\mathfrak{E}_e \frac{\sin(\alpha - \gamma(\alpha))}{\sin(\alpha + \gamma(\alpha))}\end{aligned}\quad (6.8.31a)$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{E}_t &= \mathfrak{E}_e \frac{2 \sin \gamma(\alpha) \cos \alpha}{\sin \gamma(\alpha) \cos \alpha + \sin \alpha \cos \gamma(\alpha)} \\ &= \mathfrak{E}_e \frac{2 \sin \gamma(\alpha) \cos \alpha}{\sin(\alpha + \gamma(\alpha))}\end{aligned}\quad (6.8.31b)$$

Dabei ist

$$\sqrt{\varepsilon_1} \sin \alpha = \sqrt{\varepsilon_2} \sin \gamma$$

- Wenn  $\alpha > \gamma$ , wenn also die elektromagnetische Welle aus dem schnelleren Medium auf das langsamere Medium trifft, haben  $\mathfrak{E}_e$  und  $\mathfrak{E}_r$  unterschiedliche Vorzeichen: es tritt ein Phasensprung um  $\pi$  bei der REFLEXION auf.
- Bei der REFLEXION am schnelleren Medium  $\alpha < \gamma$  ist  $\sin(\alpha - \gamma)$  negativ und  $\mathfrak{E}_r$  positiv. Es gibt keinen Phasensprung bei der REFLEXION. Dies erklärt zum Beispiel, warum Seifenlamellen in Reflexion schwarz werden, wenn die Dicke gegen null geht.
- Die Gesetze für die INTENSITÄT bekommt man durch quadrieren und unter Berücksichtigung der relativen Dielektrizitätszahl  $\varepsilon_1$  und der relativen magnetischen Permeabilität  $\mu_1$ .
- Bei fast senkrechtem Einfall bekommt man  $\mathfrak{E}_r \approx -\mathfrak{E}_e \frac{\sin \alpha - \sin \gamma}{\sin \alpha + \sin \gamma} = -\mathfrak{E}_e \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}$



Fresnelsche Formeln für die Intensität bei der S-POLARISATION für nichtmagnetische Materialien

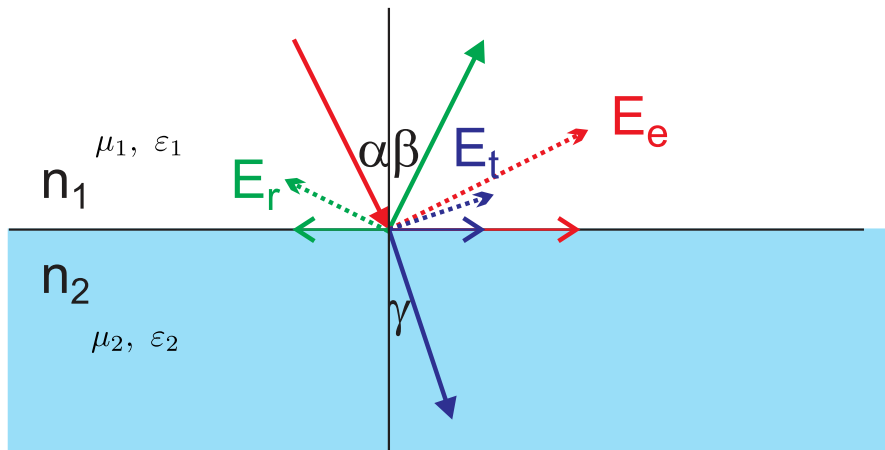
$$I_r = I_e \frac{[\sin \gamma(\alpha) \cos \alpha - \sin \alpha \cos \gamma(\alpha)]^2}{[\sin \gamma(\alpha) \cos \alpha + \sin \alpha \cos \gamma(\alpha)]^2}$$

$$= I_e \frac{\sin^2(\alpha - \gamma(\alpha))}{\sin^2(\alpha + \gamma(\alpha))} \quad (6.8.32a)$$

$$I_t = \frac{n_2}{n_1} I_e \frac{4 \sin^2 \gamma(\alpha) \cos^2 \alpha}{\sin^2(\alpha + \gamma(\alpha))} \quad (6.8.32b)$$

Wir haben die einfallende Intensität  $I_e = n_1 \frac{\varepsilon_0 c}{2} \mathfrak{E}_e^2$  als Referenz verwendet. Deshalb erscheint der Vorfaktor  $\frac{n_2}{n_1}$  für  $I_t$ . Im Medium mit dem Brechungsindex  $n_2$  wird die Energie mit einer anderen Geschwindigkeit transportiert als im Medium mit dem Brechungsindex  $n_1$ . Ist  $n_2$  grösser als  $n_1$ , so ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit kleiner und  $I_2$  muss grösser werden.

### 6.8.2. p-Polarisation



**Abb. 6.18.:** Stetigkeitsbedingungen für elektromagnetische Wellen mit p-Polarisation. Die dicken Vektoren stellen die  $\mathbf{k}$ -Vektoren dar (rot für die einfallende elektromagnetische Welle, grün für die reflektierte und blau für die gebrochene elektromagnetische Welle.). Die  $\mathbf{E}$ -Vektoren sind gestrichelt gezeichnet, ihre Projektion auf die Grenzfläche dünn.

Bei p-polarisierten elektromagnetischen Wellen ist die Bedingung für die Stetigkeit der Parallelkomponente von  $\mathbf{E}$  durch

$$(\mathfrak{E}_e - \mathfrak{E}_r) \cos \alpha = \mathfrak{E}_t \cos \gamma \quad (6.8.33)$$

gegeben. Weiter gilt immer noch die Beziehung für den Poynting-Vektor (Energieerhaltung)

$$\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} (\mathfrak{E}_e^2 - \mathfrak{E}_r^2) \cos \alpha = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \mathfrak{E}_t^2 \cos \gamma \quad (6.8.34)$$

Wir teilen die beiden Gleichungen und erhalten

$$\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} (\mathfrak{E}_e + \mathfrak{E}_r) = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \mathfrak{E}_t \quad (6.8.35)$$

Damit müssen wir das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_e \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} &= -\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \mathfrak{E}_r + \mathfrak{E}_t \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \\ \mathfrak{E}_e \cos \alpha &= \mathfrak{E}_r \cos \alpha + \mathfrak{E}_t \cos \gamma \end{aligned} \quad (6.8.36)$$

lösen. Wir multiplizieren die erste Gleichung mit  $\cos \alpha$  und die zweite mit  $\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}$

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_e \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos \alpha &= -\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \mathfrak{E}_r \cos \alpha + \mathfrak{E}_t \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \cos \alpha \\ \mathfrak{E}_e \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos \alpha &= \mathfrak{E}_r \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos \alpha + \mathfrak{E}_t \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos \gamma \end{aligned}$$

und addieren

$$2\mathfrak{E}_e \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos \alpha = \mathfrak{E}_t \left( \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \cos \alpha + \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos \gamma \right) \quad (6.8.37)$$

Um  $\mathfrak{E}_r$  zu bekommen multiplizieren wir die obere Gleichung in (6.8.36) mit  $\cos \gamma$  und die untere mit  $\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}$

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_e \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos \gamma &= -\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \mathfrak{E}_r \cos \gamma + \mathfrak{E}_t \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \cos \gamma \\ \mathfrak{E}_e \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \cos \alpha &= \mathfrak{E}_r \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \cos \alpha + \mathfrak{E}_t \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \cos \gamma, \end{aligned}$$

subtrahieren und erhalten

$$\mathfrak{E}_e \left( \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos \gamma - \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \cos \alpha \right) = -\mathfrak{E}_r \left( \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos \gamma + \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \cos \alpha \right) \quad (6.8.38)$$

Damit erhält man

Fresnelsche Formeln (p-Polarisation):

$$\mathfrak{E}_r = \mathfrak{E}_e \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \cos \alpha - \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos \gamma}{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos \gamma + \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \cos \alpha} \quad (6.8.39a)$$

$$\mathfrak{E}_t = \mathfrak{E}_e \frac{2\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos \alpha}{\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \cos \alpha + \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos \gamma} \quad (6.8.39b)$$

Mit den Brechungsindizes  $n_1 = \sqrt{\mu_1 \varepsilon_1}$  und  $n_2 = \sqrt{\mu_2 \varepsilon_2}$  erhält man

Fresnelsche Formeln (p-Polarisation):

$$\mathfrak{E}_r = \mathfrak{E}_e \frac{\frac{n_2}{\mu_2} \cos \alpha - \frac{n_1}{\mu_1} \cos \gamma}{\frac{n_1}{\mu_1} \cos \gamma + \frac{n_2}{\mu_2} \cos \alpha} \quad (6.8.40a)$$

$$\mathfrak{E}_t = \mathfrak{E}_e \frac{2\frac{n_1}{\mu_1} \cos \alpha}{\frac{n_2}{\mu_2} \cos \alpha + \frac{n_1}{\mu_1} \cos \gamma} \quad (6.8.40b)$$

Für nichtmagnetische Materialien vereinfachen sie sich zu

Fresnelsche Formeln (p-Polarisation) für nichtmagnetische Materialien:

$$\mathfrak{E}_r = \mathfrak{E}_e \frac{n_2 \cos \alpha - n_1 \cos \gamma}{n_1 \cos \gamma + n_2 \cos \alpha} \quad (6.8.41a)$$

$$\mathfrak{E}_t = \mathfrak{E}_e \frac{2n_1 \cos \alpha}{n_2 \cos \alpha + n_1 \cos \gamma} \quad (6.8.41b)$$

Die Brechungsindizes  $n_1$  und  $n_2$  können mit dem Snelliusschen Gesetz  $n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \gamma$  eliminiert werden

Fresnelsche Formeln (p-Polarisation) für nichtmagnetische Materialien:

$$\mathfrak{E}_r = \mathfrak{E}_e \frac{\sin \alpha \cos \alpha - \sin \gamma \cos \gamma}{\sin \gamma \cos \gamma + \sin \alpha \cos \alpha} \quad (6.8.42a)$$

$$\mathfrak{E}_t = \mathfrak{E}_e \frac{2 \sin \gamma \cos \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha + \sin \gamma \cos \gamma} \quad (6.8.42b)$$

Mit  $\sin(\alpha \pm \gamma) \cos(\alpha \mp \gamma) = \sin \alpha \cos \alpha \pm \sin \gamma \cos \gamma$  werden die obigen Gleichungen

Fresnelsche Formeln (p-Polarisation) für nichtmagnetische Materialien:

$$\mathfrak{E}_r = \mathfrak{E}_e \frac{\sin(\alpha - \gamma) \cos(\alpha + \gamma)}{\sin(\alpha + \gamma) \cos(\alpha - \gamma)} \quad (6.8.43a)$$

$$\mathfrak{E}_t = \mathfrak{E}_e \frac{2 \sin \gamma \cos \alpha}{\sin(\alpha + \gamma) \cos(\alpha - \gamma)} \quad (6.8.43b)$$

Die Quotienten aus sin und cos können zu tan zusammengefasst werden

Fresnelsche Formeln (p-Polarisation) bei nichtmagnetischen Materialien:

$$\mathfrak{E}_r = \mathfrak{E}_e \frac{\tan[\alpha - \gamma(\alpha)]}{\tan[\alpha + \gamma(\alpha)]} \quad (6.8.44a)$$

$$\mathfrak{E}_t = \mathfrak{E}_e \frac{2 \sin \gamma(\alpha) \cos \alpha}{\sin[\alpha + \gamma(\alpha)] \cos[\alpha - \gamma(\alpha)]} \quad (6.8.44b)$$

Die Fresnelschen Formeln für die Intensität lauten

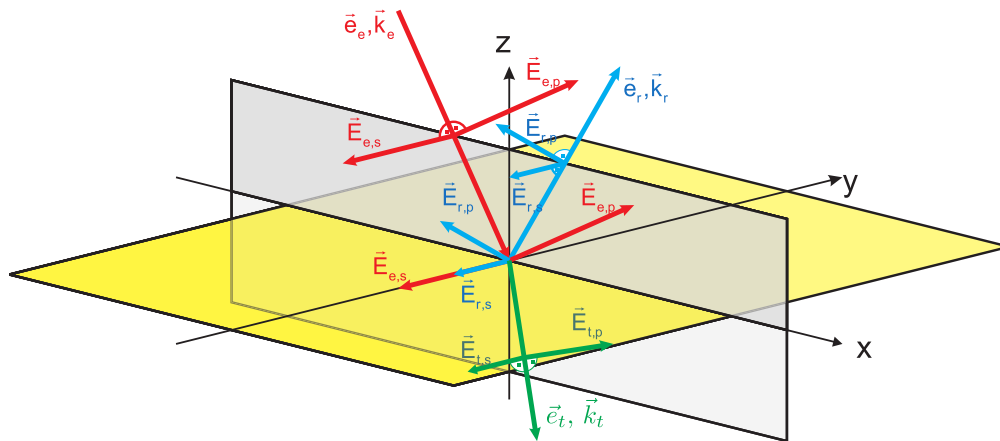
Fresnelsche Formeln für die Intensität bei (p-Polarisation) bei nichtmagnetischen Materialien:

$$I_r = I_e \frac{\tan^2[\alpha - \gamma(\alpha)]}{\tan^2[\alpha + \gamma(\alpha)]} \quad (6.8.45a)$$

$$I_t = \frac{n_2}{n_1} I_e \frac{4 \sin^2 \gamma(\alpha) \cos^2 \alpha}{\sin^2[\alpha + \gamma(\alpha)] \cos^2[\alpha - \gamma(\alpha)]} \quad (6.8.45b)$$

Wir haben die einfallende Intensität  $I_e = n_1 \frac{\epsilon_0 c}{2} \mathcal{E}_e^2$  als Referenz verwendet. Deshalb erscheint der Vorfaktor  $\frac{n_2}{n_1}$  für  $I_t$ .

### 6.8.3. Grenzfall des senkrechten Einfalles



**Abb. 6.19.:** Darstellung der Richtungen der elektrischen Felder für die  $s$ - und  $p$ -Polarisation.

Im Grenzfall  $\alpha \rightarrow 0$  müssen die Resultate für die  $s$ - und  $p$ -Polarisation übereinstimmen. Wir betrachten den Fall kleiner Winkel. Dann lautet das Snelliussche Brechungsgesetz

$$n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \gamma \xrightarrow{\alpha \ll 1 \text{ \& } \gamma \ll 1} n_1 \alpha = n_2 \gamma \implies \gamma = \frac{n_1}{n_2} \alpha \quad (6.8.46)$$

Weiter gilt

$$\cos \alpha \xrightarrow{\alpha \ll 1} 1 \quad \sin \alpha \xrightarrow{\alpha \ll 1} \alpha. \quad (6.8.47)$$

Lässt man in Gleichung (6.8.44)  $\alpha$  gegen null gehen, ergibt sich für das reflektierte und das transmittierte elektrische Feld in der  $p$ -Polarisation

$$\begin{aligned}
\mathfrak{E}_{r,p} &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \mathfrak{E}_e \frac{\sin(\alpha - \gamma) \cos(\alpha + \gamma)}{\sin(\alpha + \gamma) \cos(\alpha - \gamma)} \\
&\stackrel{\text{Snellius, } \alpha \ll 1 \text{ \& } \gamma \ll 1}{=} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \mathfrak{E}_e \frac{\sin(\alpha - \frac{n_1}{n_2}\alpha) \cos(\alpha + \frac{n_1}{n_2}\alpha)}{\sin(\alpha + \frac{n_1}{n_2}\alpha) \cos(\alpha - \frac{n_1}{n_2}\alpha)} \\
&\stackrel{\alpha \ll 1}{=} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \mathfrak{E}_e \frac{(\alpha - \frac{n_1}{n_2}\alpha) \cdot 1}{(\alpha + \frac{n_1}{n_2}\alpha) \cdot 1} = \mathfrak{E}_e \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}
\end{aligned} \tag{6.8.48a}$$

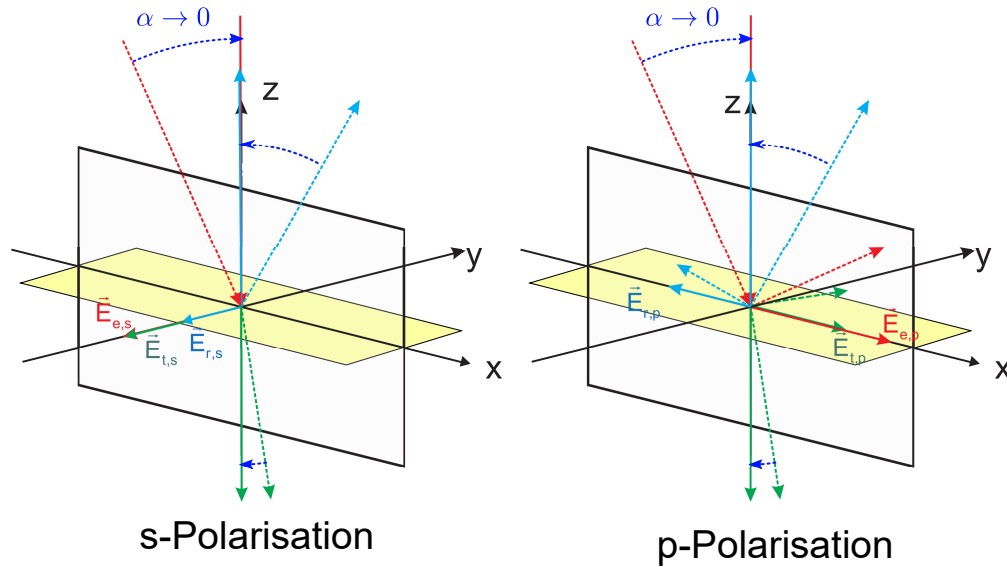
$$\begin{aligned}
\mathfrak{E}_{t,p} &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \mathfrak{E}_e \frac{2 \sin \gamma \cos \alpha}{\sin(\alpha + \gamma) \cos(\alpha - \gamma)} \\
&\stackrel{\text{Snellius, } \alpha \ll 1 \text{ \& } \gamma \ll 1}{=} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \mathfrak{E}_e \frac{2 \sin(\frac{n_1}{n_2}\alpha) \cos \alpha}{\sin(\alpha + \frac{n_1}{n_2}\alpha) \cos(\alpha - \frac{n_1}{n_2}\alpha)} \\
&\stackrel{\alpha \ll 1}{=} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \mathfrak{E}_e \frac{2(\frac{n_1}{n_2}\alpha) \cdot 1}{(\alpha + \frac{n_1}{n_2}\alpha) \cdot 1} = \mathfrak{E}_e \frac{2n_1}{n_2 + n_1}
\end{aligned} \tag{6.8.48b}$$

und damit  $\mathfrak{E}_{r,p} > 0$ . Andererseits hat der Grenzwert des elektrischen Feldes  $\mathfrak{E}_{r,s}$  für  $\alpha$  gegen Null bei der s-Polarisation in Gleichung (6.8.31)

$$\begin{aligned}
\mathfrak{E}_{r,s} &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left( -\mathfrak{E}_e \frac{\sin(\alpha - \gamma(\alpha))}{\sin(\alpha + \gamma(\alpha))} \right) \\
&\stackrel{\text{Snellius, } \alpha \ll 1 \text{ \& } \gamma \ll 1}{=} - \lim_{\alpha \rightarrow 0} \mathfrak{E}_e \frac{\sin(\alpha - \frac{n_1}{n_2}\alpha)}{\sin(\alpha + \frac{n_1}{n_2}\alpha)} \\
&\stackrel{\alpha \ll 1}{=} - \lim_{\alpha \rightarrow 0} \mathfrak{E}_e \frac{(\alpha - \frac{n_1}{n_2}\alpha)}{(\alpha + \frac{n_1}{n_2}\alpha)} = -\mathfrak{E}_e \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}
\end{aligned} \tag{6.8.49a}$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{E}_{t,s} &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \mathfrak{E}_e \frac{2 \sin(\gamma(\alpha)) \cos(\alpha)}{\sin(\alpha + \gamma(\alpha))} \\
&\stackrel{\text{Snellius, } \alpha \ll 1 \text{ \& } \gamma \ll 1}{=} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \mathfrak{E}_e \frac{2 \sin(\frac{n_1}{n_2}\alpha) \cos(\alpha)}{\sin(\alpha + \frac{n_1}{n_2}\alpha)} \\
&\stackrel{\alpha \ll 1}{=} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \mathfrak{E}_e \frac{2(\frac{n_1}{n_2}\alpha) \cdot 1}{(\alpha + \frac{n_1}{n_2}\alpha)} = \mathfrak{E}_e \frac{2n_1}{n_2 + n_1}
\end{aligned} \tag{6.8.49b}$$

einen negativen Wert. Dies ist korrekt, da nach der Abbildung 6.19 und Abbildung ?? die Vektoren für beide Polarisierungen in unterschiedliche Richtungen zeigen.



**Abb. 6.20.:** Richtungen der Felder bei senkrechtem Einfall. Links ist die s-Polarisation gezeigt, rechts die p-Polarisation. Die Wellen und Felder aus Abbildung 6.19 sind hier zu senkrechtem Einfall gedreht. Die gestrichelten Pfeile zeigen die Richtung der  $\mathbf{k}$  aus Abbildung 6.19.

Wenn wir die einfallende Welle als Rechtssystem betrachten, dann muss das ganze Vektordreibein  $(\mathbf{k}, \mathbf{E}, \mathbf{B})$  gedreht werden. Dies führt bei der p-Polarisation zu einer Situation, die mit der Lage der elektrischen Felder kompatibel ist.  $\mathfrak{E}_{r,p}$  zeigt in die zu  $\mathfrak{E}_{e,p}$  entgegengesetzte Richtung. Bei der s-Polarisation zeigen  $\mathfrak{E}_{r,s}$  und  $\mathfrak{E}_{e,s}$  in die gleiche Richtung. Deshalb existiert das Minuszeichen in Gleichung (6.8.49a). Also zeigen die beiden elektrischen Felder der reflektierten Wellen  $\mathfrak{E}_{r,p}$  und  $\mathfrak{E}_{s,p}$  in identische Richtungen.

Für die Intensitäten können wir die gleiche Rechnung durchführen, z.B. für die Gleichungen (6.8.45).

$$I_r = \lim_{\alpha \rightarrow 0} I_e \frac{\tan^2[\alpha - \gamma]}{\tan^2[\alpha + \gamma]} \xrightarrow{\text{Snellius, } \alpha \ll 1, \gamma \ll 1} \lim_{\alpha \rightarrow 0} I_e \frac{\tan^2[\alpha - \frac{n_1}{n_2}\alpha]}{\tan^2[\alpha + \frac{n_1}{n_2}\alpha]} \\ \xrightarrow{\alpha \ll 1} \lim_{\alpha \rightarrow 0} I_e \frac{\left(\alpha - \frac{n_1}{n_2}\alpha\right)^2}{\left(\alpha + \frac{n_1}{n_2}\alpha\right)^2} = I_e \left(\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}\right)^2 \quad (6.8.50a)$$

$$I_t = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{n_2}{n_1} I_e \frac{4 \sin^2(\gamma(\alpha)) \cos^2(\alpha)}{\sin^2[\alpha + \gamma(\alpha)] \cos^2[\alpha - \gamma(\alpha)]} \\ \xrightarrow{\text{Snellius, } \alpha \ll 1 \text{ \& } \gamma \ll 1} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{n_2}{n_1} I_e \frac{4 \sin^2\left(\frac{n_1}{n_2}\alpha\right) \cos^2(\alpha)}{\sin^2\left[\alpha + \frac{n_1}{n_2}\alpha\right] \cos^2\left[\alpha - \frac{n_1}{n_2}\alpha\right]} \\ \xrightarrow{\alpha \ll 1} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{n_2}{n_1} I_e \frac{4 \left(\frac{n_1}{n_2}\alpha\right)^2 \cdot 1^2}{\left(\alpha + \frac{n_1}{n_2}\alpha\right)^2 \cdot 1^2} = \frac{n_2}{n_1} I_e \frac{4n_1^2}{(n_2 + n_1)^2} = I_e \frac{4n_1 n_2}{(n_2 + n_1)^2} \quad (6.8.50b)$$

Diese Gleichungen gelten sowohl für die s-Polarisation wie auch für die p-Polarisation. Die Summe der reflektierten und transmittierten Intensität ist

$$\begin{aligned}
 I_{tot} = I_r + I_t &= I_e \left( \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \right)^2 + I_e \frac{4n_1 n_2}{(n_2 + n_1)^2} = I_e \frac{(n_2 - n_1)^2 + 4n_1 n_2}{(n_2 + n_1)^2} \\
 &= I_e \frac{(n_2 + n_1)^2}{(n_2 + n_1)^2} = I_e \quad (6.8.51)
 \end{aligned}$$

Sie ist gleich der eingestrahnten Intensität.

#### 6.8.4. Brewster-Winkel

Wenn bei der p-Polarisation in der Gleichung (6.8.44) für  $\mathfrak{E}_r$  der Nenner  $\alpha + \gamma(\alpha) = \pi/2$  ist, divergiert der Nenner. Wir erhalten also  $\mathfrak{E}_r(\alpha = \pi/2 - \gamma(\alpha)) = 0$ . Dies ist der BREWSTER-WINKEL.

Beim Brewsterwinkel gegeben durch

$$\alpha_{Brewster} + \gamma(\alpha_{Brewster}) = \pi/2 \quad (6.8.52)$$

ist  $\mathfrak{E}_{r,p}$  für die p-Polarisation gleich null. Die elektromagnetische Welle ist s-polarisiert!

Gleichung (6.8.52) kann mit dem Brechungsgesetz (6.8.18) nach  $\alpha_{Brewster}$  aufgelöst werden

$$\alpha_{Brewster} = \arctan\left(\frac{n_2}{n_1}\right) \quad (6.8.53)$$





**Abb. 6.21.:** Polarisation bei der Spiegelung an Wasser. Links ist der Analysator so gestellt, dass das an der Wasseroberfläche reflektierte Licht durchgelassen wird. Rechts die gleiche Szene, aber der Analysator blockt das an der Wasserfläche reflektierte Licht.



**Abb. 6.22.:** Polarisation bei der Spiegelung an Wasser. Die beiden Bilder aus Abbildung 6.21 sind hier übereinandergelegt. Die Trennlinie läuft entlang des Baumstammes.



**Abb. 6.23.:** Polarisation bei der Spiegelung an Wasser. Linkes und rechtes Bild wurden mit zwei Stellungen des Polarisationsfilters aufgenommen.



**Versuch 92: Versuch zur Vorlesung:**

Brewsterwinkel ([Versuchskarte O-115](#), [Video](#))



**Versuch 93: Versuch zur Vorlesung:**

Brewsterwinkel ([Versuchskarte O-115](#), [Video](#))

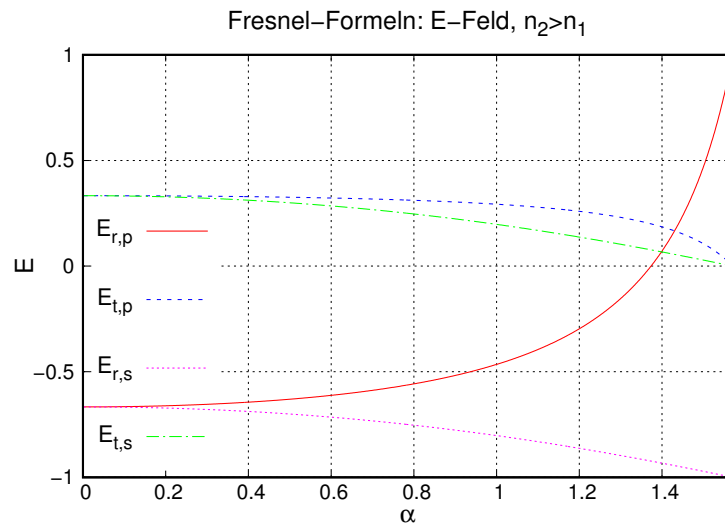


**Versuch 94: Versuch zur Vorlesung:**

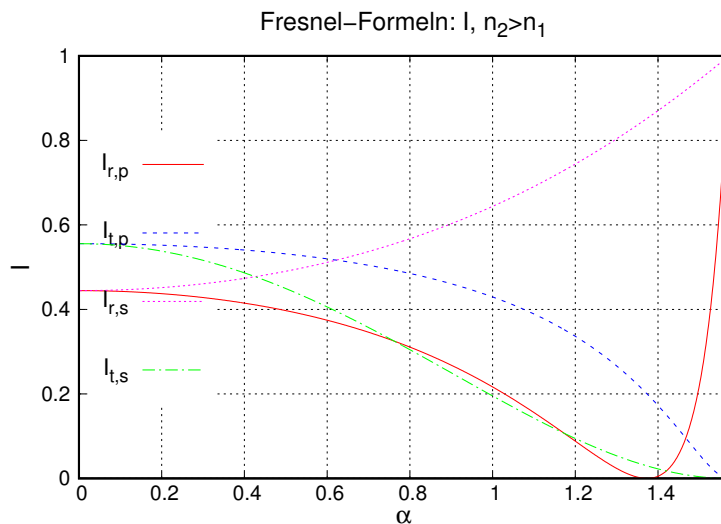
Brewsterwinkel ([Versuchskarte O-115](#), [Video \(VPN oder intern\)](#))



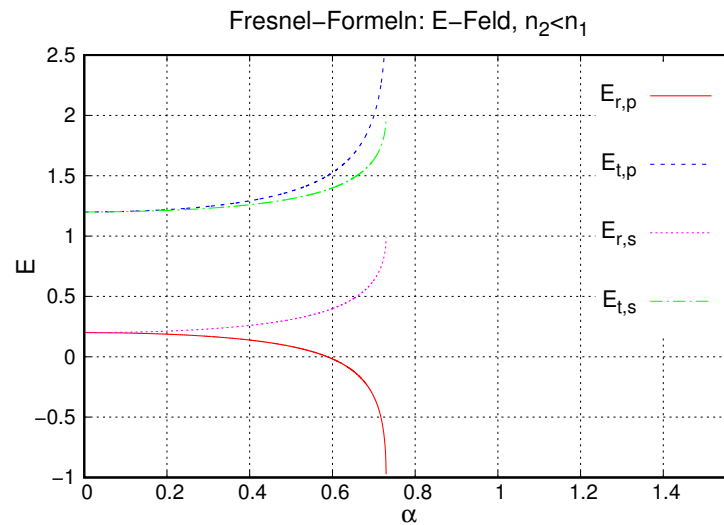
### 6.8.5. Beispielkurven für die Fresnelformeln



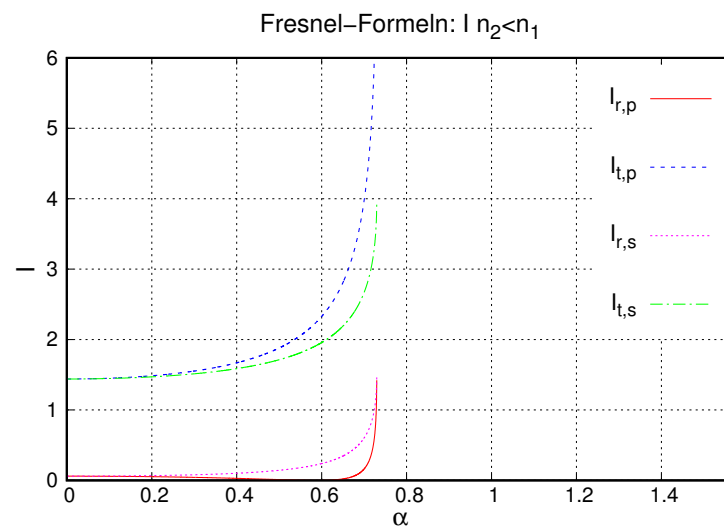
**Abb. 6.24.:** Verlauf der AMPLITUDE des elektrischen Feldes für P- und S-POLARISATION, wenn elektromagnetische Wellen aus dem schnelleren Medium ( $n_1 = 1$ ) in das langsamere ( $n_2 = 1.5$ ) eintreten.



**Abb. 6.25.:** Verlauf der INTENSITÄT für P- und S-POLARISATION, wenn elektromagnetische Wellen aus dem schnelleren Medium ( $n_1 = 1$ ) in das langsamere ( $n_2 = 1.5$ ) eintreten. Die INTENSITÄT ist mit  $I = n_i E^2$  berechnet worden, wobei  $n_i$  die für das jeweilige Medium gültige Brechzahl ist.



**Abb. 6.26.:** Verlauf der AMPLITUDE des elektrischen Feldes für P- und S-POLARISATION, wenn elektromagnetische Wellen aus dem langsameren ( $n_1 = 1.5$ ) Medium in das schnellere ( $n_2 = 1$ ) eintreten.



**Abb. 6.27.:** Verlauf der INTENSITÄT für P- und S-POLARISATION, wenn elektromagnetische Wellen aus dem langsameren ( $n_1 = 1.5$ ) Medium in das schnellere ( $n_2 = 1$ ) eintreten. Die INTENSITÄT ist mit  $I = n_i E^2$  berechnet worden, wobei  $n_i$  die für das jeweilige Medium gültige Brechzahl ist.

### 6.8.6. Energiefluss senkrecht zur Grenzfläche

Wir können kontrollieren, ob im Energiefluss senkrecht zur Grenzfläche die Energie erhalten bleibt. Dazu müssen wir den Energiefluss durch eine Fläche parallel zur Oberfläche berechnen. Wir betrachten hier die p-Polarisation. Der einfallende Energiefluss ist

$$I_{e,\perp} = n_1 \frac{\varepsilon_0 c}{2} \mathfrak{E}_e^2 \cos \alpha \quad (6.8.54)$$

Der Fluss der reflektierten Energie (Betrag des Poynting-Vektors) durch eine Fläche parallel zur Grenzfläche ist

$$I_{r,\perp} = n_1 \frac{\varepsilon_0 c}{2} \mathfrak{E}_r^2 \cos \alpha \quad (6.8.55)$$

Ebenso ist der Fluss der gebrochenen Energie durch eine Fläche parallel zur Grenzfläche

$$I_{t,\perp} = n_2 \frac{\varepsilon_0 c}{2} \mathfrak{E}_t^2 \cos \gamma(\alpha) \quad (6.8.56)$$

Die Energieerhaltung sagt nun, dass für die p-Polarisation

$$\begin{aligned} I_{e,p,\perp} &= n_1 \frac{\varepsilon_0 c}{2} \mathfrak{E}_e^2 \cos \alpha \\ &= I_{r,p,\perp} + I_{t,p,\perp} \\ &= n_1 \frac{\varepsilon_0 c}{2} \mathfrak{E}_e^2 \frac{\tan^2[\alpha - \gamma(\alpha)]}{\tan^2[\alpha + \gamma(\alpha)]} \cos \alpha \\ &\quad + n_2 \frac{\varepsilon_0 c}{2} \mathfrak{E}_e^2 \frac{4 \sin^2 \gamma(\alpha) \cos^2 \alpha}{\sin^2[\alpha + \gamma(\alpha)] \cos^2[\alpha - \gamma(\alpha)]} \cos(\gamma(\alpha)) \\ &= \frac{\varepsilon_0 c}{2} \mathfrak{E}_e^2 \\ &\quad \left[ n_1 \frac{\sin^2[\alpha - \gamma(\alpha)] \cos^2[\alpha - \gamma(\alpha)] \cos \alpha}{\sin^2[\alpha + \gamma(\alpha)] \cos^2[\alpha - \gamma(\alpha)]} \right. \\ &\quad \left. + n_2 \frac{4 \sin^2 \gamma(\alpha) \cos^2 \alpha \cos(\gamma(\alpha))}{\sin^2[\alpha + \gamma(\alpha)] \cos^2[\alpha - \gamma(\alpha)]} \right] \\ &= \frac{n_1 \varepsilon_0 c}{2} \mathfrak{E}_e^2 \\ &\quad \left[ \sin^2[\alpha - \gamma(\alpha)] \cos^2[\alpha + \gamma(\alpha)] \cos \alpha \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma(\alpha)} \cdot 4 \sin^2 \gamma(\alpha) \cos^2 \alpha \cos(\gamma(\alpha)) \right] \\ &\quad \cdot \left[ \sin^2[\alpha + \gamma(\alpha)] \cos^2[\alpha - \gamma(\alpha)] \right]^{-1} \\ &= \frac{n_1 \varepsilon_0 c}{2} \mathfrak{E}_e^2 \cos \alpha \\ &\quad \left[ \sin^2[\alpha - \gamma(\alpha)] \cos^2[\alpha + \gamma(\alpha)] \right. \\ &\quad \left. + 4 \sin \alpha \sin \gamma(\alpha) \cos \alpha \cos(\gamma(\alpha)) \right] \\ &\quad \cdot \left[ \sin^2[\alpha + \gamma(\alpha)] \cos^2[\alpha - \gamma(\alpha)] \right]^{-1} \end{aligned} \quad (6.8.57)$$

gilt.

Wir müssen also den Wert des Bruches

$$X = \left\{ \sin^2[\alpha - \gamma(\alpha)] \cos^2[\alpha + \gamma(\alpha)] + 4 \sin \alpha \sin \gamma(\alpha) \cos \alpha \cos(\gamma(\alpha)) \right\} \\ \cdot \left\{ \sin^2[\alpha + \gamma(\alpha)] \cos^2[\alpha - \gamma(\alpha)] \right\}^{-1}$$

berechnen.

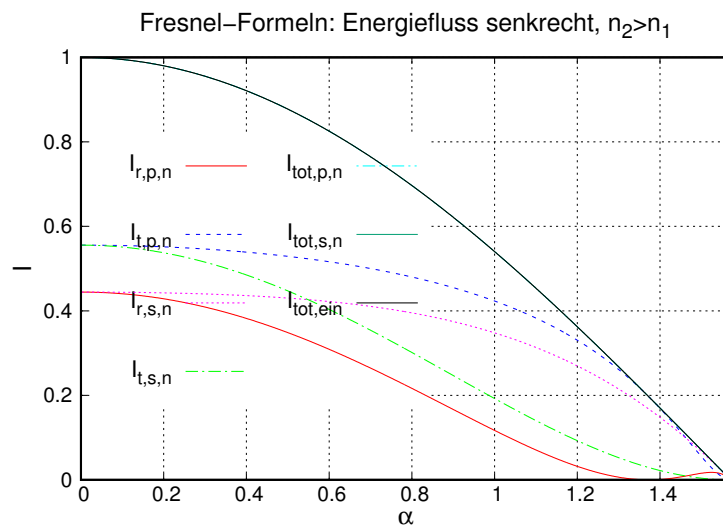
$$\begin{aligned} X &= \left\{ \sin^2[\alpha - \gamma] \cos^2[\alpha + \gamma] + 4 \sin \alpha \sin \gamma \cos \alpha \cos(\gamma) \right\} \\ &\quad \cdot \left\{ \sin^2[\alpha + \gamma] \cos^2[\alpha - \gamma] \right\}^{-1} \\ &= \left\{ \sin^2[\alpha - \gamma] \cos^2[\alpha + \gamma] + \sin(2\alpha) \sin(2\gamma) \right\} \\ &\quad \cdot \left\{ \sin^2[\alpha + \gamma] \cos^2[\alpha - \gamma] \right\}^{-1} \\ &= \left\{ \frac{1}{2} (1 - \cos[2\alpha - 2\gamma]) \frac{1}{2} (1 + \cos[2\alpha + 2\gamma]) \right. \\ &\quad \left. + \sin(2\alpha) \sin(2\gamma) \right\} \\ &\quad \cdot \left\{ \frac{1}{2} (1 - \cos[2\alpha + 2\gamma]) \frac{1}{2} (1 + \cos[2\alpha - 2\gamma]) \right\}^{-1} \\ &= \{(1 - \cos[2\alpha - 2\gamma]) (1 + \cos[2\alpha + 2\gamma]) \\ &\quad + 4 \sin(2\alpha) \sin(2\gamma)\} \\ &\quad \cdot \{(1 - \cos[2\alpha + 2\gamma]) (1 + \cos[2\alpha - 2\gamma])\}^{-1} \\ &= \{(1 - \cos[2\alpha - 2\gamma]) (1 + \cos[2\alpha + 2\gamma]) \\ &\quad + 2 (\cos[2\alpha - 2\gamma] - \cos[2\alpha + 2\gamma])\} \\ &\quad \cdot \{(1 - \cos[2\alpha + 2\gamma]) (1 + \cos[2\alpha - 2\gamma])\}^{-1} \end{aligned} \quad (6.8.58)$$

Wir setzen  $A = \cos[2\alpha - 2\gamma]$  und  $B = \cos[2\alpha + 2\gamma]$  und schreiben die Gleichung um

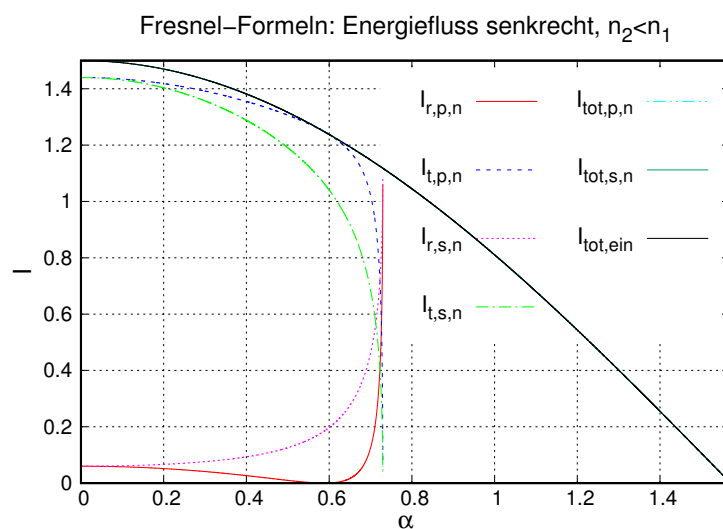
$$\begin{aligned} X &= \frac{(1 - A)(1 + B) + 2A - 2B}{(1 - B)(1 + A)} \\ &= \frac{1 - A + B - AB + 2A - 2B}{1 + A - B - AB} \\ &= \frac{1 + A - B - AB}{1 + A - B - AB} \\ &= 1 \end{aligned} \quad (6.8.59)$$

Da  $X = 1$  ist, ist gezeigt, dass für den Energiefluss durch die Grenzfläche für  $p$ -Polarisation Energieerhaltung gilt.

Eine ähnliche Gleichung kann man für die  $s$ -Polarisation berechnen. In der Elektrizitätslehre würde man sagen, dass der Fluss anhand des Pointing-Vektors berechnet wurde.



**Abb. 6.28.:** Verlauf der mit der Fläche gewichteten INTENSITÄT für P- und S-POLARISATION, wenn elektromagnetische Wellen aus dem schnelleren ( $n_1 = 1$ ) Medium in das langsamere ( $n_2 = 1.5$ ) eintreten.



**Abb. 6.29.:** Verlauf der mit der Fläche gewichteten INTENSITÄT für P- und S-POLARISATION, wenn elektromagnetische Wellen aus dem langsameren ( $n_1 = 1.5$ ) Medium in das schnellere ( $n_2 = 1$ ) eintreten.

Für beide Bilder wurde die INTENSITÄT mit  $I = n_i E^2 \cos(\alpha_i)$  berechnet, wobei  $n_i$  die für das jeweilige Medium gültige Brechzahl und  $\alpha_i$  der entsprechende Winkel ist. Die drei Kurven für die gesamte Intensität bei der  $p$ -Polarisation und der  $s$ -Polarisation liegen über der Kurve der mit dem Winkel gewichteten Intensität der einfallenden elektromagnetischen Welle.

Parallel zur Oberfläche ist es wegen der Translationssymmetrie schwieriger Energieerhaltungsgrößen zu definieren.

Die dritte Stetigkeitsbedingung an der Grenzfläche, die der Normalkomponente von  $\varepsilon \mathbf{E} = \mathbf{D}$  liefert das Snelliussche Gesetz.

### 6.8.7. Felder und Intensitäten bei senkrechtem Einfall

Da bei senkrechtem Einfall s- und p-Polarisation ununterscheidbar sind, können die Gleichungen am einfachsten aus Gleichung (6.8.41) abgeleitet werden. Aus dem Brechungsgesetz folgt, dass mit  $\alpha = 0$  auch  $\gamma = 0$  ist. Setzen wir diese beiden Werte in Gleichung (6.8.41) ein, erhalten wir

$$\frac{\mathfrak{E}_r}{\mathfrak{E}_e} = \frac{n_2 \cos(0) - n_1 \cos(0)}{n_1 \cos(0) + n_2 \cos(0)} = \frac{n_2 - n_1}{n_1 + n_2} \quad (6.8.60a)$$

$$\frac{\mathfrak{E}_t}{\mathfrak{E}_e} = \frac{2n_1 \cos(0)}{n_2 \cos(0) + n_1 \cos(0)} = \frac{2n_1}{n_2 + n_1} \quad (6.8.60b)$$

Die Intensitäten bei senkrechtem Einfall ist über

$$I_e = n_1 \frac{\varepsilon_0 c}{2} \mathfrak{E}_e^2 \quad I_r = n_1 \frac{\varepsilon_0 c}{2} \mathfrak{E}_r^2 \quad I_t = n_2 \frac{\varepsilon_0 c}{2} \mathfrak{E}_t^2 \quad (6.8.61)$$

gegeben. Also haben wir (wir lassen die gleichen Faktoren in allen Intensitätsgleichungen weg)

$$\frac{I_r}{I_e} = \frac{n_1 \mathfrak{E}_r^2}{n_1 \mathfrak{E}_e^2} = \left( \frac{n_2 - n_1}{n_1 + n_2} \right)^2 \quad (6.8.62a)$$

$$\frac{I_t}{I_e} = \frac{n_2 \mathfrak{E}_t^2}{n_1 \mathfrak{E}_e^2} = \frac{n_2}{n_1} \left( \frac{2n_1}{n_2 + n_1} \right)^2 = \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2} \quad (6.8.62b)$$

In beiden Fällen ist nur das Verhältnis der Brechungsindizes wichtig. Mit  $a_n = n_2/n_1$  erhalten wir

$$\frac{\mathfrak{E}_r}{\mathfrak{E}_e} = \frac{a_n - 1}{a_n + 1} \quad (6.8.63a)$$

$$\frac{\mathfrak{E}_t}{\mathfrak{E}_e} = \frac{2}{a_n + 1} \quad (6.8.63b)$$

$$\frac{I_r}{I_e} = \left( \frac{a_n - 1}{a_n + 1} \right)^2 \quad (6.8.63c)$$

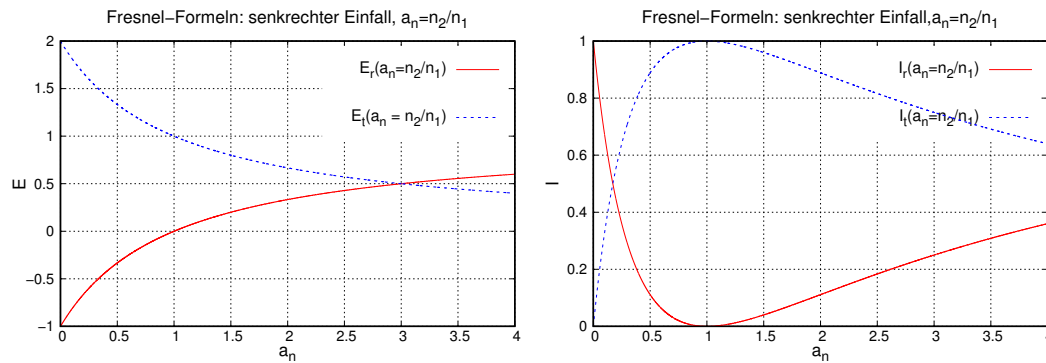
$$\frac{I_t}{I_e} = \frac{4a_n}{(a_n + 1)^2} \quad (6.8.63d)$$

Aus den beiden Gleichungen (6.8.63c) und (6.8.63d) ersieht man leicht, dass die Summe aus transmittierter und reflektierter Intensität

$$\frac{I_r}{I_e} + \frac{I_t}{I_e} = \left( \frac{a_n - 1}{a_n + 1} \right)^2 + \frac{4a_n}{(a_n + 1)^2} = \frac{a_n^2 - 2a_n + 1 + 4a_n}{(a_n + 1)^2} = \frac{a_n^2 + 2a_n + 1}{(a_n + 1)^2} = 1 \quad (6.8.64)$$

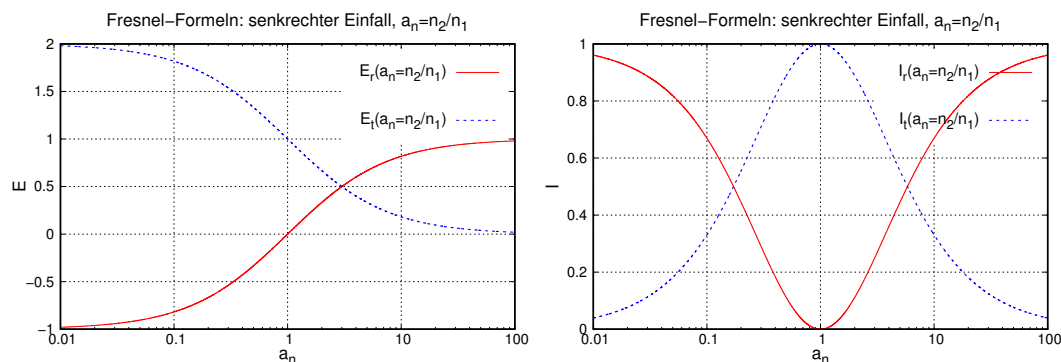


ist. Wesentlich war dabei der Faktor  $n_2/n_1$  bei der Berechnung der transmittierten Intensität. Die folgende Abbildung 6.30 zeigt das Verhalten der reflektierten und transmittierten Feldamplituden und Intensitäten als Funktion von  $a_n = n_2/n_1$ .



**Abb. 6.30.:** Feldamplituden und Intensitäten bei senkrechtem Einfall, abhängig von  $a_n = n_2/n_1$ .

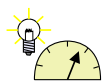
Abbildung 6.31 zeigt die gleichen Kurven in logarithmischer Darstellung.



**Abb. 6.31.:** Feldamplituden und Intensitäten bei senkrechtem Einfall, abhängig von  $a_n = n_2/n_1$ , mit logarithmischer Abszisse.

### 6.8.8. Evaneszente Wellen

**Literatur:** (Siehe Hecht, Optik [Hec05, pp. 193, 196])

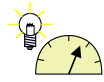


**Versuch 95: Versuch zur Vorlesung:**

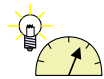
Evaneszente Wellen - tunneln mit Licht (Versuchskarte O-080)

**Versuch 96: Versuch zur Vorlesung:**

Tunneleffekt mit Mikrowellen (Versuchskarte O-079, Video)

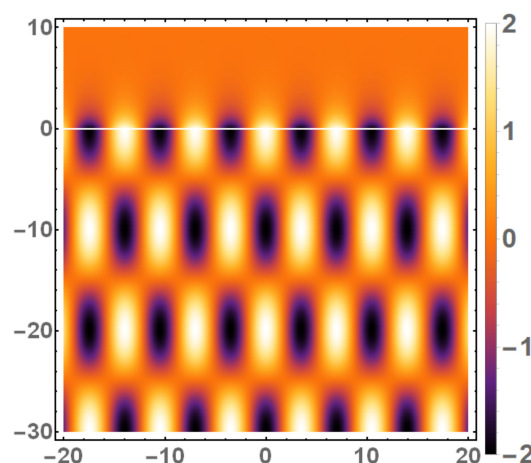
**Versuch 97: Versuch zur Vorlesung:**

Tunneleffekt mit Mikrowellen (Versuchskarte O-079, Video)

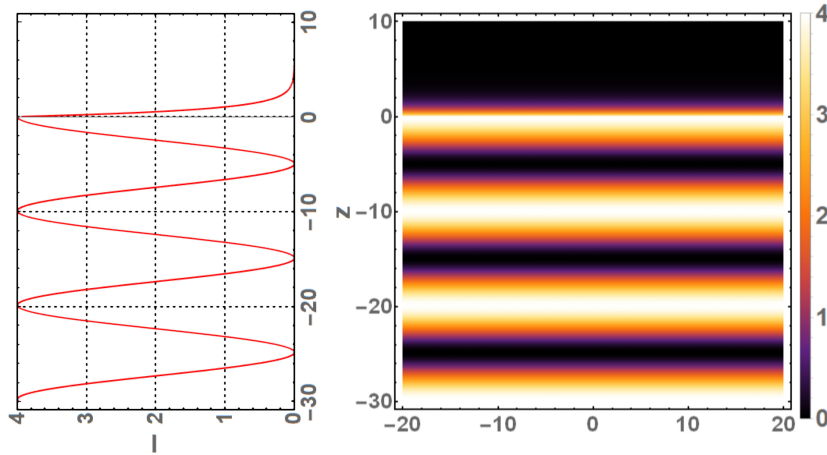
**Versuch 98: Versuch zur Vorlesung:**

Tunneleffekt mit Mikrowellen (Versuchskarte O-079, Video (VPN oder intern))

Aus den letzten Abbildungen ist ersichtlich, dass, wenn elektromagnetische Wellen aus dem langsameren Medium ( $n_1$ ) in das schnellere  $n_2 < n_1$  eintreten, es Winkel  $\gamma$  gibt ( $(n_1/n_2) \sin \alpha = \sin \gamma > 1$ ), für die es keine reelle Lösung der Fresnelschen Formeln gibt. Die Lösung ist dann in die  $z$ -Richtung rein imaginär. Was bedeutet dies? Dies heisst, dass auch die  $z$ -Komponente des  $\mathbf{k}$ -Vektor der elektromagnetischen Welle im schnelleren Medium imaginär wird. Darum wird aus  $e^{ik_z z}$  mit  $k_z = i\kappa_z$  der exponentielle Dämpfungsfaktor  $e^{-\kappa_z z}$ , wobei  $\kappa_z$  vom Einfallswinkel abhängt. Die elektromagnetischen Wellen aus dem langsameren Medium können sich im schnelleren Medium also nicht weiter in die  $z$ -Richtung bewegen: Wegen der Energieerhaltung ist die REFLEXION perfekt.



**Abb. 6.32.:** Momentaufnahme der Interferenz einer total reflektierten Welle mit sich selber sowie der evaneszenten Wellen.



**Abb. 6.33.:** Intensitätsverteilung einer total reflektierten Welle und der dazugehörigen evaneszenten Welle.

Wir suchen nun eine Beziehung zwischen dem Wellenvektor  $\mathbf{k}_t$  der transmittierten Welle und dem Wellenvektor  $\mathbf{k}_e$  der einfallenden Welle für den Fall, dass  $n_1 \sin(\alpha) \geq n_2$  ist, also dass das Snelliussche Brechungsgesetz (6.8.18) keine reelle Lösung hat.

Aus der Definition der Brechzahl  $n$  in Gleichung (6.6.1) und der Gleichung (6.8.15) folgt mit  $\lambda_{vac}$  der Vakuumwellenlänge und  $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$  der Vakuumlichtgeschwindigkeit

$$\mathbf{k} = k\mathbf{e}_k = \frac{2\pi}{\lambda}\mathbf{e}_k = \frac{2\pi}{\frac{\lambda_{vac}}{n}}\mathbf{e}_k = \frac{2\pi n}{\lambda_{vac}}\mathbf{e}_k = n\mathbf{k}_{vac} \quad (6.8.65)$$

Der Betrag der Tangentialkomponente  $\mathbf{k}_{e,tangential}$  des Wellenvektors der einfallenden Welle kann mit dem Einfallswinkel berechnet werden:

$$|\mathbf{k}_{e,tangential}| = |\mathbf{k}_e| \sin(\alpha) = n_1 k_{vac} \sin(\alpha) \quad (6.8.66)$$

Der Betrag des Wellenvektors der transmittierten Welle ist andererseits

$$|\mathbf{k}_t| = \sqrt{\mathbf{k}_{t,tangential}^2 + \mathbf{k}_{t,senkrecht}^2} = n_2 k_{vac} \quad (6.8.67)$$

Wir stellen Gleichung (6.8.67) um und isolieren  $\mathbf{k}_{t,senkrecht}^2$ , und setzen dann Gleichungen (6.8.22) und (6.8.66) ein

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{t,senkrecht}^2 &= n_2^2 k_{vac}^2 - \mathbf{k}_{t,tangential}^2 = n_2^2 k_{vac}^2 - n_1^2 k_{vac}^2 \sin^2(\alpha) \\ &= k_{vac}^2 (n_2^2 - n_1^2 \sin^2(\alpha)) \end{aligned} \quad (6.8.68)$$

Im Falle der Totalreflexion ist  $n_1 \sin(\alpha) \geq n_2$  und damit  $n_2^2 - n_1^2 \sin^2(\alpha) \leq 0$ . Damit erhalten wir für den Betrag von  $\mathbf{k}_{t,senkrecht}$

$$k_{t,senkrecht} = \pm i k_{vac} \sqrt{n_1^2 \sin^2(\alpha) - n_2^2} = i\kappa_t \quad (6.8.69)$$

Die physikalisch sinnvolle Lösung für einen unendlich ausgedehnten Halbraum mit dem Brechungsindex  $n_2$  ist die exponentiell abfallende Lösung

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_t e^{i(\mathbf{k}_{t,tangential} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} e^{-\kappa_t z} \quad (6.8.70)$$

Die resultierende Welle im Medium 2 hat dann die zeitgemittelte Intensität

$$I(x, z) = I_0 e^{-2\kappa_t z} \quad (6.8.71)$$

Wir erhalten also für die Intensität einen exponentiellen Abfall mit einer Abfalllänge

$$\ell_0 = \frac{1}{2\kappa_t} = \frac{\lambda_{vac}}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{n_1^2 \sin^2(\alpha) - n_2^2}} \quad (6.8.72)$$

Wenn eine Welle mit der Vakuumwellenlänge  $\lambda_{vac} = 500 \text{ nm}$  und dem Einfallswinkel  $\alpha = 5\pi/12 = 75^\circ$  von einem Medium mit dem Brechungsindex  $n_1 = 1.55$  in Luft  $n_2 = 1$  übertritt, ist  $\lambda_0 = 35.71 \text{ nm}$ .

## 6.9. Zusammenfassung

**Maxwellgleichungen im Vakuum** Gleichung (6.1.3)

$$\begin{array}{lll} \text{div } \mathbf{E} & = 0 & \text{I} \\ \text{rot } \mathbf{E} & = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & \text{II} \\ \text{div } \mathbf{B} & = 0 & \text{III} \\ \text{rot } \mathbf{B} & = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} & \text{IIII} \end{array}$$

**Wellengleichung für  $\mathbf{E}$**  Gleichung (6.1.7)

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -c^2 \Delta \mathbf{E}$$

**Wellengleichung für  $\mathbf{B}$**  Gleichung (6.1.8)

$$\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = -c^2 \Delta \mathbf{B}$$

**Wellenwiderstand eines Zweidrahtsystems** Gleichung (6.3.15)

$$R^* = \frac{1}{\pi} \ln \left( \frac{4a}{d} \right) \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$$

**Wellenwiderstand des Vakuums** Gleichung (6.3.16)

$$R_0^* = \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = 377 \Omega$$

**Energiefluss im Vakuum, Poynting-Vektor** Gleichung (6.4.5)

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$$

**Energiefluss in Materie, Poynting-Vektor** Gleichung (6.4.6)

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$$

**Elektrisches Strahlungsfeld eines Atoms** Gleichung (6.5.17)

$$E(r, \Theta, t) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c^2} \cdot \frac{1}{r} \cdot |a(t')| \sin \Theta = \frac{e z_0 \omega^2}{4\pi\epsilon_0 c^2} \cdot \frac{1}{r} \cdot \sin \left[ \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right] \sin \Theta$$

**Magnetisches Strahlungsfeld eines Atoms** Gleichung (6.5.18)

$$B(r, \Theta, t) = \frac{1}{c} e(r, \Theta, t)$$

**Energiefluss des Strahlungsfeldes eines Atoms** Gleichung (6.5.19)

$$S(r, \Theta, t) = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E^2(r, \Theta, t)$$

**Intensität des Strahlungsfeldes eines Atoms** Gleichung (6.5.20)

$$I(r, \Theta) = \langle S(r, \Theta, t) \rangle_t = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \frac{e^2 z_0^2 \omega^4}{(4\pi\epsilon_0 c^2)^2} \frac{\sin^2 \Theta}{2r^2}$$

**Ebene Welle** Gleichung (6.5.21)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \text{ oder } \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \text{ mit } \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{k} = 0$$

**Kugelwelle** Gleichung (6.5.23)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(r, \phi, \theta) = \frac{\hat{\mathbf{E}}_0(\phi, \theta)}{r} \cos(kr - \omega t) \text{ oder}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(r, \phi, \theta) = \frac{\hat{\mathbf{E}}_0(\phi, \theta)}{r} e^{i(kr - \omega t)} \text{ mit } \mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_0(\phi, \theta) = 0$$

**Lichtgeschwindigkeit im Medium** Gleichung (6.6.1)

$$c_m = \frac{1}{\sqrt{\mu \mu_0 \epsilon \epsilon_0}} = \frac{c}{n}$$

**Intensität, Poynting-Vektor und Richtung** Gleichung (6.6.2)

$$I_a(\mathbf{r}) = \langle |\mathbf{S}(\mathbf{r})| \rangle_t = \frac{1}{2} \mathbf{S}_0(\mathbf{r}) \cdot \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon \varepsilon_0}{\mu \mu_0}} |\mathbf{E}|^2 \cos(\angle \mathbf{S}_0, \mathbf{a}) = \frac{n \varepsilon_0 c}{2\mu} E^2 \cos(\angle \mathbf{S}_0, \mathbf{a})$$

$\mathbf{S}_0$ : Richtung des Energieflusses,  $\mathbf{a}$ : Beobachtungsrichtung

**Polarisation** Gleichung (6.7.1)

$$\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{k} = 0$$

**Tangentialvektor zu einer Ebene** Gleichung (6.8.2)

$$\mathbf{E}_{e,\text{tangential}} = \mathbf{e}_n \times \mathbf{E}_e \times \mathbf{e}_n \quad \mathbf{e}_n \text{ Normaleneinheitsvektor der Ebene}$$

**Reflexionsgesetz** Gleichung (6.8.11)

$$\alpha = \beta \quad (\text{Einfallswinkel} = \text{Ausfallswinkel})$$

**Brechungsgesetz nach Snellius** Gleichung (6.8.18)

$$n_1 \sin(\alpha) = n_2 \sin(\gamma)$$

**Fresnelsche Gleichungen für die s-Polarisation** Gleichung (6.8.27)

$$\mathfrak{E}_r = \mathfrak{E}_e \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos \alpha - \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \cos \gamma}{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos \alpha + \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \cos \gamma} \quad \mathfrak{E}_t = \mathfrak{E}_e \frac{2\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos \alpha}{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos \alpha + \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \cos \gamma}$$

Gleichung (6.8.28) (mit  $n_1 = \sqrt{\mu_1 \varepsilon_1}$  und  $n_2 = \sqrt{\mu_2 \varepsilon_2}$ )

$$\mathfrak{E}_r = \mathfrak{E}_e \frac{\frac{n_1}{\mu_1} \cos \alpha - \frac{n_2}{\mu_2} \cos \gamma}{\frac{n_1}{\mu_1} \cos \alpha + \frac{n_2}{\mu_2} \cos \gamma} \quad \mathfrak{E}_t = \mathfrak{E}_e \frac{2\frac{n_1}{\mu_1} \cos \alpha}{\frac{n_1}{\mu_1} \cos \alpha + \frac{n_2}{\mu_2} \cos \gamma}$$

**Fresnelsche Gleichungen für s-Polarisation: Amplitude** Gleichung (6.8.31)

$$\mathfrak{E}_r = -\mathfrak{E}_e \frac{\sin(\alpha - \gamma(\alpha))}{\sin(\alpha + \gamma(\alpha))} \quad \mathfrak{E}_t = \mathfrak{E}_e \frac{2 \sin \gamma(\alpha) \cos \alpha}{\sin(\alpha + \gamma(\alpha))}$$

mit  $\sqrt{\varepsilon_1} \sin \alpha = \sqrt{\varepsilon_2} \sin \gamma$  und nichtmagnetischen Materialien

**Fresnelsche Gleichungen für s-Polarisation: Intensität** Gleichung (6.8.32)

$$I_r = I_e \frac{\sin^2(\alpha - \gamma(\alpha))}{\sin^2(\alpha + \gamma(\alpha))} \quad I_t = \frac{n_2}{n_1} I_e \frac{4 \sin^2 \gamma(\alpha) \cos^2 \alpha}{\sin^2(\alpha + \gamma(\alpha))}$$

mit  $\sqrt{\varepsilon_1} \sin \alpha = \sqrt{\varepsilon_2} \sin \gamma$  und nichtmagnetischen Materialien

**Fresnelsche Gleichungen für die p-Polarisation** Gleichung (6.8.39)

$$\mathfrak{E}_r = \mathfrak{E}_e \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \cos \alpha - \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos \gamma}{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos \gamma + \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \cos \alpha} \quad \mathfrak{E}_t = \mathfrak{E}_e \frac{2\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos \alpha}{\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \cos \alpha + \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos \gamma}$$

Gleichung (6.8.40) (mit  $n_1 = \sqrt{\mu_1 \varepsilon_1}$  und  $n_2 = \sqrt{\mu_2 \varepsilon_2}$ )

$$\mathfrak{E}_r = \mathfrak{E}_e \frac{\frac{n_2}{\mu_2} \cos \alpha - \frac{n_1}{\mu_1} \cos \gamma}{\frac{n_1}{\mu_1} \cos \gamma + \frac{n_2}{\mu_2} \cos \alpha} \quad \mathfrak{E}_t = \mathfrak{E}_e \frac{2\frac{n_1}{\mu_1} \cos \alpha}{\frac{n_2}{\mu_2} \cos \alpha + \frac{n_1}{\mu_1} \cos \gamma}$$

**Fresnelsche Gleichungen für p-Polarisation: Amplitude** Gleichung (6.8.44)

$$\mathfrak{E}_r = \mathfrak{E}_e \frac{\tan[\alpha - \gamma(\alpha)]}{\tan[\alpha + \gamma(\alpha)]} \quad \mathfrak{E}_t = \mathfrak{E}_e \frac{2 \sin \gamma(\alpha) \cos \alpha}{\sin[\alpha + \gamma(\alpha)] \cos[\alpha - \gamma(\alpha)]}$$

mit  $\sqrt{\varepsilon_1} \sin \alpha = \sqrt{\varepsilon_2} \sin \gamma$  und nichtmagnetischen Materialien

**Fresnelsche Gleichungen für p-Polarisation: Intensität** Gleichung (6.8.45)

$$I_r = I_e \frac{\tan^2[\alpha - \gamma(\alpha)]}{\tan^2[\alpha + \gamma(\alpha)]} \quad I_t = \frac{n_2}{n_1} I_e \frac{4 \sin^2 \gamma(\alpha) \cos^2 \alpha}{\sin^2[\alpha + \gamma(\alpha)] \cos^2[\alpha - \gamma(\alpha)]}$$

mit  $\sqrt{\varepsilon_1} \sin \alpha = \sqrt{\varepsilon_2} \sin \gamma$  und nichtmagnetischen Materialien

**Reflexion bei senkrechtem Einfall (polarisationsunabhängig)** Gleichung (6.8.48a)

$$\mathfrak{E}_r = -\mathfrak{E}_e \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}$$

**Transmission bei senkrechtem Einfall (polarisationsunabhängig)** Gleichung (6.8.48b)

$$\mathfrak{E}_t = \mathfrak{E}_e \frac{2n_1}{n_2 + n_1}$$

**Brewster-Winkel** Gleichungen (6.8.52) und (6.8.53)

$$\alpha_{\text{Brewster}} + \gamma(\alpha_{\text{Brewster}}) = \pi/2 \iff \alpha_{\text{Brewster}} = \arctan\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$$

**Evaneszente Welle** im Medium mit dem kleineren  $n$ . Gleichung (6.8.70)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathfrak{E}_t e^{i(\mathbf{k}_{t, \text{tangential}} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} e^{-\kappa_t z}$$

**Evaneszente Welle** im Medium mit dem kleineren  $n$ . Gleichung (6.8.71)

$$I(x, z) = I_0 e^{-2\kappa_t z}$$

**Abfalllänge der evaneszenten Welle** Gleichung (6.8.72)

$$\ell_0 = \frac{1}{2\kappa_t} = \frac{\lambda_{vac}}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{n_1^2 \sin^2(\alpha) - n_2^2}}$$



# A. Literaturhinweise

Den Stoff der Vorlesung finden Sie in ähnlicher Form in den Werken von Giancoli „Physik“[[Gia06](#)], Gerthsen/Meschede „Physik“[[Mes06](#)], Tipler „Physik“[[TM04](#)], Leisi „Klassische Physik“[[Lei98](#)], Alonso-Finn „Physik“[[AF00](#)] und, als leichtere Einführung im Buch von Halliday „Physik“[[HRW03](#)].

Eine gut strukturierte (und leicht tragbare Übersicht bieten Lindström/Langkau „Physik kompakt: Elektrodynamik“[[LL96](#)] und Langkau/Lindström/Scobel „Physik kompakt: Elektromagnetische Wellen“[[LLS96](#)].

Zusätzliche Übungsaufgaben finden Sie in „Tutorien zur Physik“[[MS09](#)] oder im „Prüfungstrainer Physik“[[Tur07](#)]. Zum Aufarbeiten des gelernten Stoffes (nicht als Einsteigerliteratur) kann auch Kneubühls[[Kne78](#)] „Repetitorium der Physik“ empfohlen werden. Mathematische Probleme und Formeln sind sehr schön im Bronstein[[Bro+08](#)] zusammengefasst. Arfken/Weber „Mathematical methods for Physicists“[[AW95](#)] und sowie Weltner „Mathematik für Physiker“[[Wel94](#)] können beim Bewältigen von mathematischen Problemen helfen.

Dieses Skript gibt es auch als [PDF-Datei](#) und als [Web-Site](#).

Unter [Applets von Walter Fendt](#) können Sie einige Gesetze der Elektrizitätslehre selber ausprobieren.

Eine wunderbare Website zum Aufarbeiten Ihres Wissens ist [Hyperphysics](#) von R. Nave. Ergänzend gibt es vom gleichen Autor auch [Hypermath](#).

Historische wissenschaftliche Arbeiten bieten oftmals einen guten Einblick in die Gedanken hinter den physikalischen Gesetzen. Dazu gehören die Arbeiten von Michael Faraday [[Faraday01011856](#); [Far32a](#); [Far32b](#); [Far33b](#); [Far33a](#); [Far33c](#); [Far34a](#); [Far34b](#); [Far34c](#); [Far35a](#); [Far35b](#); [Far38b](#); [Far38a](#); [Far38a](#); [Far38a](#); [Far38a](#); [Far38a](#); [Far39](#); [Far40](#); [Far40](#); [Far43](#); [Far46](#); [Far46](#); [Far46](#); [Far49a](#); [Far49b](#); [Far50](#); [Far51b](#); [Far51c](#); [Far51a](#); [Far51a](#); [Far52a](#); [Far52b](#)], James Clerk Maxwell [[Max65](#); [Max73](#)] und anderen.



## B. Begriffe

Symbol	Name	Einheit	Bemerkungen
$\langle f \rangle$	Mittelung über $f$	—	
$\alpha$	atomare Polarisierbarkeit	$\frac{C^2 \text{ m}}{N} = \frac{C \text{ m}^2}{V} = \frac{F \text{ m}^2}{V} = \frac{A \text{ s m}^2}{V}$	
$\alpha$	Winkel (z.B. zwischen Geschwindigkeit und der Oberflächennormalen der Referenzfläche)	1	
$a$	Abstand einer Ladung zur Oberfläche, Radius	m	
$a$	Dicke eines Dielektrikums	m	
$a$	Länge einer Leiterschleife in einem Motor	m	
$da$	Oberflächenelement in Integralen	$\text{m}^2$	
$\mathbf{a}$	Beschleunigung	$\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \frac{N}{\text{kg}}$	
$A$	Fläche	$\text{m}^2$	
$A$	Fläche des Plattenkondensators	$\text{m}^2$	
$\mathbf{A}$	Vektorpotential	$\frac{T \text{ m}}{A} = \frac{N}{A} = \frac{\frac{m \text{ kg}}{A \text{ s}^2}}{A} = \frac{V \text{ s}}{m}$	
$\beta$	reduzierte Geschwindigkeit	1	da $\beta = \frac{v}{c}$
$b$	Breite eines Dielektrikums	m	
$b$	Breite einer Leiterschleife in einem Motor	m	
$h$	Breite des Leiters in einer Hall-Anordnung	m	
$\mathbf{B}$	magnetische Induktion	$\frac{T}{A} = \frac{\frac{N}{A \text{ m}}}{A} = \frac{\frac{kg}{A \text{ s}^2}}{A} = \frac{V \text{ s}}{m^2}$	
$c$	Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	$\frac{m}{s}$	Wert (Definition): $c = 299\,792\,458 \frac{m}{s}$
$C$	Kapazität	$F = \frac{C}{V} = \frac{A \text{ s}}{V} = \frac{J}{V^2} = \frac{C^2}{J}$	

Symbol	Name	Einheit	Bemerkungen
$C$	Curie-Konstante	$\frac{\text{A K}}{\text{T m K}} = \frac{\text{A}^2 \text{ K}}{\text{N}} =$	
$c_{ij}$	Kapazität zwischen den Körpern $i$ und $j$	$\frac{\text{F}}{\text{V s}}$	
$\delta(t)$	Delta-Funktion für die Zeit	$\frac{1}{\text{s}}$	
$\delta(x)$	Delta-Funktion für den Ort	$\frac{1}{\text{m}}$	
$\delta x$	Längenelement	m	andere Schreibweise zu $dx$
$\Delta$	Laplace-Operator	$\frac{1}{\text{m}^2}$	$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$
$d\mathbf{A}$	Flächenelement	$\text{m}^2$	
$d$	Abstand	m	
$d$	Abstand der Platten im Plattenkondensator	m	
div	Divergenz-Operator	$\frac{1}{\text{m}}$	$\text{div } \mathbf{f} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z}$
$\mathbf{D}$	Dielektrische Verschiebung	$\frac{\text{C}}{\text{m}^2} = \frac{\text{V}}{\text{N m}} =$	
$e$	Elementarladung	C	Wert (Definition): $e = 1.602\,176\,634 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
$e$	Basis des natürlichen Logarithmus	1	$e = 2.7182818284590$
$\varepsilon$	relative Permittivität	1	Im Allgemeinen ist $\varepsilon$ ein TENSOR. (heisst auch relative Dielektrizitätskonstante)
$\varepsilon_0$	Permittivität des Vakuums	$\frac{\text{C}^2}{\text{N J m}^2} = \frac{\text{C}}{\text{V m}} =$	$\epsilon_0 = 8.854\,187\,812\,8(13) \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N m}^2}$
$\mathbf{E}(\mathbf{r})$	elektrisches Feld	$\frac{\text{N}}{\text{C}} = \frac{\text{V}}{\text{m}}$	
$\mathbf{E}_{\text{lokal}}$	lokales elektrisches Feld	$\frac{\text{N}}{\text{C}} = \frac{\text{V}}{\text{m}}$	
$E_0$	elektrisches Feld ohne Dielektrikum	$\frac{\text{N}}{\text{C}} = \frac{\text{V}}{\text{m}}$	Verwendet bei Berechnungen mit dielektrischen Materialien
$E_{\text{pot}}$	potentielle Energie	J = N m	
$E_t$	spezifische Haftenergie	$\frac{\text{J}}{\text{m}^2}$	

Symbol	Name	Einheit	Bemerkungen
$\phi$	eine der Koordinaten bei Kugelkoordinaten	1	Winkel gemessen von der $x$ -Achse in der $xy$ -Ebene (Längengrad)
$\varphi$	elektrostatistisches Potential	$\frac{\text{J}}{\text{C}} = \text{V}$	
$\varphi$	Phase	1	
$\Phi$	Fluss eines Vektorfeldes $\mathbf{F}$	$\text{N m}^2$	Einheit hängt von der Einheit des VEKTORFELDES ab
$\Phi_B$	magnetischer Fluss	$\text{Wb} = \text{T m}^2 = \frac{\text{N m}}{\text{A}} = \frac{\text{kg m}^2}{\text{A s}^2} = \text{V s}$	
$f(x)$	Funktion	–	$x$ ist ein Platzhalter
$\mathbf{F}$	Kraft	N	
$\mathbf{F}_L$	Lorentzkraft	N	
$F_M$	magnetische Kraft	N	
$\mathbf{F}_V$	Kraftdichte	$\frac{\text{N}}{\text{m}^3}$	$\mathbf{F}_V = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}_V}{\Delta V}$
$\gamma$	relativistischer Korrekturfaktor	1	$\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$
<b>grad</b>	Gradienten-Operator	$\frac{1}{\text{m}}$	$\mathbf{grad} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$
$G$	Leitwert	$\text{S} = \frac{\text{A}}{\text{V}} = \frac{1}{\Omega}$	
$G$	Gravitationskonstante	$\frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}$	Wert: $G = 6.674\,30(15) \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}$
$h$	Höhe der Mantelfläche	m	
$h$	Höhe des Leiters in einer Hall-Anordnung	m	
$h$	Plancksches Wirkungsquantum	J s	$h = 6.63 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$
$\hbar$	reduziertes Plancksches Wirkungsquantum	$J\text{s}$	$\hbar \approx 10^{-34} J\text{s}$
$H$	Magnetfeld	$\frac{\text{A}}{\text{m}}$	
$i$	Stromdichte	$\frac{\text{A}}{\text{m}^2}$	
$I$	Strom	A	
$I_{eff}$	effektiver Strom	A	

Symbol	Name	Einheit	Bemerkungen
$I_{rms}$	RMS-Strom	A	Leistungsgewichteter Strom, «Root Mean Square »-Strom
$j$	lineare Stromdichte	$\frac{A}{m}$	$j = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{I(\Delta y)}{\Delta y}$
$k$	Federkonstante	$\frac{N}{m}$	
$k$	beliebige, auch komplexe Zahl	1	
$k_B$	Boltzmann-Konstante	$\frac{J}{K}$	
$K$	Vorfaktor	1	
$\lambda$	mittlere freie Weglänge	m	
$\lambda$	Linienladungsdichte	$\frac{C}{m}$	
$\ell$	Abstand von $-q$ zu $+q$ im Dipol	m	
$\ell$	Drehimpuls	$\frac{m^2 kg}{s}$	
$L$	Länge	m	
$L$	Selbstinduktion oder Selbstinduktivität einer Spule	$H = \frac{Wb}{A} = \frac{Tm^2}{A} = \frac{Nm}{A^2} = \frac{kgm^2}{A^2 s^2} = \frac{Vs}{A} = \Omega s$	
$\mu_0$	Induktionskonstante	$\frac{Ns^2}{C^2} = \frac{N}{A^2} = \frac{H}{m}$	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{N}{A^2}$
$m$	Masse	kg	
$\mathbf{m}$	magnetisches Moment	$Am^2$	
$m_z$	magnetisches Moment in $z$ -Richtung	$Am^2$	
$M$	Gesamtmasse aller Ionen	kg	
$M_{12}$	Gegeninduktivität zwischen zwei Spulen	$H = \frac{Wb}{A} = \frac{Tm^2}{A} = \frac{Nm}{A^2} = \frac{kgm^2}{A^2 s^2} = \frac{Vs}{A} = \Omega s$	
$M_{Mol}$	Molmasse	$\frac{kg}{Mol}$	
$\mathbf{M}$	makroskopische Magnetisierung	$\frac{A}{m}$	
$\nu$	Frequenz	$Hz = \frac{1}{s}$	
$n$	Ladungsträgerdichte	$\frac{1}{m^2}$	
$n$	spezifische Windungszahl einer Spule	$\frac{1}{m}$	$n = \frac{N}{\ell}$

Symbol	Name	Einheit	Bemerkungen
$\mathbf{n}$	Normalenvektor auf ein Flächenelement	1	
$N$	Dichte der induzierten Dipole	$\frac{1}{m^3}$	
$N$	Windungszahl einer Spule	1	
$N_A$	Avogadrozahl	$\frac{1}{\text{Mol}}$	$N_A = 6.02 \times 10^{23} \frac{1}{\text{Mol}}$
$\mathbf{p}$	Dipolmoment	$\text{Cm}$	
$\mathbf{p}$	Impuls (mechanisch)	$\frac{\text{kgm}}{\text{s}} = \text{Ns}$	
$\mathbf{p}_{\text{ind}}$	induziertes Dipolmoment	$\text{Cm} = \text{Asm} = \frac{\text{Nm}^2}{\text{V}}$	
$P$	Leistung	$W = \frac{J}{s} = \frac{\text{Nm}}{s} = \frac{\text{m}^2 \text{kg}}{\text{s}^3}$	z.B. Verlustleistung am WIDERSTAND
$\mathbf{P}$	Polarisation	$\frac{\text{C}}{\text{m}^2} = \frac{\text{As}}{\text{m}^2} = \frac{\text{N}}{\text{Vm}}$	
$P_M$	Leistung des Motors	$W = \frac{\text{Nm}}{s} = \frac{\text{m}^2 \text{kg}}{\text{s}^3}$	
$q$	Ladung	$C = \text{As} = \frac{\text{Nm}}{\text{V}}$	
$Q$	Ladung	$C = \text{As} = \frac{\text{Nm}}{\text{V}}$	andere Schreibweise für $q$
$\rho$	Massedichte	$\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$	
$\rho_{\text{el}}$	elektrische Ladungsdichte	$\frac{C}{\text{m}^3} = \frac{\text{Pa}}{\text{V}}$	Siehe auch Gleichung (2.2.4)
$\rho$	SPEZIFISCHER WIDERSTAND	$\Omega \text{m} = \frac{\text{Vm}}{\text{A}} = \frac{\text{m}}{\text{S}}$	
$\rho$	Abstand	m	
$\mathbf{r}$	Abstand, Ortsvektor	m	
$r_0$	Referenzradius	m	
<b>rot</b>	Rotations-Operator	$\frac{1}{\text{m}}$	$\mathbf{rot} \mathbf{f} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_y}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial y} \\ \frac{\partial f_z}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial z} \\ \frac{\partial f_x}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial x} \end{pmatrix}$
$R$	Widerstand	$\Omega = \frac{\text{V}}{\text{A}}$	
$R^*$	Wellenwiderstand	$\Omega = \frac{\text{V}}{\text{A}}$	
$R$	Radius	m	

Symbol	Name	Einheit	Bemerkungen
$\sigma$	Oberflächenladungsdichte	$\frac{\text{C}}{\text{m}^2}$	
$\sigma$	Influenzladungsdichte an der Oberfläche	$\frac{\text{C}}{\text{m}^2}$	
$\sigma$	(spezifische) Leitfähigkeit	$\frac{\text{S}}{\text{m}} = \frac{\text{A}}{\text{V m}} = \frac{1}{\Omega \text{ m}}$	Im Allgemeinen ist die Leitfähigkeit ein TENSOR
$\sigma_{Maxwell}$	Maxwellspannung (mechanische Spannung)	$\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$	$\sigma_{Maxwell} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta A}$
$s$	Schlaufe, ein Weg	m	
$\mathbf{s}$	Spin	J s	
$d\mathbf{s}$	Längenelement	m	
$S$	Bezugssystem für relativistische Rechnung	—	
$S'$	Bezugssystem für relativistische Rechnung	—	
$S^+$	Bezugssystem für relativistische Rechnung	—	
$S^-$	Bezugssystem für relativistische Rechnung	—	
$\mathbf{S}$	Poynting-Vektor	$\frac{\text{J}}{\text{m}^2} = \frac{\text{N}}{\text{m s}}$	
$\Theta$	eine der Koordinaten bei Kugelkoordinaten	1	Winkel gemessen von der $z$ -Achse (Breitengrad, von Norden gemessen)
$\tau$	Mittlere Zeit zwischen zwei Stößen, Relaxationszeit	s	
$\tau$	Abklingzeitkonstante eines $RC$ -Gliedes	s	
$\tau$	Zeit unter Integralen	s	
$t$	Zeit	s	
$\Delta t$	kleine Zeitdifferenz	s	
$\mathbf{T}$	Drehmoment	N m	
$T$	Periodendauer einer periodischen Grösse	s	
$T$	Temperatur	K	
$U$	SPANNUNG, auch elektrostatisches Potential	$\frac{\text{J}}{\text{C}} = \text{V}$	
$U_{grav}$	Gravitationspotential	$\frac{\text{J}}{\text{kg}} = \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$	



Symbol	Name	Einheit	Bemerkungen
$U_C$	Spannung am Kondensator	$V = \frac{N \cdot m \cdot s}{A}$	
$U_{eff}$	effektive Spannung	V	
$U_{rms}$	RMS-Spannung	V	Leistungsgewichtete Spannung, «Root Mean Square»-Spannung
$U_{EMK}$	elektromotorische Kraft	$V = \frac{N \cdot m \cdot s}{A}$	
$U_{Hall}$	Hallspannung	$V = \frac{N \cdot m \cdot s}{A}$	
$U_R$	Spannung am WIDERSTAND	$V = \frac{Nm}{As}$	
$\mathbf{v}_j$	Geschwindigkeit des $j$ -ten Ladungsträgers	$\frac{m}{s}$	
$v_s$	Abziehgeschwindigkeit Klebestreifen	$\frac{m}{s}$	
$\mathbf{V}$	Hilfsvektorpotential	T m = „newton/A = $\frac{m \cdot kg}{A \cdot s^2}$	
$dV$	Volumenelement	$m^3$	
$\omega$	Kreisfrequenz	$\frac{1}{s}$	$\omega = 2\pi\nu$
$\Omega$	Larmorwinkelgeschwindigkeit	$\frac{1}{s}$	
$w_{el}$	elektrische Energiedichte	$\frac{J}{m^3} = \frac{N}{m^2}$	
$w_B$	Energiedichte des Magnetfeldes	$\frac{J}{m^3} = \frac{N}{m^2}$	
$W$	Arbeit	J = N m	
$W_{el}$	elektrische Arbeit	J = N m	
$W_{mech}$	mechanische Arbeit	J = N m	
$W_{Batt}$	Arbeit der Batterie	J = N m	
$\xi$	Ersatz für $x$ in Integralen	m	
$\chi$	magnetische Suszeptibilität	1	Im Allgemeinen ist $\chi$ ein TENSOR
$\chi_e$	dielektrische Suszeptibilität	1	Im Allgemeinen ist $\chi_e$ ein TENSOR
$\mathbf{x}$	Ortsvektor	m	
$x$	Koordinate im kartesischen Koordinatensystem	m	

Symbol	Name	Einheit	Bemerkungen
$X_C$	Impedanz der Kapazität oder KAPAZITIVER WI- DERSTAND	$\Omega$	
$X_L$	Impedanz der Spu- le oder INDUKTIVER WIDERSTAND	$\Omega$	
$y$	Koordinate im karte- sischen Koordinatensys- tem	m	
$z$	Koordinate im karte- sischen Koordinatensys- tem	m	
$Z$	Kernladungszahl	1	

# C. Mathematische Sätze

## C.1. Ableitung

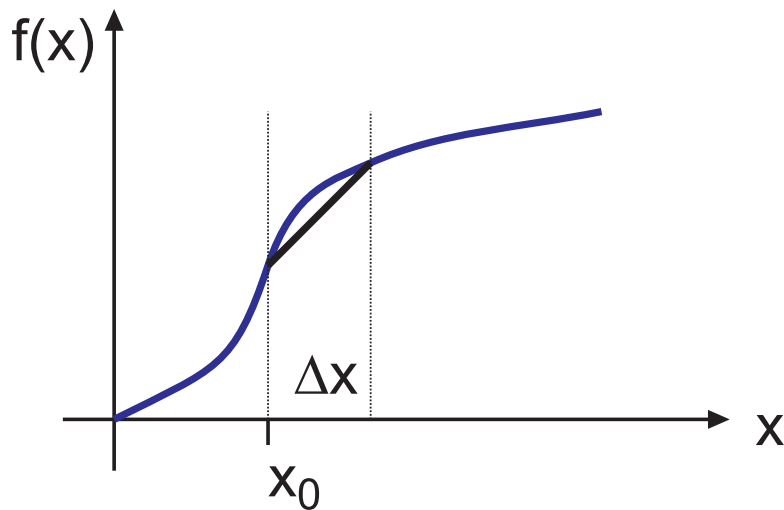


Abb. C.1.: Berechnung der Ableitung

---

d.h. die Steigung einer Kurve oder die Änderung finden

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (\text{C.1.1})$$

Gesetze beim Ableiten:

$$\frac{d}{dx} (f(x) \cdot g(x)) = \left( \frac{d}{dx} f(x) \right) \cdot g(x) + f(x) \left( \frac{d}{dx} g(x) \right) \quad (\text{C.1.2})$$

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = \left( \frac{d}{du} f(u) \right) \frac{dg(x)}{dx} \text{ mit } u = g(x) \quad (\text{C.1.3})$$

s

---

$f(x)$	$f'(x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$e^x$	$e^x$

Tab. C.1.: Beispiele für Ableitungen

## C.2. Differentiationsregeln

Einige Differentiationsregeln sind

---

Definition der Ableitung	$u = f(t)$	$u' = \frac{du}{dt} = f'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$
Partielle Ableitung	$u = f(x, y, z, \dots, t)$	$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x, y, z, \dots, t) - f(x, y, z, \dots, t)}{\Delta x}$
Andere Schreibweise	$u = f(t)$	$\frac{du}{dt} = \frac{d}{dt}u = \frac{d}{dt}f(t)$
Konstanter Faktor	$u = f(x), c = \text{const}$	$\frac{dcu}{dx} = c \frac{du}{dx}$
Summenregel	$u = f(t), v = g(t)$	$\frac{d(u+v)}{dt} = \frac{du}{dt} + \frac{dv}{dt}$
Produktregel	$u = f(t), v = g(t)$	$\frac{d(uv)}{dt} = u \frac{dv}{dt} + v \frac{du}{dt}$
Bruch	$u = f(t), v = g(t)$	$\frac{d}{dt} \left( \frac{u}{v} \right) = \frac{v \frac{du}{dt} - u \frac{dv}{dt}}{v^2}$
Kettenregel	$u = f(v), v = g(t)$	$\frac{df(g(t))}{dt} = \frac{df(v)}{dv} \frac{dv}{dt} = \frac{df(v)}{dv} \frac{dg(t)}{dt}$
logarithmische Ableitung	$u = f(x)$	$\frac{d \ln u}{dx} = \frac{\frac{dy}{dx}}{y}$

Tab. C.2.: Differentiationsregeln

## C.3. Differentiation einfacher Funktionen

Funktion	n-te Ableitung
$x^m$	$m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)x^{m-n}$ bei ganzzahligem $m$ und $n$ und $m > n$ ist die $n$ -te Ableitung null
$\ln x$	$(-1)^{n-1}(n-1)! x^{-n}$
$\log_a(x)$	$(-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{\ln a} x^{-n}$
$e^{kx}$	$k^n e^{kx}$
$a^{kx}$	$(k \ln a)^n a^{kx}$
$\sin(kx)$	$k^n \sin\left(kx + \frac{n\pi}{2}\right)$
$\cos(kx)$	$k^n \cos\left(kx + \frac{n\pi}{2}\right)$

**Tab. C.3.:** Ableitung einiger Funktionen

**Beispiel:**

$$y = (5x^2 - 3x + 2)^{6x}$$

soll differenziert werden. Wir verwenden die logarithmische Ableitung.

$$\ln(y) = 6x \ln(5x^2 - 3x + 2) \quad \left| \frac{d}{dx} \right.$$

$$\frac{d}{dx}(\ln(y)) = \frac{d}{dx} \left( 6x \ln(5x^2 - 3x + 2) \right) \quad \left| \text{ableiten, Produktregel rechts} \right.$$

$$\frac{y'}{y} = 6 \ln(5x^2 - 3x + 2) + 6x \frac{d \ln(5x^2 - 3x + 2)}{dx} \quad \left| \text{Kettenregel ganz rechts} \right.$$

$$\frac{y'}{y} = 6 \ln(5x^2 - 3x + 2) + 6x \frac{1}{5x^2 - 3x + 2} \frac{d(5x^2 - 3x + 2)}{dx}$$

$$\frac{y'}{y} = 6 \ln(5x^2 - 3x + 2) + 6x \frac{1}{5x^2 - 3x + 2} (10x - 3) \quad \left| * y \right.$$

$$\frac{dy}{dx} = y' = 6y \ln(5x^2 - 3x + 2) + 6yx \frac{10x - 3}{5x^2 - 3x + 2} \quad \left| y \text{ einsetzen} \right.$$

$$y' = 6(5x^2 - 3x + 2)^{6x} \ln(5x^2 - 3x + 2) + 6(5x^2 - 3x + 2)^{6x} x \frac{10x - 3}{5x^2 - 3x + 2}$$

$$y' = 6(5x^2 - 3x + 2)^{6x} \left[ \ln(5x^2 - 3x + 2) + \frac{10x - 3}{5x^2 - 3x + 2} \right]$$

## C.4. Taylorreihe und Reihen

Definition

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \dots$$

andere Schreibweise

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \frac{\Delta x}{1!} f'(x) + \frac{(\Delta x)^2}{2!} f''(x) + \dots + \frac{(\Delta x)^n}{n!} f^{(n)}(x) + \dots$$

Beispiel

$$\begin{aligned} f(x + \Delta x) &= \sin(x + \Delta x) \\ &= \sin(x) + \frac{\Delta x}{1!} \cos(x) + \frac{(\Delta x)^2}{2!} f''(x) + \dots \\ &\quad + (-1)^n \frac{(\Delta x)^{2n}}{(2n)!} \sin(x) + \dots + (-1)^n \frac{(\Delta x)^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos(x) + \dots \end{aligned}$$

Spezialfall:  $x = 0$

$$\sin(\Delta x) = \Delta x - \frac{1}{3!} (\Delta x)^3 + \frac{1}{5!} (\Delta x)^5 + \dots + (-1)^n \frac{(\Delta x)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

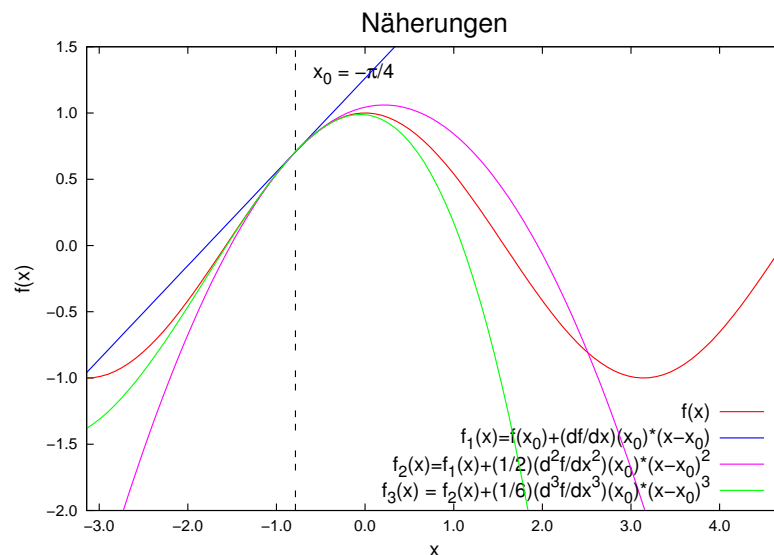
## C.5. Einige Reihen

Funktion	Potenzreihe	Konvergenz
$(1 \pm x)^m$	$1 \pm mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 \pm \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \dots$ $+ (\pm 1)^n \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \dots$	$ x  \leq 1$
$\sin(x + \Delta x)$	$\sin(x) + \frac{\Delta x}{1!}\cos(x) + \frac{(\Delta x)^2}{2!}f''(x) + \dots$ $+ \frac{(\Delta x)^n}{(n)!}\sin(x + \frac{\pi n}{2}) + \dots$	$ \Delta x  < \infty$
$\cos(x + \Delta x)$	$\cos(x) - \Delta x \sin(x) - \frac{\Delta x^2 \cos(x)}{2!} + \frac{\Delta x^3 \sin(x)}{3!}$ $+ \frac{\Delta x^4 \cos(x)}{4!} - \dots + \frac{\Delta x^n \cos(x + \frac{\pi n}{2})}{n!} \pm \dots$	$ \Delta x  < \infty$
$\tan x$	$x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 \dots$	$ x  < \frac{\pi}{2}$
$\cot x$	$\frac{1}{x} - \left[ \frac{x}{3} + \frac{x^3}{45} + \frac{2x^5}{945} + \frac{x^7}{4725} \dots \right]$	$0 <  x  < \pi$
$e^x$	$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$	$ x  < \infty$
$a^x = e^{x \ln a}$	$1 + \frac{x \ln a}{1!} + \frac{(x \ln a)^2}{2!} + \frac{(x \ln a)^3}{3!} + \frac{(x \ln a)^4}{4!} + \dots$	$ x  < \infty$
$\ln x$	$2 \left[ \frac{x-1}{x+1} + \frac{(x-1)^3}{3(x+1)^3} + \frac{(x-1)^5}{5(x+1)^5} + \dots \right]$ $+ \frac{(x-1)^{2n+1}}{(2n+1)(x+1)^{2n+1}} + \dots$	$x > 0$
$\ln x$	$(x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} + \dots$ $+ (-1)^{n+1} \frac{(x-1)^n}{n} + \dots$	$0 < x \leq 2$
$\ln x$	$\frac{x-1}{x} + \frac{1}{2} \left( \frac{x-1}{x} \right)^2 + \frac{1}{3} \left( \frac{x-1}{x} \right)^3 + \dots$ $+ \frac{1}{n} \left( \frac{x-1}{x} \right)^n + \dots$	$x > \frac{1}{2}$
$\ln(1+x)$	$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$ $+ (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \dots$	$-1 < x \leq 1$
$\arcsin x$	$x + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \dots$	$ x  < 1$
$\arccos x$	$\frac{\pi}{2} - \left[ x + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \dots \right]$	$ x  < 1$
$\arctan x$	$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$	$ x  < 1$

Tab. C.4.: Reihenentwicklungen

## C.6. Ableitungen zur näherungsweisen Berechnung von Funktionswerten

Eine allgemeine Funktion  $f(x)$ , die genügend oft stetig differenzierbar ist, soll in der Nähe des Wertes  $x_0$  angenähert werden (Siehe auch die Ausführungen über Taylorreihen in C.4).



**Abb. C.2.:** Approximationen der Funktion  $f(x) = \cos(x)$  mit dem Grad 1, 2 und 3.

Abbildung C.2 zeigt, wie die Funktion  $\cos(x)$  an der Stelle  $x_0 = -\pi/4$  angenähert wird. Die Funktion und die ersten drei Ableitungen sind

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos(x) & \frac{d}{dx}f(x) &= -\sin(x) \\ \frac{d^2}{dx^2}f(x) &= -\cos(x) & \frac{d^3}{dx^3}f(x) &= \sin(x) \end{aligned} \quad (\text{C.6.1})$$

In nullter Näherung würde man sagen, dass  $\cos(x) = 1/\sqrt{2} + O(1)$  ist in der Umgebung von  $x_0 = -\pi/4$ . Das Symbol  $O(1)$  bedeutet, dass Terme von  $x$  mit dem Exponenten grösser oder gleich 1 vernachlässigt wurden.

In erster oder linearer Näherung hätten wir  $\cos(x) = 1/\sqrt{2} - 1/\sqrt{2}(x - (-\pi/4)) + O(2) = 1/\sqrt{2}(1 - (x + \pi/4)) + O(2)$ . Hier sind Terme mit dem Exponenten 2 oder mehr vernachlässigt worden.

Die nächste Näherung, die 2., nimmt auch die quadratischen oder paraboloiden Anteile mit. Hier wäre  $\cos(x) = 1/\sqrt{2} - 1/\sqrt{2}(x - (-\pi/4)) - 1/\sqrt{2}(x - (-\pi/4))^2 + O(3) = 1/\sqrt{2}(1 - (x + \pi/4) - (x + \pi/4)^2) + O(3)$ .

Allgemein sind die verschiedenen Approximationen



$$f(x_0 + \Delta x) \approx f_0(\Delta x) = f(x_0) + O(1) \quad (\text{C.6.2})$$

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f_1(\Delta x) = f(x_0) + \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0} \Delta x + O(2)$$

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f_2(\Delta x) = f(x_0) + \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0} \Delta x + \left. \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \right|_{x=x_0} \frac{\Delta x^2}{2} + O(3)$$

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f_3(\Delta x) = f(x_0) + \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0} \Delta x + \left. \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \right|_{x=x_0} \frac{\Delta x^2}{2} + \left. \frac{d^3 f(x)}{dx^3} \right|_{x=x_0} \frac{\Delta x^3}{6} + O(4)$$

Mit  $x = x_0 + \Delta x$  lauten die Gleichungen

$$f(x) \approx f_0(x) = f(x_0) + O(1) \quad (\text{C.6.3})$$

$$f(x) \approx f_1(x) = f(x_0) + \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0} (x - x_0) + O(2)$$

$$f(x) \approx f_2(x) = f(x_0) + \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0} (x - x_0) + \left. \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \right|_{x=x_0} \frac{(x - x_0)^2}{2} + O(3)$$

$$f(x) \approx f_3(x) = f(x_0) + \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0} (x - x_0) + \left. \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \right|_{x=x_0} \frac{(x - x_0)^2}{2} + \left. \frac{d^3 f(x)}{dx^3} \right|_{x=x_0} \frac{(x - x_0)^3}{6} + O(4)$$

oder allgemein

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left. \frac{d^j f(x)}{dx^j} \right|_{x=x_0} (x - x_0)^j \quad (\text{C.6.4})$$

Dabei ist  $j! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot j$  die FAKULTÄT von  $j$ , Per Definition ist  $0! = 1$ . Die nullte-Ableitung ist einfach die Funktion selber.

Als Beispiel betrachten wir  $\cos(x)$  an der Stelle  $x_0 = -\pi/4$ . Wir haben

$$\begin{aligned} f(-\pi/4) &= \frac{1}{\sqrt{2}} & \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=-\pi/4} &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \left. \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \right|_{x=-\pi/4} &= -\frac{1}{\sqrt{2}} & \left. \frac{d^3 f(x)}{dx^3} \right|_{x=-\pi/4} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned} \quad (\text{C.6.5})$$

und

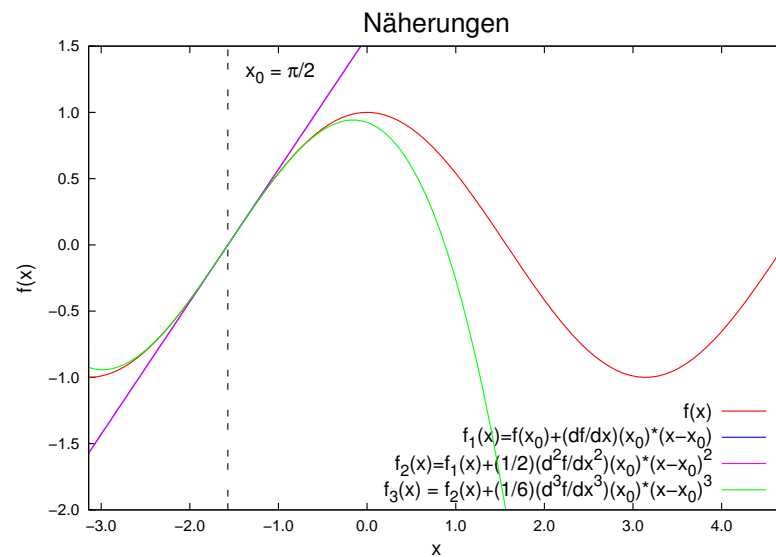
$$f(x) \approx f_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} + O(1) \quad (\text{C.6.6})$$

$$f(x) \approx f_1(x) = f(-\pi/4) + \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=-\pi/4} (x + \pi/4) + O(2)$$

$$f(x) \approx f_2(x) = f(-\pi/4) + \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=-\pi/4} (x + \pi/4) + \left. \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \right|_{x=-\pi/4} \frac{(x + \pi/4)^2}{2} + O(3)$$

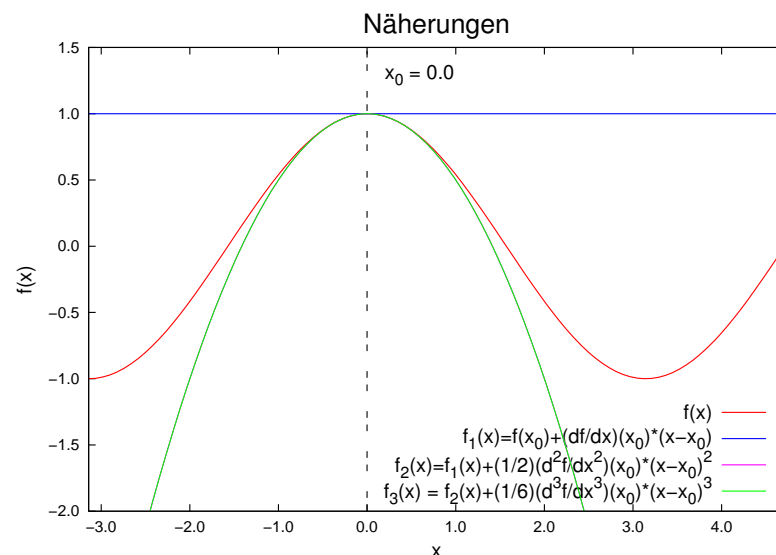
$$f(x) \approx f_3(x) = f(-\pi/4) + \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=-\pi/4} (x + \pi/4) + \left. \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \right|_{x=-\pi/4} \frac{(x + \pi/4)^2}{2} + \left. \frac{d^3 f(x)}{dx^3} \right|_{x=-\pi/4} \frac{(x + \pi/4)^3}{6} + O(4)$$

Diese Kurven werden in Abbildung C.2 gezeigt.



**Abb. C.3.:** Approximationen der Funktion  $f(x) = \cos(x)$  mit dem Grad 1, 2 und 3.

Abbildung C.3 zeigt die Approximation für  $x_0 = -\pi/2$ . Hier ist der Funktionswert wie auch die zweite Ableitung null, so dass eine lineare Approximation resultiert. Erst die dritte Ableitung ist wieder ungleich null.

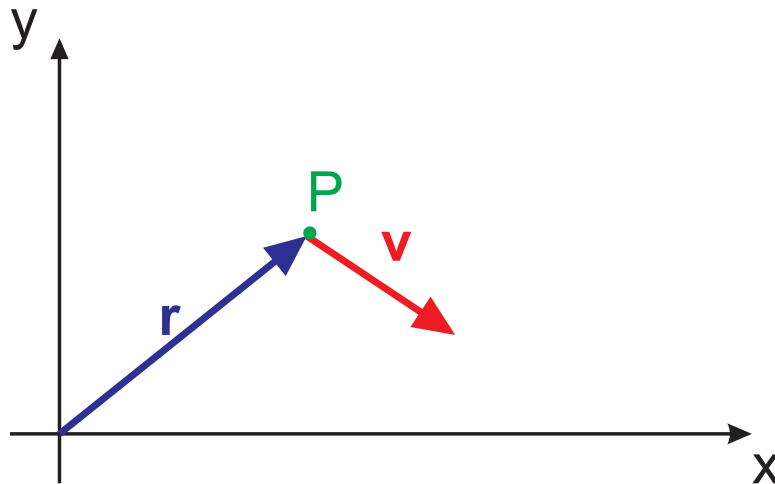


**Abb. C.4.:** Approximationen der Funktion  $f(x) = \cos(x)$  mit dem Grad 1, 2 und 3.

Abbildung C.4 zeigt die Approximationen bei  $x_0 = 0$ . Hier ist die erste und die dritte Ableitung null, so dass nur die zweite übrig bleibt.

## C.7. Vektoren

beschreiben Orte oder gerichtete Grössen



**Abb. C.5.:** Definition von Vektoren.  $\mathbf{r}$  ist ein Ortsvektor,  $\mathbf{v}$  der Geschwindigkeitsvektor.

$$\vec{r} = \mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}$$

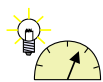
Die Ableitung nach der Zeit wird auch als

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}$$

geschrieben.

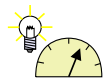
Addition:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{pmatrix} \quad (\text{C.7.1})$$



**Versuch 99: Versuch zur Vorlesung:**

Kraft-Polygon ([Versuchskarte M-28](#), [Video](#))



### Versuch 100: Versuch zur Vorlesung:

Kraft-Polygon (Versuchskarte M-28, Video (VPN oder intern))

Länge eines Vektors

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad (\text{C.7.2})$$

Skalarprodukt

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cdot \cos(\angle \mathbf{a}, \mathbf{b}) \quad (\text{C.7.3})$$

der Einheitsvektor  $\mathbf{e}_x$  ist ein Vektor der Länge 1, der in die  $x$ -Richtung zeigt.

Vektorprodukt

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} \quad (\text{C.7.4})$$

## C.7.1. Gesetze

Vertauschung der Reihenfolge (Kommutationsgesetze)

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} \quad (\text{C.7.5})$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a} \quad (\text{C.7.6})$$

Zwei Vektoren sind orthogonal, wenn

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \quad (\text{C.7.7})$$

Sie sind kollinear, wenn

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad (\text{C.7.8})$$

Für die Orientierung der Vektoren gilt:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{a} \quad (\text{C.7.9})$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{b} \quad (\text{C.7.10})$$

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cdot \sin(\angle \mathbf{a}, \mathbf{b}) \quad (\text{C.7.11})$$

### C.7.1.1. Orthogonalität zweier Vektoren testen

Gegeben seien zwei Vektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$ . Die Projektion von  $\mathbf{a}$  auf  $\mathbf{b}$ , das heisst, die Komponente von  $\mathbf{a}$  in die Richtung von  $\mathbf{b}$  ist

$$a_b = a_{\text{in Richtung } \mathbf{b}} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_b = \mathbf{a} \cdot \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} = \mathbf{a} \cdot \frac{\mathbf{b}}{b} \quad (\text{C.7.12})$$

In kartesischen Koordinaten heisst dies

$$a_b = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}} \quad (\text{C.7.13})$$

**Beispiel:**

Sei  $\mathbf{a} = (3, 2, -2)$  und  $\mathbf{b} = (-2, 0, 1)$ . Dann ist

$$a_b = \frac{3 \cdot (-2) + 2 \cdot 0 + (-2) \cdot 2}{\sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 2^2}} = \frac{-6 - 4}{\sqrt{8}} = -\frac{10}{2\sqrt{2}} = -\frac{5}{\sqrt{2}}$$

**Beispiel:**

Sei  $\mathbf{a} = (3, 2, -2)$  und  $\mathbf{b} = (0, 0, 1)$ . Dann ist

$$a_b = \frac{3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + (-2) \cdot 2}{\sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{-2}{\sqrt{1}} = -2$$

Dies ist die  $z$ -Komponente von  $\mathbf{a}$ .

## C.7.2. Eigenschaften von Kurven im Raum

Die Ausführungen folgen [Bro+08, Seite 214]. Eine Kurve sei durch einen Parameter  $t$  gegeben

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}. \quad (\text{C.7.14})$$

An einem Punkt  $\mathbf{r}(t)$  können die folgenden Richtungen und Grössen definiert werden:

**Tangente** Die Geradengleichung der TANGENTE mit dem Parameter  $\lambda$  ist

$$\mathbf{R}_{T,t_0}(\lambda) = \mathbf{r}(t_0) + \lambda \left. \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \right|_{t=t_0} \quad (\text{C.7.15})$$

**Normalenebene** Die Ebene, die durch den Punkt  $\mathbf{r}(t)$  und den Tangentenvektor  $\mathbf{R}_{T,t_0}(\lambda)$  gegeben ist, heisst NORMALENEBENE und ist durch die Ebenengleichung

$$(\mathbf{R}_{NE,t_0} - \mathbf{r}(t_0)) \cdot \left. \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \right|_{t=t_0} = 0 \quad (\text{C.7.16})$$

gegeben.

**Schmiegungebene** Die SCHMIEGUNGESEBENE geht durch drei Punkte  $\mathbf{r}(t_0)$  (Punkt  $M$ ),  $\mathbf{r}(t_1)$  (Punkt  $N$ ) und  $\mathbf{r}(t_2)$  (Punkt  $P$ ). Die Lage der Ebene wird durch die zwei gleichzeitigen Grenzprozesse  $\lim_{t_1 \rightarrow t_0} \mathbf{r}(t_1)$  und  $\lim_{t_2 \rightarrow t_0} \mathbf{r}(t_2)$  definiert. Die Schmiegungebene  $\mathbf{R}_{SE,t_0}$  am Punkt  $\mathbf{r}(t_0)$  enthält den Tangentenvektor  $\mathbf{R}_{T,t_0}(\lambda)$ .

$$(\mathbf{R}_{SE,t_0} - \mathbf{r}(t_0)) \times \left. \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \right|_{t=t_0} \cdot \left. \frac{d^2\mathbf{r}(t)}{dt^2} \right|_{t=t_0} = 0 \quad (\text{C.7.17})$$

**Hauptnormale** Die HAUPTNORMALE  $\mathbf{R}_{HN,t_0}$  ist die Schnittgerade zwischen Normalenebene und Schmiegungeebene. Sie steht senkrecht auf dem Tangente  $\mathbf{R}_{T,t_0}(\lambda)$ .

$$\mathbf{R}_{HN,t_0}(\lambda) = \mathbf{r}(t_0) + \lambda \left. \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \right|_{t=t_0} \times \left( \left. \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \right|_{t=t_0} \times \left. \frac{d^2\mathbf{r}(t)}{dt^2} \right|_{t=t_0} \right) \quad (\text{C.7.18})$$

**Binormale** Die BINORMALE  $\mathbf{R}_{BN,t_0}$  ist die Senkrechte auf die Schmiegungeebene  $\mathbf{R}_{SE,t_0}$ . Sie ist sowohl senkrecht zur Tangente  $\mathbf{R}_{T,t_0}(\lambda)$  und zur Hauptnormalen  $\mathbf{R}_{HN,t_0}(\lambda)$ .

$$\mathbf{R}_{BN,t_0}(\lambda) = \mathbf{r}(t_0) + \lambda \left( \left. \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \right|_{t=t_0} \times \left. \frac{d^2\mathbf{r}(t)}{dt^2} \right|_{t=t_0} \right) \quad (\text{C.7.19})$$

**rektifizierende Ebene** Die REKTIFIZIERENDE EBENE  $\mathbf{R}_{RE,t_0}$  wird durch die Tangente  $\mathbf{R}_{T,t_0}(\lambda)$  und die Binormale  $\mathbf{R}_{BN,t_0}(\lambda)$  aufgespannt.

$$(\mathbf{R}_{RE,t_0} - \mathbf{r}(t_0)) \times \left. \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \right|_{t=t_0} \cdot \left( \left. \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \right|_{t=t_0} \times \left. \frac{d^2\mathbf{r}(t)}{dt^2} \right|_{t=t_0} \right) = 0 \quad (\text{C.7.20})$$

## C.8. Vektoridentitäten

(Siehe Bronstein, Taschenbuch der Mathematik [Bro+08, pp. 190])

Im Folgenden sind  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  und  $\mathbf{f}$  Vektoren oder vektorielle Funktionen,  $a$ ,  $b$ ,  $c$  und  $f$  ihre Längen,  $k$  eine Zahl und  $\varphi(\mathbf{r})$  eine skalare Funktion. Die Komponenten der Vektoren in kartesischen Koordinaten sind

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$

Für die anderen Vektoren werden die Komponenten analog geschrieben.

### C.8.1. Produkte mit Vektoren

Doppeltes Vektorprodukt

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c} \quad (\text{C.8.1})$$

Das Spatprodukt oder gemischte Produkt berechnet das VOLUMEN des durch  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  aufgespannten Spates. Das Vorzeichen ist  $+$  bei gerader Permutation von  $a, b, c$  und  $-$  bei ungerader Permutation.

$$\begin{aligned}
(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} &= (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} \\
&= (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} \\
&= -(\mathbf{b} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{c} \\
&= -(\mathbf{c} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} \\
&= -(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{b} \\
&= a_x b_y c_z + a_y b_z c_x + a_z b_x c_y - (a_z b_y c_x + a_x b_z c_y + a_y b_x c_z) \quad (\text{C.8.2})
\end{aligned}$$

Drei Vektoren sind komplanar, wenn

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = 0 \quad (\text{C.8.3})$$

Jacobi-Identität

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0 \quad (\text{C.8.4})$$

Lagrangesche Identität

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{f}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{f}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{f})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \quad (\text{C.8.5})$$

Vierfaches Vektorprodukt

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{f}) = ((\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{f}) \mathbf{c} - ((\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}) \mathbf{f} \quad (\text{C.8.6})$$

## C.8.2. Ableiten von Vektoren

Ableiten eines Vektors

$$\frac{d}{dt} \mathbf{a} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{da_x}{dt} \\ \frac{da_y}{dt} \\ \frac{da_z}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{a}_x \\ \dot{a}_y \\ \dot{a}_z \end{pmatrix} \quad (\text{C.8.7})$$

Ableitung eines Produktes

$$\frac{d}{dt} (\varphi(t) \mathbf{a}(t)) = \frac{d\varphi}{dt} \mathbf{a} + \varphi \frac{d\mathbf{a}}{dt} \quad (\text{C.8.8})$$

Ableitung des Skalarproduktes

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \frac{d\mathbf{a}}{dt} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \frac{d\mathbf{b}}{dt} \quad (\text{C.8.9})$$

Ableitung des Vektorproduktes

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \frac{d\mathbf{a}}{dt} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \frac{d\mathbf{b}}{dt} \quad (\text{C.8.10})$$

Ableitung eines Vektors mit konstantem Betrag. Hier ist  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a^2 = \text{const.}$  Aus Gleichung (C.8.9) folgt

$$0 = \frac{da^2}{dt} = \frac{d}{dt} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) = \frac{d\mathbf{a}}{dt} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{d\mathbf{a}}{dt} \cdot \mathbf{a} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mathbf{a}}{dt} \perp \mathbf{a} \quad (\text{C.8.11})$$

Taylorentwicklung einer Vektorfunktion

$$\mathbf{a}(t + \tau) = \mathbf{a}(t) + \tau \left. \frac{d\mathbf{a}}{dt} \right|_t + \frac{\tau^2}{2} \left. \frac{d^2\mathbf{a}}{dt^2} \right|_t + \dots + \frac{\tau^n}{n!} \left. \frac{d^n\mathbf{a}}{dt^n} \right|_t + \dots \quad (\text{C.8.12})$$

### C.8.3. Vektorableitungen bei Skalarfeldern

(Siehe Bronstein, Taschenbuch der Mathematik [Bro+08, pp. 668])

Ableitung eines skalaren Feldes nach einer Richtung

$$\frac{\partial \varphi(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{c}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varphi(\mathbf{r} + \varepsilon \mathbf{c}) - \varphi(\mathbf{r})}{\varepsilon} \quad (\text{C.8.13})$$

Ableitung  $\frac{\partial \varphi(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{e}_c}$  in Richtung des Einheitsvektors  $\mathbf{e}_c$  in Richtung von  $\mathbf{c}$

$$\frac{\partial \varphi(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{c}} = |\mathbf{c}| \frac{\partial \varphi(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{e}_c} \quad (\text{C.8.14})$$

Richtungsableitung einer skalaren Funktion im Vergleich zur Richtung mit dem stärksten Abfall (Einheitsvektor  $\mathbf{n}$ )

$$\frac{\partial \varphi(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{e}_c} = \frac{\partial \varphi(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{n}} \cos(\angle \mathbf{e}_c, \mathbf{n}) \quad (\text{C.8.15})$$

### C.8.4. Vektorableitungen bei Vektorfeldern

Ableitung eines Vektorfeldes  $\mathbf{a}$  nach einer Richtung  $\mathbf{c}$

$$\frac{\partial \mathbf{a}(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{c}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathbf{a}(\mathbf{r} + \varepsilon \mathbf{c}) - \mathbf{a}(\mathbf{r})}{\varepsilon} \quad (\text{C.8.16})$$

Ableitung  $\frac{\partial \mathbf{a}(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{e}_c}$  in Richtung des Einheitsvektors  $\mathbf{e}_c$  in Richtung von  $\mathbf{c}$

$$\frac{\partial \mathbf{a}(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{c}} = |\mathbf{c}| \frac{\partial \mathbf{a}(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{e}_c} \quad (\text{C.8.17})$$

Richtungsableitung einer Vektorfunktion

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{a}(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{c}} &= (\mathbf{c} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{a} \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{rot} (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) + \mathbf{grad} (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}) + \mathbf{c} \cdot \mathbf{div} \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{div} \mathbf{c} \\ &\quad - \mathbf{c} \times \mathbf{rot} \mathbf{a} - \mathbf{a} \times \mathbf{rot} \mathbf{c}) \end{aligned} \quad (\text{C.8.18})$$

Gradient eines Produktes

$$\mathbf{grad} (\varphi_1 \varphi_2) = \varphi_1 \mathbf{grad} \varphi_2 + \varphi_2 \mathbf{grad} \varphi_1 \quad (\text{C.8.19})$$

Kettenregel beim Gradienten

$$\mathbf{grad} \varphi_1 (\varphi_2) = \frac{d\varphi_1}{d\varphi_2} \mathbf{grad} \varphi_2 \quad (\text{C.8.20})$$

Gradient eines Skalarproduktes



$$\mathbf{grad} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{a} + \mathbf{a} \times \mathbf{rot} \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathbf{rot} \mathbf{a} \quad (\text{C.8.21})$$

Gradient eines Skalarproduktes eines konstanten Vektors  $\mathbf{k}$  mit einem Ortsvektor  $\mathbf{r}$

$$\mathbf{grad} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{k}) = \mathbf{k} \quad (\text{C.8.22})$$

Gradient eines Vektors  $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)^T$

$$\mathbf{grad} \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x(x,y,z)}{\partial x} & \frac{\partial v_x(x,y,z)}{\partial y} & \frac{\partial v_x(x,y,z)}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y(x,y,z)}{\partial x} & \frac{\partial v_y(x,y,z)}{\partial y} & \frac{\partial v_y(x,y,z)}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z(x,y,z)}{\partial x} & \frac{\partial v_z(x,y,z)}{\partial y} & \frac{\partial v_z(x,y,z)}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (\text{C.8.23})$$

Divergenz eines Produktes

$$\text{div} (\varphi \mathbf{a}) = \varphi \text{div} \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{grad} \varphi \quad (\text{C.8.24})$$

Divergenz eines Skalarproduktes eines konstanten Vektors  $\mathbf{k}$  mit einem Ortsvektor  $\mathbf{r}$

$$\text{div} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{k}) = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{k}}{|\mathbf{r}|} \quad (\text{C.8.25})$$

Divergenz eines Vektorproduktes

$$\text{div} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{b} \quad (\text{C.8.26})$$

Rotation eines Produktes

$$\mathbf{rot} (\varphi \mathbf{a}) = \varphi \mathbf{rot} \mathbf{a} + \mathbf{grad} \varphi \times \mathbf{a} \quad (\text{C.8.27})$$

Rotation eines Vektorproduktes

$$\mathbf{rot} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{b} + \mathbf{a} \text{div} \mathbf{b} - \mathbf{b} \text{div} \mathbf{a} \quad (\text{C.8.28})$$

Rotation eines Potentialfeldes

$$\mathbf{rot} (\mathbf{grad} \varphi) = \mathbf{0} \quad \forall \varphi \quad (\text{C.8.29})$$

Divergenz einer Rotation

$$\text{div} (\mathbf{rot} \mathbf{a}) = 0 \quad \forall \mathbf{a} \quad (\text{C.8.30})$$

Rotation einer Rotation

$$\mathbf{rot} (\mathbf{rot} \mathbf{a}) = \mathbf{grad} (\text{div} \mathbf{a}) - \text{div} (\mathbf{grad} \mathbf{a}) \quad (\text{C.8.31})$$

Laplace-Operator in kartesischen Koordinaten

$$\Delta f = (\text{div} \mathbf{grad}) f = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (\text{C.8.32})$$

und für Vektorfunktionen

$$\Delta \mathbf{a} = (\operatorname{div} \operatorname{grad}) \mathbf{a} = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \mathbf{a} = \frac{\partial^2 \mathbf{a}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{a}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{a}}{\partial z^2} \quad (\text{C.8.33})$$

## C.8.5. Graphische Darstellung der Ableitungen in drei Dimensionen

### C.8.5.1. Gradient in kartesischen Koordinaten

Wenn wir eine Funktion  $y = f(x)$  als Höhenprofil in einer zweidimensionalen Landschaft auffassen, dann ist

$$\frac{df(x)}{dx}$$

die Steigung dieses Profils an der Stelle  $x$ .  $f(x)$  ist die Höhenangabe über einer eindimensionalen Grundfläche.

Wir können eine Funktion  $f(x, y)$  als Höhenangabe über einer zweidimensionalen Grundfläche betrachten.

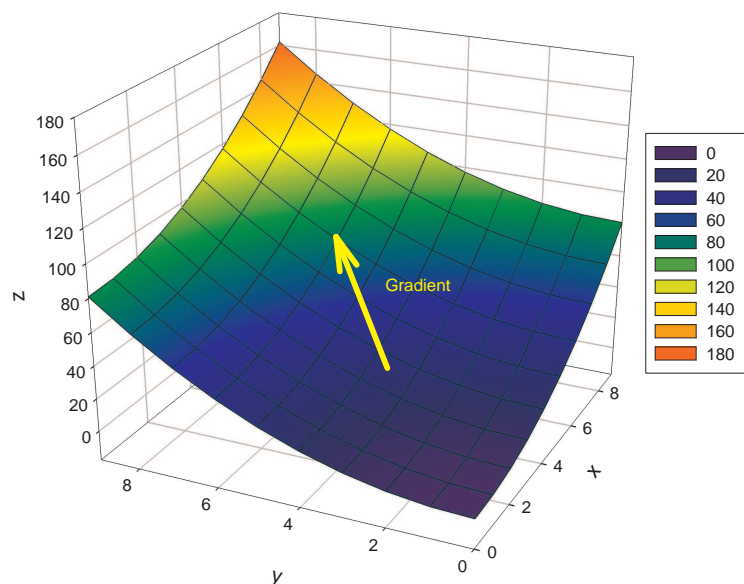


Abb. C.6.: Gradient als Richtung der stärksten Steigung

Die Funktion **Gradient** berechnet das stärkste Gefälle einer Höhenlandschaft über einer zweidimensionalen Ebene. Sie ist definiert:

$$\mathbf{grad} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Eine skalare Funktion  $f(x, y, z)$  definiert eine „Höhenlandschaft“ über einer dreidimensionalen Grundfläche. Sie kann nicht mit einfachen Mitteln visualisiert werden. Hier ist die Definition

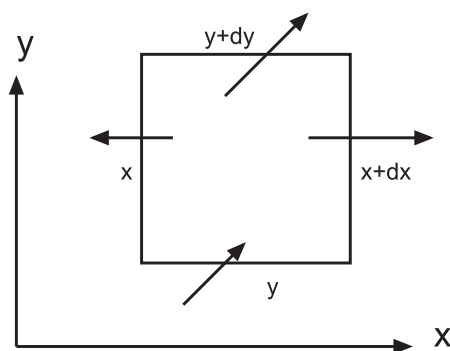
**Gradient einer skalaren Funktion  $f(x, y, z)$  von drei Variablen**

$$\mathbf{grad} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} \\ \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} \\ \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} \end{pmatrix}$$

### C.8.5.2. Divergenz in kartesischen Koordinaten

Wir betrachten eine Vektorfunktion

$$\mathbf{f}(x, y) = \begin{pmatrix} f_x(x, y) \\ f_y(x, y) \end{pmatrix}$$



**Abb. C.7.:** VEKTORFELD mit Umrandung

Wenn wir die Umrandung betrachten, dann sehen wir, dass netto etwas aus ihr herausfließt. Die „Fläche“ ist  $dx$ . In die  $x$ -Richtung heisst das, dass

$$F_x \cdot dx = f_x(x + dx, y) - f_x(x, y) \implies F_x = \frac{f_x(x + dx, y) - f_x(x, y)}{dx}$$

fließt.

In die  $y$ -Richtung müssen wir die schräg liegenden Vektoren aufteilen. Die  $x$ -Komponente,  $f_x(x, y)$  und  $f_x(x, y + dy)$  ist parallel zur oberen und unteren Umrandung. Sie trägt nichts zum Fluss bei. Also gilt auch für die  $y$ -Richtung

$$F_y \cdot dy = f_y(x, y + dy) - f_y(x, y) \implies F_y = \frac{f_y(x, y + dy) - f_y(x, y)}{dy}$$

Die Grösse  $F = F_x + F_y$  nennen wir Divergenz oder Quellstärke. Mit

$$\lim_{dx \rightarrow 0} F_x = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{f_x(x + dx, y) - f_x(x, y)}{dx} = \frac{\partial f_x(x, y)}{\partial x}$$

und

$$\lim_{dy \rightarrow 0} F_y = \lim_{dy \rightarrow 0} \frac{f_y(x, y + dy) - f_y(x, y)}{dy} = \frac{\partial f_y(x, y)}{\partial y}$$

erhalten wir für die

### Divergenz oder Quellstärke in 2 Dimensionen

$$\text{div } \mathbf{f}(x, y) = \frac{\partial f_x(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial f_y(x, y)}{\partial y}$$

Eine analoge Überlegung kann man sich in drei Dimensionen machen. Die Vektorfunktion ist dann

$$\mathbf{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} f_x(x, y, z) \\ f_y(x, y, z) \\ f_z(x, y, z) \end{pmatrix}$$

Wir definieren

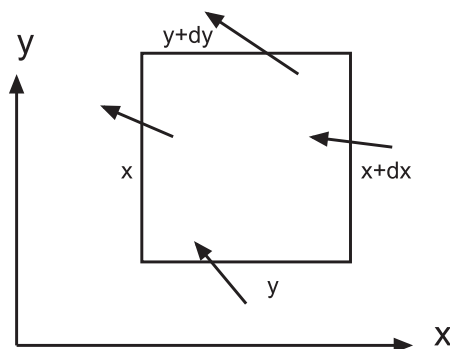
### Divergenz einer Vektorfunktion $\mathbf{f}(x, y, z)$ in drei Dimensionen

$$\text{div } \mathbf{f}(x, y, z) = \frac{\partial f_x(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial f_y(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial f_z(x, y, z)}{\partial z}$$

#### C.8.5.3. Rotation in kartesischen Koordinaten

Wir betrachten wieder eine zweidimensionale Vektorfunktion

$$\mathbf{f}(x, y) = \begin{pmatrix} f_x(x, y) \\ f_y(x, y) \end{pmatrix}$$



**Abb. C.8.:** Drehung eines schwimmenden Klotzes, Rotation

Wir nehmen nun an, dass die durch  $\mathbf{f}(x, y)$  definierten Strömungen den rechteckigen schwimmenden Klotz beeinflussen. So wie die Vektoren gezeichnet sind, wird er sich drehen. Seine Drehachse zeigt aus der Zeichenebene heraus, also die  $z$ -Richtung. Die Drehung hat etwas zu tun mit den Größen

$$R_y dx = f_y(x + dx, y) - f_y(x, y) \longrightarrow R_x = \frac{f_y(x + dx, y) - f_y(x, y)}{dx}$$

und

$$R_x dy = -(f_x(x, y + dy) - f_x(x, y)) \implies R_x = -\frac{f_x(x, y + dy) - f_x(x, y)}{dy}$$

Um bei gleicher Drehrichtung (positiv ist im Gegenuhrzeigersinn) eine positive Grösse zu haben, wird bei  $R_x$  ein „-“ eingefügt. Mit

$$\lim_{dx \rightarrow 0} R_y = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{f_y(x + dx, y) - f_y(x, y)}{dx} = \frac{\partial f_y(x, y)}{\partial x}$$

und

$$\lim_{dy \rightarrow 0} R_x = -\lim_{dy \rightarrow 0} \frac{f_x(x, y + dy) - f_x(x, y)}{dy} = -\frac{\partial f_x(x, y)}{\partial y}$$

ist die Stärke der Drehung oder die

### Rotation in zwei Dimensionen

$$R = \frac{\partial f_y(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial f_x(x, y)}{\partial y}$$

Diese  $R$  zeigt in die  $+z$ -Richtung, wenn wir den zweidimensionalen Raum im dreidimensionalen eingebettet betrachten. Für eine dreidimensionale Vektorfunktion

$$\mathbf{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} f_x(x, y, z) \\ f_y(x, y, z) \\ f_z(x, y, z) \end{pmatrix}$$

kann man sich überlegen, dass die gleichen Überlegungen wie für die  $xy$ -Ebene (Rotation um  $z$ ) auch für die  $xz$ -Ebene (Rotation um  $y$ ) und die  $yz$ -Ebene (Rotation um  $x$ ) gelten. Wir definieren also

### Rotation in drei Dimensionen

$$\mathbf{rot} \mathbf{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_z(x, y, z)}{\partial y} - \frac{\partial f_y(x, y, z)}{\partial z} \\ \frac{\partial f_x(x, y, z)}{\partial z} - \frac{\partial f_z(x, y, z)}{\partial x} \\ \frac{\partial f_y(x, y, z)}{\partial x} - \frac{\partial f_x(x, y, z)}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Man kann sich die Berechnung gut merken mit

### Gedankenstütze für Rotation

$$\mathbf{rot} \mathbf{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} f_x(x, y, z) \\ f_y(x, y, z) \\ f_z(x, y, z) \end{pmatrix}$$

## C.8.6. Totale Ableitung bei mitgeführten Koordinatensystemen

Wenn  $\mathbf{v} = \frac{d}{dt}\mathbf{r}$  ein konstanter Geschwindigkeitsvektor ist und diese Grösse an einem mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  bewegten Ort beobachtet wird, dann gilt (Siehe Jackson [Jac75, p212]):

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \quad (\text{C.8.34})$$

wobei  $\frac{d}{dt}$  die totale Ableitung im raumfesten Koordinatensystem und  $\frac{\partial}{\partial t}$  die lokale, mitgeführte Ableitung ist. Diese Gleichung stammt von der Kettenregel:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(x(t), t) &= \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) \cdot \frac{d}{dt} x(t) + \frac{\partial}{\partial t} f(x(t), t) \\ &= v(t) \frac{\partial}{\partial x} f(x(t), t) + \frac{\partial}{\partial t} f(x(t), t) \end{aligned} \quad (\text{C.8.35})$$

In drei Dimensionen muss mit dem Gradienten gerechnet werden:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}f(\mathbf{r}(t), t) &= \frac{d}{dt}f(x(t), y(t), z(t), t) \\
&= [\mathbf{grad} f(x, y, z, t)] \cdot \frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) + \frac{\partial}{\partial t}f(\mathbf{r}(t), t) \\
&= [\mathbf{grad} f(\mathbf{r}(t), t)] \cdot \mathbf{v}(t) + \frac{\partial}{\partial t}f(\mathbf{r}(t), t) \\
&= \frac{\partial}{\partial t}f(\mathbf{r}(t), t) + \mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{grad} f(\mathbf{r}(t), t) \quad (\text{C.8.36})
\end{aligned}$$

Dabei bedeutet die partielle Ableitung  $\partial/\partial t$  dass man nur nach der Zeitvariable ableitet, nicht aber nach der impliziten Zeitableitung in  $\mathbf{r}$ .

Mit Gleichung (C.8.28) kann man schreiben

$$\begin{aligned}
\mathbf{rot}(\mathbf{B} \times \mathbf{v}) &= (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{grad})\mathbf{v} + \mathbf{B} \operatorname{div} \mathbf{v} - \mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{B} \\
\nabla \times (\mathbf{B} \times \mathbf{v}) &= (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{v} + \mathbf{B} \nabla \cdot \mathbf{v} - \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{B} \quad (\text{C.8.37})
\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}
(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\mathbf{B} &= \mathbf{rot}(\mathbf{B} \times \mathbf{v}) + (\mathbf{B} \cdot \mathbf{grad})\mathbf{v} - \mathbf{B} \operatorname{div} \mathbf{v} + \mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{B} \\
(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{B} &= \nabla \times (\mathbf{B} \times \mathbf{v}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{v} - \mathbf{B} \nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{B} \quad (\text{C.8.38})
\end{aligned}$$

Nun ist  $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ . Weiter ist  $\operatorname{div} \left( \frac{d}{dt}\mathbf{v} \right) = \frac{d}{dt} \operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{d}{dt}(3) = 0$  und  $\mathbf{grad} \mathbf{v} = \frac{d}{dt} \mathbf{grad} \mathbf{r} = \frac{d}{dt} \mathbf{E} = 0$ , wobei  $\mathbf{E}$  die 3 mal 3 Einheits-Diagonalmatrix ist. Damit haben wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit

$$\begin{aligned}
(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\mathbf{B} &= \mathbf{rot}(\mathbf{B} \times \mathbf{v}) \\
(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{B} &= \nabla \times (\mathbf{B} \times \mathbf{v}) \quad (\text{C.8.39})
\end{aligned}$$

und

$$\frac{d}{dt}\mathbf{B} = \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{B} = \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B} + \nabla \times (\mathbf{B} \times \mathbf{v}) \quad (\text{C.8.40})$$

## C.9. Satz von Gauss

Der SATZ VON K. F. GAUSS (1777-1855) verknüpft ein Volumenintegral mit einem Oberflächenintegral.

Gegeben seien

- eine vektorielle Ortsfunktion  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$
- eine geschlossene Fläche  $a$ , die das Volumen  $V(S)$  umschliesst.

$$\int_{V(a)} \operatorname{div} \mathbf{v} dV = \int_a \mathbf{v} \cdot d\mathbf{a} = \int_a \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} da \quad (\text{C.9.1})$$

Man kann auch schreiben  $\operatorname{div} \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v}$ , wobei  $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$  der NABLA-OPERATOR ist.

## C.10. Satz von Green

Der SATZ VON G. GREEN (1793-1841) verknüpft ein Volumenintegral mit einem Oberflächenintegral.

Gegeben seien

- eine skalare Ortsfunktion  $\Psi(\mathbf{r})$
- eine geschlossene Fläche  $a$ , die das Volumen  $V(S)$  umschliesst.

$$\int_{V(a)} \Delta \Psi dV = \int_a \operatorname{grad} \Psi \cdot d\mathbf{a} = \int_a \operatorname{grad} \Psi \cdot \mathbf{n} da \quad (\text{C.10.1})$$

Man kann auch schreiben  $\operatorname{grad} \Psi = \nabla \Psi$ , wobei  $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$  der NABLA-OPERATOR ist.

## C.11. Satz von Stokes

Der SATZ VON G. G. STOKES (1819-1903) verknüpft ein Oberflächenintegral mit einem Linienintegral.

Gegeben seien

- eine vektorielle Ortsfunktion  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$
- einen geschlossenen Weg  $s$ , der die Oberfläche  $a(s)$  umrandet.

$$\int_{a(s)} \operatorname{rot} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{a} = \int_{a(s)} \operatorname{rot} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} da = \oint_s \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} \quad (\text{C.11.1})$$

Man kann auch schreiben  $\operatorname{rot} \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v}$ , wobei  $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$  der NABLA-OPERATOR ist.

Dabei wird jedes Flächenelement so umlaufen, dass die entsprechende Normale  $\mathbf{n}$  der Bewegung einer Rechtsschraube entspricht.



# D. Rechnen mit Integralen

## D.1. Integration

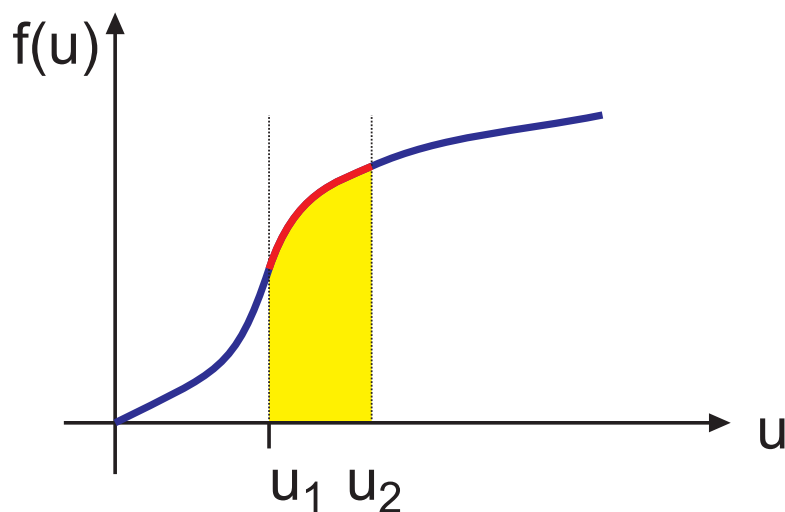


Abb. D.1.: Integration einer Funktion

---

Integrieren, d.h. Fläche unter der Kurve oder den „zurückgelegten“ Weg bestimmen

$$\int_{u_1}^{u_2} f(u) du = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n f\left(u_1 + j \frac{u_2 - u_1}{n}\right) \cdot \left(\frac{u_2 - u_1}{n}\right) \quad (\text{D.1.1})$$

Die verwendeten Symbole sind nebensächlich. Man kann mathematische Operationen mit allen Symbolen durchführen, z.B. die Integration mit  $u$ .

---

$f(t)$	$\int f(\tau) d\tau$	
$t^n$	$\frac{1}{n+1} t^{n+1}$	wobei $n \neq -1$
$\sin(t)$	$-\cos(t)$	
$\cos(t)$	$\sin(t)$	
$e^t$	$e^t$	
$\frac{1}{t}$	$\ln(t)$	

**Tab. D.1.:** Beispiele für Integrale

---

Gesetze der Integration

$$\int (g(x) + h(x)) dx = \int g(x) dx + \int h(x) dx \quad (\text{D.1.2})$$

$$\int (g(x) \cdot h'(x)) dx = g(x) h(x) - \int g'(x) h(x) dx \quad (\text{D.1.3})$$

(Siehe Bronstein, Taschenbuch der Mathematik [Bro+08, pp. 447])

Konstanter Faktor

$$\int a f(x) dx = a \int f(x) dx$$

Integral einer Summe oder Differenz

$$\int [u(x) + v(x) - w(x)] dx = \int u(x) dx + \int v(x) dx - \int w(x) dx$$

Substitutionsmethode

Sei  $y = \phi(x)$

$$\int f(y) dy = \int f[\phi(x)] \phi'(x) dx$$

Partielle Integration der Kettenregel der Differentiation

$$\int u(x) v'(x) dx = u(x) v(x) - \int v(x) u'(x) dx$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \frac{df(x)}{f(x)} = \ln[f(x)] + C$$

## D.2. Unbestimmte Integrale

(Siehe Bronstein, Taschenbuch der Mathematik [Bro+08, pp. 445])

Funktion	Integral	Funktion	Integral
$x^n$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad n \neq -1$	$\frac{1}{x}$	$\int \frac{dx}{x} = \ln  x $
$\sin(x)$	$\int \sin(x) dx = -\cos(x)$	$\cos(x)$	$\int \cos(x) dx = \sin(x)$
$\tan(x)$	$\int \tan(x) dx = -\ln  \cos(x) $	$\cot(x)$	$\int \cot(x) dx = \ln  \sin(x) $
$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\int \frac{dx}{\cos^2(x)} = \tan(x)$	$\frac{1}{\sin^2(x)}$	$\int \frac{dx}{\sin^2(x)} = -\cot(x)$
$\frac{1}{a^2+x^2}$	$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a}$	$e^x$	$\int e^x dx = e^x$
$a^x$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}$	$\ln x$	$\int \ln x dx = x \ln x - x$
$\sinh x$	$\int \sinh x dx = \cosh x$	$\cosh x$	$\int \cosh x dx = \sinh x$
$\tanh x$	$\int \tanh x dx = \ln  \cosh x $	$\coth x$	$\int \coth x dx = \ln  \sinh x $
$\frac{1}{\cosh^2 x}$	$\int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \tanh x$	$\frac{1}{\sinh^2 x}$	$\int \frac{dx}{\sinh^2 x} = -\coth x$
$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a}$		

Tab. D.2.: Unbestimmte Integrale

### D.2.1. Bestimmte Integrale und Integrale mit variabler oberer Grenze

Wenn für eine Funktion  $f(x)$  die Stammfunktion

$$\tilde{F}(x) = \int f(x) dx + C \quad (\text{D.2.1})$$

ist, haben bestimmte Integrale der Funktion  $f(x)$  die Form

$$F_{a,b} = \int_a^b f(x) dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a) \quad (\text{D.2.2})$$

Der Name der Variablen im bestimmten Integral sind irrelevant

$$F_{a,b} = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(\zeta)d\zeta = \int_a^b f(\Xi)d\Xi = F(\Xi)|_a^b = F(b) - F(a) \quad (\text{D.2.3})$$

Wir können nun die obere Grenze variabel machen. Wichtig ist, dass die Variable im Integral eine andere Variable ist wie in der Grenze

$$\int_a^x f(\zeta)d\zeta = F(\zeta)|_a^x = F(x) - F(a) \quad (\text{D.2.4})$$

Wenn  $F(x)$  nach  $x$  abgeleitet wird, erhält man wieder  $f(x)$ .

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(\zeta)d\zeta = \frac{d}{dx} (F(x) - F(a)) = \frac{dF(x)}{dx} = f(x) \quad (\text{D.2.5})$$

Wenn die Variable  $x$  die untere Grenze ist und die obere Grenze fest ist,  $b$ , dann gilt

$$\int_x^b f(\xi)d\xi = F(\xi)|_x^b = F(b) - F(x) \quad (\text{D.2.6})$$

und

$$\frac{d}{dx} \int_x^b f(\zeta)d\zeta = \frac{d}{dx} (F(b) - F(x)) = -\frac{dF(x)}{dx} = -f(x) \quad (\text{D.2.7})$$

Ist die obere Grenze eine Funktion  $g(x)$ , gilt

$$\frac{d}{dx} \int_a^{g(x)} f(\zeta)d\zeta = \frac{d}{dx} (F(g(x)) - F(a)) = -\frac{dF(g(x))}{dx} = f(g(x)) \frac{dg(x)}{dx} \quad (\text{D.2.8})$$

Dies ist nichts anderes als die Kettenregel der Differentiation (Siehe Tabelle C.2).

### D.3. Berechnung von Linienintegralen

Die folgenden Ausführungen lehnen sich an [Bro+08, Seite 214] an. Gegeben sei ein Vektorfeld  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ . Zu berechnen sei das Linienintegral

$$\int_{\mathbf{r}_1, b}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$$

zwischen den Punkten  $\mathbf{r}_1$  und  $\mathbf{r}_2$  entlang der Bahn  $b$ . Wir nehmen an, dass die Bahn  $b$  mit der Bahnlänge  $s$  parametrisiert sei, also durch  $\mathbf{r}(s)$  gegeben sei. Dann ist  $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}(\mathbf{r}(s))$  und der Tangenteneinheitsvektor ist

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$$

Mit  $\mathbf{r}(s_1) = \mathbf{r}_1$  und  $\mathbf{r}(s_2) = \mathbf{r}_2$  ist das Linienintegral

$$\int_{\mathbf{r}_1, b}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_{s_1}^{s_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}(s)) \cdot \boldsymbol{\tau}(s) ds \quad (\text{D.3.1})$$

Das Linienelement  $ds$  wird aus der Kurvenlänge  $s(t)$  ( $t$  ein beliebiger Parameter) in kartesischen Koordinaten so berechnet:

$$s(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt \quad \text{und} \quad \frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \quad (\text{D.3.2})$$

Ausgeschrieben ist dann das Linienintegral mit  $s_1 = s(t_1)$  und  $s(t) = s(t_2)$  und  $\mathbf{r}(s(t)) = (x(s(t)), y(s(t)), z(s(t)))^T$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{r}_1, b}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} &= \int_{s(t_1)}^{s(t_2)} \mathbf{F}(\mathbf{r}(s)) \cdot \boldsymbol{\tau}(s) \frac{ds(t)}{dt} dt \\ &= \int_{s(t_1)}^{s(t_2)} \mathbf{F}(\mathbf{r}(s)) \cdot \boldsymbol{\tau}(s) \sqrt{\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz(t)}{dt}\right)^2} dt \quad (\text{D.3.3}) \end{aligned}$$

Wenn  $\mathbf{r}(t)$  gegeben ist, wobei  $t$  irgend ein stetiger Parameter ist, nicht notwendigerweise die Kurvenlänge, dann kann man mit

$$\tilde{\boldsymbol{\tau}}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \quad (\text{D.3.4})$$

und damit

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{r}_1(t_1), b}^{\mathbf{r}_2(t_2)} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot d\mathbf{r} &= \int_{s(t_1)}^{s(t_2)} \mathbf{F}(\mathbf{r}(s(t))) \boldsymbol{\tau}(s) ds \\ &= \int_{s(t_1)}^{s(t_2)} \mathbf{F}(\mathbf{r}(s(t))) \frac{d\mathbf{r}(s)}{ds} ds = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}(s(t))) \frac{d\mathbf{r}(s)}{ds} \frac{ds}{dt} dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}}(t) dt \quad (\text{D.3.5}) \end{aligned}$$

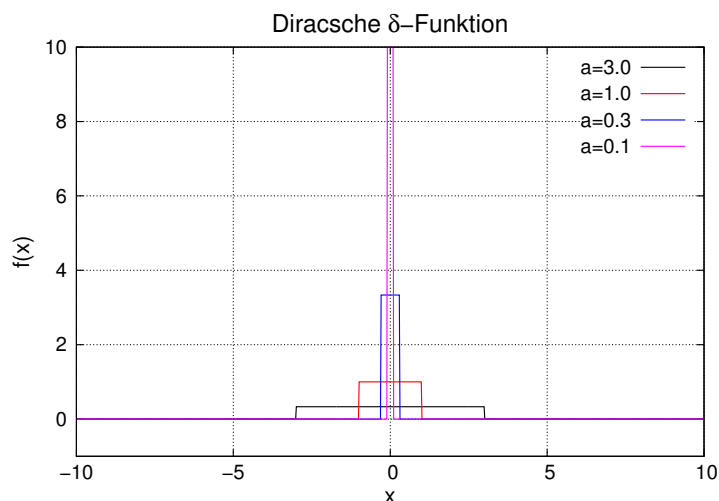
## D.4. Die Diracsche Deltafunktion

Die Diracsche Deltafunktion ist ein nützliches Instrument, um diskrete Ladungsverteilungen, Kräfte, Punktmassen als kontinuierliche Verteilung oder Kraftfelder

zu beschreiben.

Wir beginnen, indem wir die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{a}, & \text{für } |x| \leq \frac{a}{2}; \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (\text{D.4.1})$$



**Abb. D.2.:** Darstellung von  $f(x)$ , wobei  $a$  variiert wird.

In der Abbildung [D.2](#) sieht man, dass mit kleiner werdendem  $a$  die Amplitude von  $f(x)$  immer grösser wird. Die Fläche unter der Kurve

$$A_f = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-a/2}^{a/2} \frac{1}{a} dx = \frac{x}{a} \Big|_{-a/2}^{a/2} = \frac{1}{a} \left( \frac{a}{2} - \left( -\frac{a}{2} \right) \right) = 1 \quad (\text{D.4.2})$$

ist konstant und unabhängig von  $a$ . Wir definieren nun die Diracsche Delta-Funktion

$$\delta(x) := \lim_{a \rightarrow 0} f(x) \quad (\text{D.4.3})$$

Damit ist auch

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \lim_{a \rightarrow 0} f(x) \right) dx = \lim_{a \rightarrow 0} \int_{-a/2}^{a/2} \frac{1}{a} dx = \lim_{a \rightarrow 0} 1 = 1 \quad (\text{D.4.4})$$

Als Anwendung betrachten wir das Integral des Produktes

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) \delta(x) dx$$

wobei  $g(x)$  genügend oft (Fragen Sie einen Mathematiker oder lesen die Packungsbeilage oder ein Mathematikbuch) stetig differenzierbar sein soll. Die Taylorreihe

von  $g(x)$  ist dann

$$g(x) = g(0) + x \left( \frac{\partial}{\partial x} g(x) \Big|_{x=0} \right) + \dots + \frac{x^n}{n!} \left( \frac{\partial^n}{\partial x^n} g(x) \Big|_{x=0} \right) + \dots \quad (\text{D.4.5})$$

Dann ergibt das Integral

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \delta(x) dx &= \lim_{a \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ g(0) + x \left( \frac{\partial}{\partial x} g(x) \Big|_{x=0} \right) + \dots \right] f(x) dx \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \int_{-a/2}^{a/2} \left[ g(0) + x \left( \frac{\partial}{\partial x} g(x) \Big|_{x=0} \right) + \dots \right] \frac{1}{a} dx \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \left[ \frac{g(0)}{a} \int_{-a/2}^{a/2} dx + \frac{\left( \frac{\partial}{\partial x} g(x) \Big|_{x=0} \right)}{a} \int_{-a/2}^{a/2} x dx + \dots \right] \\ &= g(0) + \lim_{a \rightarrow 0} \left[ \frac{\left( \frac{\partial}{\partial x} g(x) \Big|_{x=0} \right)}{a} \frac{x^2}{2} \Big|_{-a/2}^{a/2} + \dots \right] \\ &= g(0) + \lim_{a \rightarrow 0} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial x} g(x) \Big|_{x=0} \right) \frac{a^2}{4a} + \dots \right] = g(0) \end{aligned} \quad (\text{D.4.6})$$

Damit ist klar, dass die nützliche Gleichung

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) \delta(x - x_0) dx = g(x_0) \quad (\text{D.4.7})$$

gilt. Man kann sie anwenden, zum Beispiel im Gaussschen Gesetz, wenn man das elektrische Feld einer Ebene berechnen will. Wir setzen für die Ladungsdichte

$$\rho_{el}(x, y, z) = \sigma_{el}(x, y) \delta(z)$$

Für die Einheiten haben wir

$$[\rho_{el}] = \text{Cm}^{-3} \quad [\sigma_{el}] = \text{Cm}^{-2}$$

Der Unterschied in den Dimensionen rührt daher, dass die Delta-Funktion  $\delta(z)$  implizit die Dimension  $[\delta(z)] = \text{m}^{-1}$  hat, sonst wären die Definition in Gleichung (D.4.3) und Gleichung (D.4.1) dimensionsmässig nicht korrekt.

Das Gausssche Gesetz sagt dann

$$\begin{aligned} \iint_{A(V)} \mathbf{D} d\mathbf{a} &= \iiint_V \rho_{el} dV &= \iiint_V \rho_{el}(x, y, z) dx dy dz \\ &= \iiint_V \sigma_{el}(x, y) \delta(z) dx dy dz &= \iint_{\text{Ebene}} \sigma_{el}(x, y) dx dy \end{aligned}$$





# E. Umrechnungen zwischen kartesischen, sphärischen und zylindrischen Koordinatensystemen

(Siehe Bronstein, Taschenbuch der Mathematik [Bro+08, pp. 218])

(Siehe Bronstein, Taschenbuch der Mathematik [Bro+08, pp. 667])

Definitionen

## Kartesisches System

$$\mathbf{V}_c = V_x \mathbf{e}_x + V_y \mathbf{e}_y + V_z \mathbf{e}_z$$

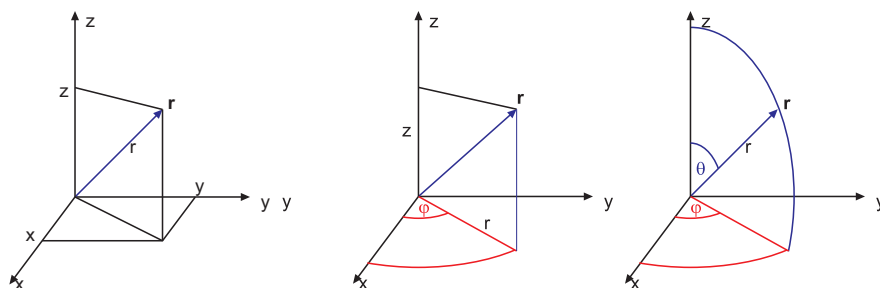
## Sphärisches System

$$\mathbf{V}_s = V_r \mathbf{e}_r + V_\phi \mathbf{e}_\phi + V_\theta \mathbf{e}_\theta$$

## Zylindrisches System

$$\mathbf{V}_z = V_r \mathbf{e}_r + V_\phi \mathbf{e}_\phi + V_z \mathbf{e}_z$$

Die Transformation zwischen den Koordinatensystemen läuft auf eine allgemeine Drehung der Koordinaten im Raum hinaus.



**Abb. E.1.:** Definition der Koordinatensysteme. Links: kartesisches System. Mitte: Zylinderkoordinaten. Rechts: Kugelkoordinaten

## E.1. Vom kartesischen ins sphärische System

$$V_r = V_x \sin \theta \cos \phi + V_y \sin \theta \sin \phi + V_z \cos \theta \quad (\text{E.1.1})$$

$$V_\theta = V_x \cos \theta \cos \phi + V_y \cos \theta \sin \phi - V_z \sin \theta \quad (\text{E.1.2})$$

$$V_\phi = -V_x \sin \phi + V_y \cos \phi \quad (\text{E.1.3})$$

$$(\text{E.1.4})$$

## E.2. Vom sphärischen ins kartesische System

$$V_x = V_r \sin \theta \cos \phi + V_\theta \cos \theta \cos \phi - V_\phi \sin \phi \quad (\text{E.2.1})$$

$$V_y = V_r \sin \theta \sin \phi + V_\theta \cos \theta \sin \phi + V_\phi \cos \phi \quad (\text{E.2.2})$$

$$V_z = V_r \cos \theta - V_\theta \sin \theta \quad (\text{E.2.3})$$

$$(\text{E.2.4})$$

## E.3. Vom kartesischen ins zylindrische System

$$V_\rho = V_x \cos \phi + V_y \sin \phi \quad (\text{E.3.1})$$

$$V_\phi = -V_x \sin \phi + V_y \cos \phi \quad (\text{E.3.2})$$

$$V_z = V_z \quad (\text{E.3.3})$$

$$(\text{E.3.4})$$

## E.4. Vom zylindrischen ins kartesische System

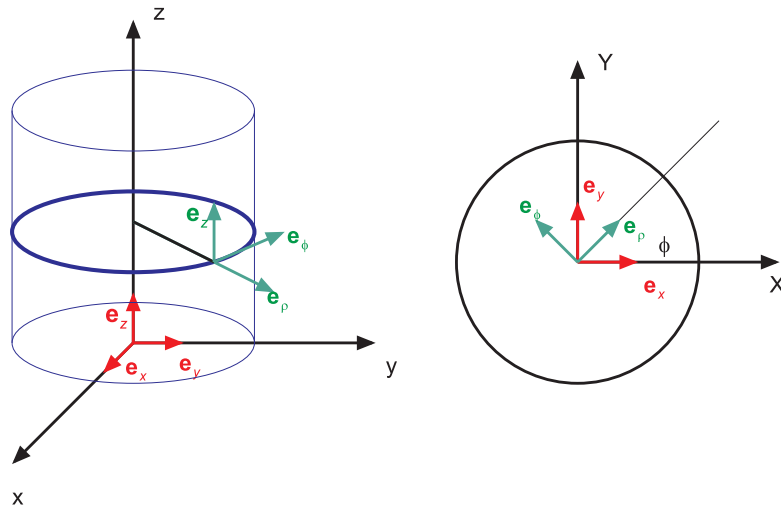


Abb. E.2.: Umrechnung der Koordinaten

$$V_x = V_\rho \cos \phi - V_\phi \sin \phi \quad (\text{E.4.1})$$

$$V_y = V_\rho \sin \phi + V_\phi \cos \phi \quad (\text{E.4.2})$$

$$V_z = V_z \quad (\text{E.4.3})$$

$$(\text{E.4.4})$$

## E.5. Vom sphärischen ins zylindrische System

$$V_\rho = V_r \sin \theta + V_\theta \cos \theta \quad (\text{E.5.1})$$

$$V_\phi = V_\phi \quad (\text{E.5.2})$$

$$V_z = V_r \cos \theta - V_\theta \sin \theta \quad (\text{E.5.3})$$

$$(\text{E.5.4})$$

## E.6. Vom zylindrischen ins sphärische System

$$V_r = V_\rho \sin \theta + V_z \cos \theta \quad (\text{E.6.1})$$

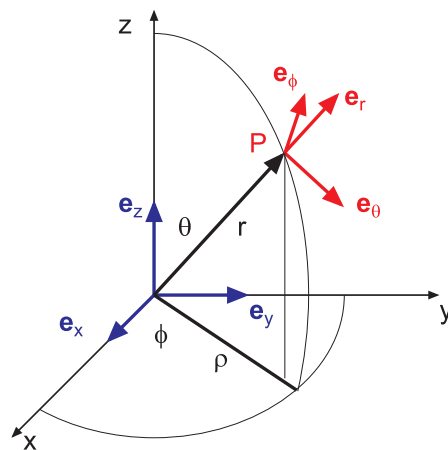
$$V_\theta = V_\rho \cos \theta - V_z \sin \theta \quad (\text{E.6.2})$$

$$V_\phi = V_\phi \quad (\text{E.6.3})$$

$$(\text{E.6.4})$$

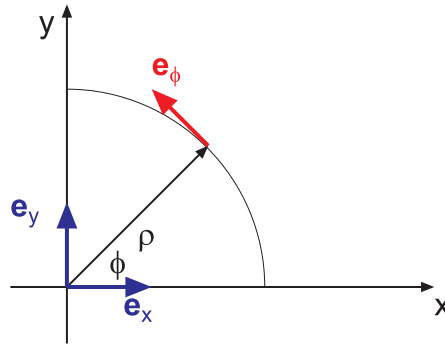
## F. Geschwindigkeiten und Beschleunigungen in Kugelkoordinaten

Wir betrachten die Definition der Kugelkoordinaten



**Abb. F.1.:** Mitgeführtes orthogonales Koordinatensystem und kartesisches Koordinatensystem

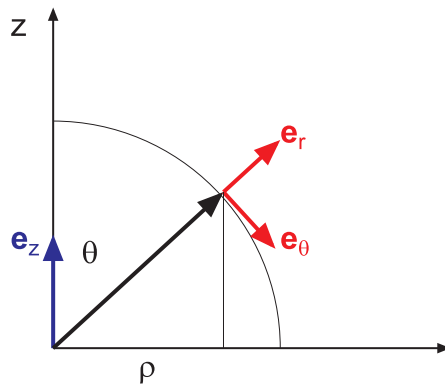
Gegeben sind einerseits die kartesischen Koordinaten  $x$ ,  $y$  und  $z$ , andererseits die Kugelkoordinaten  $r$ ,  $\phi$ , und  $\theta$ . Am Punkt  $P$  definieren wir ein mitgeführtes kartesisches Koordinatensystem. Seine Orientierung hängt also von der Zeit ab! Beide Koordinatensysteme sind jeweils durch ein Tripel von Einheitsvektoren gegeben, die jeweils gegenseitig orthogonal sind. Die Einheitsvektoren sind im kartesischen System  $\mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{e}_y$  und  $\mathbf{e}_z$  und im mitgeführten kartesischen System  $\mathbf{e}_r$ ,  $\mathbf{e}_\phi$  und  $\mathbf{e}_\theta$ .

Abb. F.2.: Betrachtung in der  $xy$ -Ebene für  $\mathbf{e}_\phi$ 

Wir betrachten zuerst die  $xy$ -Ebene. Die Projektion des Ortsvektors  $\mathbf{r}$  auf diese Ebene nennen wir  $\rho$ . Wir erhalten also die Beziehungen (Einheitsvektoren!)

$$\mathbf{e}_\phi = -\sin(\phi)\mathbf{e}_x + \cos(\phi)\mathbf{e}_y \quad (\text{F.0.1})$$

$$\boldsymbol{\rho} = \cos(\phi)\mathbf{e}_x + \sin(\phi)\mathbf{e}_y \quad (\text{F.0.2})$$

Abb. F.3.: Betrachtung in der  $\rho z$ -Ebene zur Bestimmung von  $\mathbf{e}_r$  und  $\mathbf{e}_\theta$ 

Wir betrachten nun die Ebene gebildet aus den Vektoren  $\boldsymbol{\rho}$  und  $\mathbf{e}_z$ . In dieser Darstellung ist  $\mathbf{e}_r$  radial und  $\mathbf{e}_\theta$  zeigt in die Richtung der positiven  $\theta$ -Koordinate. Dadurch ist auch  $\mathbf{e}_r$ ,  $\mathbf{e}_\theta$  und  $\mathbf{e}_\phi$  in dieser Reihenfolge ein orthogonales Rechtssystem. Aus der Abbildung liest man

$$\mathbf{e}_r = \cos(\theta)\mathbf{e}_z + \sin(\theta)\boldsymbol{\rho} \quad (\text{F.0.3})$$

$$\begin{aligned} &= \cos(\theta)\mathbf{e}_z + \sin(\theta)(\cos(\phi)\mathbf{e}_x + \sin(\phi)\mathbf{e}_y) \\ &= \sin(\theta)\cos(\phi)\mathbf{e}_x + \sin(\theta)\sin(\phi)\mathbf{e}_y + \cos(\theta)\mathbf{e}_z \end{aligned}$$

$$\mathbf{e}_\theta = -\sin(\theta)\mathbf{e}_z + \cos(\theta)\boldsymbol{\rho} \quad (\text{F.0.4})$$

$$\begin{aligned} &= -\sin(\theta)\mathbf{e}_z + \cos(\theta)(\cos(\phi)\mathbf{e}_x + \sin(\phi)\mathbf{e}_y) \\ &= \cos(\theta)\cos(\phi)\mathbf{e}_x + \cos(\theta)\sin(\phi)\mathbf{e}_y - \sin(\theta)\mathbf{e}_z \end{aligned}$$

Dabei merken wir uns, dass  $\theta$  und  $\phi$  Funktionen der Zeit sind. Zusammenfassend erhalten wir

$$\mathbf{e}_r = \sin(\theta)\cos(\phi)\mathbf{e}_x + \sin(\theta)\sin(\phi)\mathbf{e}_y + \cos(\theta)\mathbf{e}_z \quad (\text{F.0.5})$$

$$\mathbf{e}_\theta = \cos(\theta)\cos(\phi)\mathbf{e}_x + \cos(\theta)\sin(\phi)\mathbf{e}_y - \sin(\theta)\mathbf{e}_z \quad (\text{F.0.6})$$

$$\mathbf{e}_\phi = -\sin(\phi)\mathbf{e}_x + \cos(\phi)\mathbf{e}_y \quad (\text{F.0.7})$$

Wir wissen, dass  $\mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{e}_y$  und  $\mathbf{e}_z$  ein orthogonales Koordinatensystem ist. Also ist insbesondere  $1 = \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_z$  und  $0 = \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_x$ . Wenn wir mit diesem Wissen  $\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_r$ ,  $\mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{e}_\theta$  und  $\mathbf{e}_\phi \cdot \mathbf{e}_\phi$  sowie  $\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_\theta$ ,  $\mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{e}_\phi$  und  $\mathbf{e}_\phi \cdot \mathbf{e}_r$  berechnen, können wir zeigen, dass auch das Koordinatensystem  $\mathbf{e}_r$ ,  $\mathbf{e}_\theta$  und  $\mathbf{e}_\phi$  ein orthogonales Koordinatensystem ist.

Wenn wir dieses Gleichungssystem nach  $\mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{e}_y$  und  $\mathbf{e}_z$  auflösen, erhalten wir die Umkehrrelationen

$$\mathbf{e}_x = \sin(\theta)\cos(\phi)\mathbf{e}_r + \cos(\theta)\cos(\phi)\mathbf{e}_\theta - \sin(\phi)\mathbf{e}_\phi \quad (\text{F.0.8})$$

$$\mathbf{e}_y = \sin(\theta)\sin(\phi)\mathbf{e}_r + \cos(\theta)\sin(\phi)\mathbf{e}_\theta + \cos(\phi)\mathbf{e}_\phi \quad (\text{F.0.9})$$

$$\mathbf{e}_z = \cos(\theta)\mathbf{e}_r - \sin(\theta)\mathbf{e}_\theta \quad (\text{F.0.10})$$

Durch Rückeinsetzen kann man sich überzeugen, dass dies konsistente Formulierungen sind.

## F.1. Geschwindigkeiten

Wir wissen, dass in kartesischen Koordinaten

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z \quad (\text{F.1.1})$$

der Ortsvektor ist. Die Geschwindigkeit ist dann

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \dot{x}\mathbf{e}_x + \dot{y}\mathbf{e}_y + \dot{z}\mathbf{e}_z \quad (\text{F.1.2})$$

Wir verwenden die Beziehungen

$$x = r \sin(\theta) \cos(\phi) \quad (\text{F.1.3})$$

$$y = r \sin(\theta) \sin(\phi) \quad (\text{F.1.4})$$

$$z = r \cos(\theta) \quad (\text{F.1.5})$$

und leiten sie ab. Wir erhalten

$$\dot{x} = \dot{r} \sin(\theta) \cos(\phi) + r \cos(\theta) \cos(\phi) \dot{\theta} - r \sin(\theta) \sin(\phi) \dot{\phi} \quad (\text{F.1.6})$$

$$\dot{y} = \dot{r} \sin(\theta) \sin(\phi) + r \cos(\theta) \sin(\phi) \dot{\theta} + r \sin(\theta) \cos(\phi) \dot{\phi} \quad (\text{F.1.7})$$

$$\dot{z} = \dot{r} \cos(\theta) - r \sin(\theta) \dot{\theta} \quad (\text{F.1.8})$$

Wir setzen in die Gleichung [F.1.2](#) die Gleichungen [F.0.8](#), [F.0.9](#), [F.0.10](#), [F.1.6](#), [F.1.7](#) und [F.1.8](#) ein und ordnen nach  $\mathbf{e}_r$ ,  $\mathbf{e}_\theta$  und  $\mathbf{e}_\phi$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \dot{x} \mathbf{e}_x + \dot{y} \mathbf{e}_y + \dot{z} \mathbf{e}_z \quad (\text{F.1.9}) \\ &= \dot{x} [\sin(\theta) \cos(\phi) \mathbf{e}_r + \cos(\theta) \cos(\phi) \mathbf{e}_\theta - \sin(\phi) \mathbf{e}_\phi] \\ &\quad + \dot{y} [\sin(\theta) \sin(\phi) \mathbf{e}_r + \cos(\theta) \sin(\phi) \mathbf{e}_\theta + \cos(\phi) \mathbf{e}_\phi] \\ &\quad + \dot{z} [\cos(\theta) \mathbf{e}_r - \sin(\theta) \mathbf{e}_\theta] \\ &= [\dot{x} \sin(\theta) \cos(\phi) + \dot{y} \sin(\theta) \sin(\phi) + \dot{z} \cos(\theta)] \mathbf{e}_r \\ &\quad + [\dot{x} \cos(\theta) \cos(\phi) + \dot{y} \cos(\theta) \sin(\phi) - \dot{z} \sin(\theta)] \mathbf{e}_\theta \\ &\quad + [-\dot{x} \sin(\phi) + \dot{y} \cos(\phi)] \mathbf{e}_\phi \end{aligned}$$

Der Übersichtlichkeit halber berechnen wir nun die drei Komponenten  $\mathbf{e}_r$ ,  $\mathbf{e}_\theta$  und  $\mathbf{e}_\phi$  getrennt. Wir beginnen mit  $\mathbf{e}_r$ .



$$\begin{aligned}
v_r &= \dot{x} \sin(\theta) \cos(\phi) + \dot{y} \sin(\theta) \sin(\phi) + \dot{z} \cos(\theta) & (F.1.10) \\
&= \left[ \dot{r} \sin(\theta) \cos(\phi) + r \cos(\theta) \cos(\phi) \dot{\theta} - r \sin(\theta) \sin(\phi) \dot{\phi} \right] \sin(\theta) \cos(\phi) \\
&\quad + \left[ \dot{r} \sin(\theta) \sin(\phi) + r \cos(\theta) \sin(\phi) \dot{\theta} + r \sin(\theta) \cos(\phi) \dot{\phi} \right] \sin(\theta) \sin(\phi) \\
&\quad + \left[ \dot{r} \cos(\theta) - r \sin(\theta) \dot{\theta} \right] \cos(\theta) \\
&= \dot{r} [\sin(\theta) \cos(\phi) \sin(\theta) \cos(\phi) + \sin(\theta) \sin(\phi) \sin(\theta) \sin(\phi) + \cos(\theta) \cos(\theta)] \\
&\quad + r \dot{\theta} [\cos(\theta) \cos(\phi) \sin(\theta) \cos(\phi) + \cos(\theta) \sin(\phi) \sin(\theta) \sin(\phi) - \sin(\theta) \cos(\theta)] \\
&\quad + r \dot{\phi} [-\sin(\theta) \sin(\phi) \sin(\theta) \cos(\phi) + \sin(\theta) \cos(\phi) \sin(\theta) \sin(\phi)] \\
&= \dot{r} [\sin^2(\theta) \cos^2(\phi) + \sin^2(\theta) \sin^2(\phi) + \cos^2(\theta)] \\
&\quad + r \dot{\theta} [\cos(\theta) \cos^2(\phi) \sin(\theta) + \cos(\theta) \sin^2(\phi) \sin(\theta) - \sin(\theta) \cos(\theta)] \\
&\quad + r \dot{\phi} [-\sin^2(\theta) \sin(\phi) \cos(\phi) + \sin^2(\theta) \sin(\phi) \cos(\phi)] \\
&= \dot{r} [\sin^2(\theta) (\cos^2(\phi) + \sin^2(\phi)) + \cos^2(\theta)] \\
&\quad + r \dot{\theta} [\cos(\theta) \sin(\theta) [\cos^2(\phi) + \sin^2(\phi)] - \sin(\theta) \cos(\theta)] \\
&= \dot{r} [\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)] + r \dot{\theta} [\cos(\theta) \sin(\theta) - \sin(\theta) \cos(\theta)] \\
&= \dot{r}
\end{aligned}$$

Wir fahren mit  $\mathbf{e}_\theta$  weiter.

$$\begin{aligned}
v_\theta &= \dot{x} \cos(\theta) \cos(\phi) + \dot{y} \cos(\theta) \sin(\phi) - \dot{z} \sin(\theta) & (F.1.11) \\
&= \left[ \dot{r} \sin(\theta) \cos(\phi) + r \cos(\theta) \cos(\phi) \dot{\theta} - r \sin(\theta) \sin(\phi) \dot{\phi} \right] \cos(\theta) \cos(\phi) \\
&\quad + \left[ \dot{r} \sin(\theta) \sin(\phi) + r \cos(\theta) \sin(\phi) \dot{\theta} + r \sin(\theta) \cos(\phi) \dot{\phi} \right] \cos(\theta) \sin(\phi) \\
&\quad - \left[ \dot{r} \cos(\theta) - r \sin(\theta) \dot{\theta} \right] \sin(\theta) \\
&= \dot{r} [\sin(\theta) \cos(\phi) \cos(\theta) \cos(\phi) + \sin(\theta) \sin(\phi) \cos(\theta) \sin(\phi) - \cos(\theta) \sin(\theta)] \\
&\quad + r \dot{\theta} [\cos(\theta) \cos(\phi) \cos(\theta) \cos(\phi) + \cos(\theta) \sin(\phi) \cos(\theta) \sin(\phi) + \sin(\theta) \sin(\theta)] \\
&\quad + r \dot{\phi} [-r \sin(\theta) \sin(\phi) \cos(\theta) \cos(\phi) + \sin(\theta) \cos(\phi) \cos(\theta) \sin(\phi)] \\
&= \dot{r} [\sin(\theta) \cos(\theta) \cos^2(\phi) + \sin(\theta) \cos(\theta) \sin^2(\phi) - \cos(\theta) \sin(\theta)] \\
&\quad + r \dot{\theta} [\cos^2(\theta) \cos^2(\phi) + \cos^2(\theta) \sin^2(\phi) + \sin^2(\theta)] \\
&\quad + r \dot{\phi} [-r \sin(\theta) \sin(\phi) \cos(\theta) \cos(\phi) + \sin(\theta) \sin(\phi) \cos(\theta) \cos(\phi)] \\
&= \dot{r} [\sin(\theta) \cos(\theta) - \cos(\theta) \sin(\theta)] \\
&\quad + r \dot{\theta} [\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)] \\
&= r \dot{\theta}
\end{aligned}$$

Wir schliessen mit  $\mathbf{e}_\phi$ .

$$\begin{aligned}
v_\phi &= -\dot{x} \sin(\phi) + \dot{y} \cos(\phi) & (F.1.12) \\
&= -\left[\dot{r} \sin(\theta) \cos(\phi) + r \cos(\theta) \cos(\phi) \dot{\theta} - r \sin(\theta) \sin(\phi) \dot{\phi}\right] \sin(\phi) \\
&\quad + \left[\dot{r} \sin(\theta) \sin(\phi) + r \cos(\theta) \sin(\phi) \dot{\theta} + r \sin(\theta) \cos(\phi) \dot{\phi}\right] \cos(\phi) \\
&= \dot{r} [-\sin(\theta) \cos(\phi) \sin(\phi) + \sin(\theta) \sin(\phi) \cos(\phi)] \\
&\quad + r \dot{\theta} [-\cos(\theta) \cos(\phi) \sin(\phi) + \cos(\theta) \sin(\phi) \cos(\phi)] \\
&\quad + r \dot{\phi} [\sin(\theta) \sin(\phi) \sin(\phi) + \sin(\theta) \cos(\phi) \cos(\phi)] \\
&= r \dot{\phi} [\sin(\theta) \sin^2(\phi) + \sin(\theta) \cos^2(\phi)] \\
&= r \sin(\theta) \dot{\phi}
\end{aligned}$$

Zusammenfassend haben wir

$$\begin{aligned}
\mathbf{v} &= v_r \mathbf{e}_r + v_\theta \mathbf{e}_\theta + v_\phi \mathbf{e}_\phi & (F.1.13) \\
&= \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + r \sin(\theta) \dot{\phi} \mathbf{e}_\phi
\end{aligned}$$

## F.2. Beschleunigung

Die Beschleunigung ist in kartesischen Koordinaten

$$\mathbf{a} = \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \begin{pmatrix} \frac{d^2 x}{dt^2} \\ \frac{d^2 y}{dt^2} \\ \frac{d^2 z}{dt^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \ddot{x} \mathbf{e}_x + \ddot{y} \mathbf{e}_y + \ddot{z} \mathbf{e}_z \quad (F.2.1)$$

Wir verwenden die Beziehungen

$$x = r \sin(\theta) \cos(\phi) \quad (F.2.2)$$

$$y = r \sin(\theta) \sin(\phi) \quad (F.2.3)$$

$$z = r \cos(\theta) \quad (F.2.4)$$

und leiten sie zweimal ab. Wir erhalten aus

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \dot{r} \sin(\theta) \cos(\phi) + r \cos(\theta) \cos(\phi) \dot{\theta} - r \sin(\theta) \sin(\phi) \dot{\phi} \\
\dot{y} &= \dot{r} \sin(\theta) \sin(\phi) + r \cos(\theta) \sin(\phi) \dot{\theta} + r \sin(\theta) \cos(\phi) \dot{\phi} \\
\dot{z} &= \dot{r} \cos(\theta) - r \sin(\theta) \dot{\theta}
\end{aligned}$$

die Gleichungen

$$\begin{aligned}
\ddot{x} &= \ddot{r} \sin(\theta) \cos(\phi) + \dot{r} \cos(\theta) \cos(\phi) \dot{\theta} - \dot{r} \sin(\theta) \sin(\phi) \dot{\phi} & (F.2.5) \\
&\quad + \dot{r} \cos(\theta) \cos(\phi) \ddot{\theta} - r \sin(\theta) \cos(\phi) \dot{\theta}^2 - r \cos(\theta) \sin(\phi) \dot{\phi} \dot{\theta} + r \cos(\theta) \cos(\phi) \ddot{\theta} \\
&\quad - \dot{r} \sin(\theta) \sin(\phi) \dot{\phi} - r \cos(\theta) \sin(\phi) \dot{\phi} \dot{\theta} - r \sin(\theta) \cos(\phi) \dot{\phi}^2 - r \sin(\theta) \sin(\phi) \ddot{\phi} \\
&= \ddot{r} \sin(\theta) \cos(\phi) \\
&\quad + \dot{r} \dot{\theta} [\cos(\theta) \cos(\phi) + \cos(\theta) \cos(\phi)] \\
&\quad + \dot{r} \dot{\phi} [-\sin(\theta) \sin(\phi) - \sin(\theta) \sin(\phi)] \\
&\quad + r \dot{\theta}^2 [-\sin(\theta) \cos(\phi)] \\
&\quad + r \dot{\phi} \dot{\theta} [-\cos(\theta) \sin(\phi) - \cos(\theta) \sin(\phi)] \\
&\quad + r \ddot{\theta} [\cos(\theta) \cos(\phi)] \\
&\quad + r \dot{\phi}^2 [-\sin(\theta) \cos(\phi)] \\
&\quad + r \ddot{\phi} [-\sin(\theta) \sin(\phi)] \\
&= \ddot{r} \sin(\theta) \cos(\phi) + 2\dot{r} \dot{\theta} \cos(\theta) \cos(\phi) - 2\dot{r} \dot{\phi} \sin(\theta) \sin(\phi) - r \dot{\theta}^2 \sin(\theta) \cos(\phi) \\
&\quad - 2r \dot{\phi} \dot{\theta} \cos(\theta) \sin(\phi) + r \ddot{\theta} \cos(\theta) \cos(\phi) - r \dot{\phi}^2 \sin(\theta) \cos(\phi) - r \ddot{\phi} \sin(\theta) \sin(\phi)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\ddot{y} &= \ddot{r} \sin(\theta) \sin(\phi) + \dot{r} \cos(\theta) \sin(\phi) \dot{\theta} + \dot{r} \sin(\theta) \cos(\phi) \dot{\phi} & (F.2.6) \\
&\quad + \dot{r} \cos(\theta) \sin(\phi) \ddot{\theta} - r \sin(\theta) \sin(\phi) \dot{\theta}^2 + r \cos(\theta) \cos(\phi) \dot{\theta} \dot{\phi} + r \cos(\theta) \sin(\phi) \ddot{\theta} \\
&\quad + \dot{r} \sin(\theta) \cos(\phi) \dot{\phi} + r \cos(\theta) \cos(\phi) \dot{\theta} \dot{\phi} - r \sin(\theta) \sin(\phi) \dot{\phi}^2 + r \sin(\theta) \cos(\phi) \ddot{\phi} \\
&= \ddot{r} \sin(\theta) \sin(\phi) \\
&\quad + \dot{r} \dot{\theta} [\cos(\theta) \sin(\phi) + \cos(\theta) \sin(\phi)] \\
&\quad + \dot{r} \dot{\phi} [\sin(\theta) \cos(\phi) + \sin(\theta) \cos(\phi)] \\
&\quad - r \dot{\theta}^2 \sin(\theta) \sin(\phi) \\
&\quad + r \dot{\theta} \dot{\phi} [\cos(\theta) \cos(\phi) + \cos(\theta) \cos(\phi)] \\
&\quad + r \cos(\theta) \sin(\phi) \ddot{\theta} \\
&\quad - r \dot{\phi}^2 \sin(\theta) \sin(\phi) \\
&\quad + r \sin(\theta) \cos(\phi) \ddot{\phi} \\
&= \ddot{r} \sin(\theta) \sin(\phi) + 2\dot{r} \dot{\theta} \cos(\theta) \sin(\phi) + 2\dot{r} \dot{\phi} \sin(\theta) \cos(\phi) - r \dot{\theta}^2 \sin(\theta) \sin(\phi) \\
&\quad + 2r \dot{\theta} \dot{\phi} \cos(\theta) \cos(\phi) + r \ddot{\theta} \cos(\theta) \sin(\phi) - r \dot{\phi}^2 \sin(\theta) \sin(\phi) + r \ddot{\phi} \sin(\theta) \cos(\phi)
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
\ddot{z} &= \ddot{r} \cos(\theta) - \dot{r} \sin(\theta) \dot{\theta} & (F.2.7) \\
&\quad - \dot{r} \sin(\theta) \ddot{\theta} - r \cos(\theta) \dot{\theta}^2 - r \sin(\theta) \ddot{\theta} \\
&= \ddot{r} \cos(\theta) - 2\dot{r} \sin(\theta) \dot{\theta} - r \cos(\theta) \dot{\theta}^2 - r \sin(\theta) \ddot{\theta}
\end{aligned}$$

Wir setzen in die Gleichung F.2.1 die Gleichungen F.0.8, F.0.9, F.0.10, F.2.5, F.2.6

und F.2.7 ein und ordnen nach  $\mathbf{e}_r$ ,  $\mathbf{e}_\theta$  und  $\mathbf{e}_\phi$ .

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a} &= \ddot{x}\mathbf{e}_x + \ddot{y}\mathbf{e}_y + \ddot{z}\mathbf{e}_z & (\text{F.2.8}) \\
 &= \ddot{x} [\sin(\theta) \cos(\phi) \mathbf{e}_r + \cos(\theta) \cos(\phi) \mathbf{e}_\theta - \sin(\phi) \mathbf{e}_\phi] \\
 &\quad + \ddot{y} [\sin(\theta) \sin(\phi) \mathbf{e}_r + \cos(\theta) \sin(\phi) \mathbf{e}_\theta + \cos(\phi) \mathbf{e}_\phi] \\
 &\quad + \ddot{z} [\cos(\theta) \mathbf{e}_r - \sin(\theta) \mathbf{e}_\theta] \\
 &= [\ddot{x} \sin(\theta) \cos(\phi) + \ddot{y} \sin(\theta) \sin(\phi) + \ddot{z} \cos(\theta)] \mathbf{e}_r \\
 &\quad + [\ddot{x} \cos(\theta) \cos(\phi) + \ddot{y} \cos(\theta) \sin(\phi) - \ddot{z} \sin(\theta)] \mathbf{e}_\theta \\
 &\quad + [-\ddot{x} \sin(\phi) + \ddot{y} \cos(\phi)] \mathbf{e}_\phi
 \end{aligned}$$

Der Übersichtlichkeit halber berechnen wir nun die drei Komponenten  $\mathbf{e}_r$ ,  $\mathbf{e}_\theta$  und  $\mathbf{e}_\phi$  getrennt. Wir beginnen mit  $\mathbf{e}_r$ .

$$a_r = \ddot{x} \sin(\theta) \cos(\phi) + \ddot{y} \sin(\theta) \sin(\phi) + \ddot{z} \cos(\theta) \quad (\text{F.2.9})$$

$$\begin{aligned}
&= \left[ \ddot{r} \sin(\theta) \cos(\phi) + 2\dot{r}\dot{\theta} \cos(\theta) \cos(\phi) - 2\dot{r}\dot{\phi} \sin(\theta) \sin(\phi) - r\dot{\theta}^2 \sin(\theta) \cos(\phi) \right. \\
&\quad \left. - 2r\dot{\phi}\dot{\theta} \cos(\theta) \sin(\phi) + r\ddot{\theta} \cos(\theta) \cos(\phi) \right. \\
&\quad \left. - r\dot{\phi}^2 \sin(\theta) \cos(\phi) - r\ddot{\phi} \sin(\theta) \sin(\phi) \right] \sin(\theta) \cos(\phi) \\
&\quad + \left[ \ddot{r} \sin(\theta) \sin(\phi) + 2\dot{r}\dot{\theta} \cos(\theta) \sin(\phi) + 2\dot{r}\dot{\phi} \sin(\theta) \cos(\phi) \right. \\
&\quad \left. - r\dot{\theta}^2 \sin(\theta) \sin(\phi) + 2r\dot{\theta}\dot{\phi} \cos(\theta) \cos(\phi) \right. \\
&\quad \left. + r \cos(\theta) \sin(\phi) \ddot{\theta} - r\dot{\phi}^2 \sin(\theta) \sin(\phi) + r\ddot{\phi} \sin(\theta) \cos(\phi) \right] \sin(\theta) \sin(\phi) \\
&\quad + \left[ \ddot{r} \cos(\theta) - 2\dot{r}\dot{\theta} \sin(\theta) - r\dot{\theta}^2 \cos(\theta) - r\ddot{\theta} \sin(\theta) \right] \cos(\theta) \\
&= \ddot{r} [\sin(\theta) \cos(\phi) \sin(\theta) \cos(\phi) + \sin(\theta) \sin(\phi) \sin(\theta) \sin(\phi) + \cos(\theta) \cos(\theta)] \\
&\quad + 2\dot{r}\dot{\theta} [\cos(\theta) \cos(\phi) \sin(\theta) \cos(\phi) + \cos(\theta) \sin(\phi) \sin(\theta) \sin(\phi) - \sin(\theta) \cos(\theta)] \\
&\quad + 2\dot{r}\dot{\phi} [-\sin(\theta) \sin(\phi) \sin(\theta) \cos(\phi) + \sin(\theta) \cos(\phi) \sin(\theta) \sin(\phi)] \\
&\quad + r\dot{\theta}^2 [-\sin(\theta) \cos(\phi) \sin(\theta) \cos(\phi) - \sin(\theta) \sin(\phi) \sin(\theta) \sin(\phi) - \cos(\theta) \cos(\theta)] \\
&\quad + 2r\dot{\theta}\dot{\phi} [-\cos(\theta) \sin(\phi) \sin(\theta) \cos(\phi) + \cos(\theta) \cos(\phi) \sin(\theta) \sin(\phi)] \\
&\quad + r\ddot{\theta} [\cos(\theta) \cos(\phi) \sin(\theta) \cos(\phi) + \cos(\theta) \sin(\phi) \sin(\theta) \sin(\phi) - \sin(\theta) \cos(\theta)] \\
&\quad + r\dot{\phi}^2 [-\sin(\theta) \cos(\phi) \sin(\theta) \cos(\phi) - \sin(\theta) \sin(\phi) \sin(\theta) \sin(\phi)] \\
&\quad + r\ddot{\phi} [-\sin(\theta) \sin(\phi) \sin(\theta) \cos(\phi) + \sin(\theta) \cos(\phi) \sin(\theta) \sin(\phi)] \\
&= \ddot{r} [\sin^2(\theta) \cos^2(\phi) + \sin^2(\theta) \sin^2(\phi) + \cos^2(\theta)] \\
&\quad + 2\dot{r}\dot{\theta} [\cos(\theta) \sin(\theta) \cos^2(\phi) + \cos(\theta) \sin(\theta) \sin^2(\phi) - \sin(\theta) \cos(\theta)] \\
&\quad + 2\dot{r}\dot{\phi} [-\sin^2(\theta) \sin(\phi) \cos(\phi) + \sin^2(\theta) \cos(\phi) \sin(\phi)] \\
&\quad + r\dot{\theta}^2 [-\sin^2(\theta) \cos^2(\phi) - \sin^2(\theta) \sin^2(\phi) - \cos^2(\theta)] \\
&\quad + r\ddot{\theta} [\cos(\theta) \sin(\theta) \cos^2(\phi) + \cos(\theta) \sin(\theta) \sin^2(\phi) - \sin(\theta) \cos(\theta)] \\
&\quad + r\dot{\phi}^2 [-\sin^2(\theta) \cos^2(\phi) - \sin^2(\theta) \sin^2(\phi)] \\
&\quad + r\ddot{\phi} [-\sin^2(\theta) \sin(\phi) \cos(\phi) + \sin^2(\theta) \cos(\phi) \sin(\phi)] \\
&= \ddot{r} [\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)] \\
&\quad + 2\dot{r}\dot{\theta} [\cos(\theta) \sin(\theta) - \sin(\theta) \cos(\theta)] \\
&\quad + r\dot{\theta}^2 [-\sin^2(\theta) - \cos^2(\theta)] \\
&\quad + r\ddot{\theta} [\cos(\theta) \sin(\theta) - \sin(\theta) \cos(\theta)] \\
&\quad + r\dot{\phi}^2 [-\sin^2(\theta)] \\
&= \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r \sin^2(\theta) \dot{\phi}^2
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
a_\theta &= \ddot{x} \cos(\theta) \cos(\phi) + \ddot{y} \cos(\theta) \sin(\phi) - \ddot{z} \sin(\theta) \tag{F.2.11} \\
&= \left[ \ddot{r} \sin(\theta) \cos(\phi) + 2\dot{r}\dot{\theta} \cos(\theta) \cos(\phi) - 2\dot{r}\dot{\phi} \sin(\theta) \sin(\phi) - r\dot{\theta}^2 \sin(\theta) \cos(\phi) \right. \\
&\quad \left. - 2r\dot{\phi}\dot{\theta} \cos(\theta) \sin(\phi) + r\ddot{\theta} \cos(\theta) \cos(\phi) - r\dot{\phi}^2 \sin(\theta) \cos(\phi) - r\ddot{\phi} \sin(\theta) \sin(\phi) \right] \cos(\theta) \cos(\phi) \\
&\quad + \left[ \ddot{r} \sin(\theta) \sin(\phi) + 2\dot{r}\dot{\theta} \cos(\theta) \sin(\phi) + 2\dot{r}\dot{\phi} \sin(\theta) \cos(\phi) - r\dot{\theta}^2 \sin(\theta) \sin(\phi) \right. \\
&\quad \left. + 2r\dot{\phi}\dot{\theta} \cos(\theta) \cos(\phi) + r\ddot{\theta} \cos(\theta) \sin(\phi) - r\dot{\phi}^2 \sin(\theta) \sin(\phi) + r\ddot{\phi} \sin(\theta) \cos(\phi) \right] \cos(\theta) \sin(\phi) \\
&\quad - \left[ \ddot{r} \cos(\theta) - 2\dot{r}\dot{\theta} \sin(\theta) - r\dot{\theta} \cos(\theta) - r\ddot{\theta} \sin(\theta) \right] \sin(\theta) \\
&= \ddot{r} [\sin(\theta) \cos(\phi) \cos(\theta) \cos(\phi) + \sin(\theta) \sin(\phi) \cos(\theta) \sin(\phi) - \cos(\theta) \sin(\theta)] \\
&\quad + 2\dot{r}\dot{\theta} [\cos(\theta) \cos(\phi) \cos(\theta) \cos(\phi) + \cos(\theta) \sin(\phi) \cos(\theta) \sin(\phi) + \sin(\theta) \sin(\theta)] \\
&\quad + 2\dot{r}\dot{\phi} [-\sin(\theta) \sin(\phi) \cos(\theta) \cos(\phi) + \sin(\theta) \cos(\phi) \cos(\theta) \sin(\phi)] \\
&\quad + r\dot{\theta}^2 [-\sin(\theta) \cos(\phi) \cos(\theta) \cos(\phi) - \sin(\theta) \sin(\phi) \cos(\theta) \sin(\phi) + \cos(\theta) \sin(\theta)] \\
&\quad + 2r\dot{\phi}\dot{\theta} [-\cos(\theta) \sin(\phi) \cos(\theta) \cos(\phi) + \cos(\theta) \cos(\phi) \cos(\theta) \sin(\phi)] \\
&\quad + r\ddot{\theta} [\cos(\theta) \cos(\phi) \cos(\theta) \cos(\phi) + \cos(\theta) \sin(\phi) \cos(\theta) \sin(\phi) + \sin(\theta) \sin(\theta)] \\
&\quad + r\dot{\phi}^2 [-\sin(\theta) \cos(\phi) \cos(\theta) \cos(\phi) - \sin(\theta) \sin(\phi) \cos(\theta) \sin(\phi)] \\
&\quad + r\ddot{\phi} [-\sin(\theta) \sin(\phi) \cos(\theta) \cos(\phi) + \sin(\theta) \cos(\phi) \cos(\theta) \sin(\phi)] \\
&= \ddot{r} [\sin(\theta) \cos(\theta) \cos^2(\phi) + \sin(\theta) \cos(\theta) \sin^2(\phi) - \cos(\theta) \sin(\theta)] \\
&\quad + 2\dot{r}\dot{\theta} [\cos^2(\theta) \cos^2(\phi) + \cos^2(\theta) \sin^2(\phi) + \sin^2(\theta)] \\
&\quad + r\dot{\theta}^2 [-\sin(\theta) \cos(\theta) \cos^2(\phi) - \sin(\theta) \cos(\theta) \sin^2(\phi) + \cos(\theta) \sin(\theta)] \\
&\quad + r\ddot{\theta} [\cos^2(\theta) \cos^2(\phi) + \cos^2(\theta) \sin^2(\phi) + \sin^2(\theta)] \\
&\quad + r\dot{\phi}^2 [-\sin(\theta) \cos(\theta) \cos^2(\phi) - \sin(\theta) \cos(\theta) \sin^2(\phi)] \\
&= \ddot{r} [\sin(\theta) \cos(\theta) - \cos(\theta) \sin(\theta)] \\
&\quad + 2\dot{r}\dot{\theta} [\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)] \\
&\quad + r\dot{\theta}^2 [-\sin(\theta) \cos(\theta) + \cos(\theta) \sin(\theta)] \\
&\quad + r\ddot{\theta} [\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)] \\
&\quad - r\dot{\phi}^2 [\sin(\theta) \cos(\theta)] \\
&= 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r \sin(\theta) \cos(\theta) \dot{\phi}^2
\end{aligned}$$

und schliesslich

$$\begin{aligned}
 a_\phi &= -\ddot{x} \sin(\phi) + \ddot{y} \cos(\phi) & (F.2.12) \\
 &= -\left[ \ddot{r} \sin(\theta) \cos(\phi) + 2\dot{r}\dot{\theta} \cos(\theta) \cos(\phi) - 2\dot{r}\dot{\phi} \sin(\theta) \sin(\phi) - r\dot{\theta}^2 \sin(\theta) \cos(\phi) \right. \\
 &\quad \left. - 2r\dot{\phi}\dot{\theta} \cos(\theta) \sin(\phi) + r\ddot{\theta} \cos(\theta) \cos(\phi) - r\dot{\phi}^2 \sin(\theta) \cos(\phi) - r\ddot{\phi} \sin(\theta) \sin(\phi) \right] \sin(\phi) \\
 &\quad + \left[ \ddot{r} \sin(\theta) \sin(\phi) + 2\dot{r}\dot{\theta} \cos(\theta) \sin(\phi) + 2\dot{r}\dot{\phi} \sin(\theta) \cos(\phi) - r\dot{\theta}^2 \sin(\theta) \sin(\phi) \right. \\
 &\quad \left. + 2r\dot{\phi}\dot{\theta} \cos(\theta) \cos(\phi) + r\ddot{\theta} \cos(\theta) \sin(\phi) - r\dot{\phi}^2 \sin(\theta) \sin(\phi) + r\ddot{\phi} \sin(\theta) \cos(\phi) \right] \cos(\phi) \\
 &= \ddot{r} [-\sin(\theta) \cos(\phi) \sin(\phi) + \sin(\theta) \sin(\phi) \cos(\phi)] \\
 &\quad + 2\dot{r}\dot{\theta} [-\cos(\theta) \cos(\phi) \sin(\phi) + \cos(\theta) \sin(\phi) \cos(\phi)] \\
 &\quad + 2\dot{r}\dot{\phi} [\sin(\theta) \sin(\phi) \sin(\phi) + \sin(\theta) \cos(\phi) \cos(\phi)] \\
 &\quad + r\dot{\theta}^2 [\sin(\theta) \cos(\phi) \sin(\phi) - \sin(\theta) \sin(\phi) \cos(\phi)] \\
 &\quad + 2r\dot{\phi}\dot{\theta} [\cos(\theta) \sin(\phi) \sin(\phi) + \cos(\theta) \cos(\phi) \cos(\phi)] \\
 &\quad + r\ddot{\theta} [-\cos(\theta) \cos(\phi) \sin(\phi) + \cos(\theta) \sin(\phi) \cos(\phi)] \\
 &\quad + r\dot{\phi}^2 [\sin(\theta) \cos(\phi) \sin(\phi) - \sin(\theta) \sin(\phi) \cos(\phi)] \\
 &\quad + r\ddot{\phi} [\sin(\theta) \sin(\phi) \sin(\phi) + \sin(\theta) \cos(\phi) \cos(\phi)] \\
 &= + 2\dot{r}\dot{\phi} [\sin(\theta) \sin^2(\phi) + \sin(\theta) \cos^2(\phi)] \\
 &\quad + 2r\dot{\phi}\dot{\theta} [\cos(\theta) \sin^2(\phi) + \cos(\theta) \cos^2(\phi)] \\
 &\quad + r\ddot{\phi} [\sin(\theta) \sin^2(\phi) + \sin(\theta) \cos^2(\phi)] \\
 &= + 2\dot{r}\dot{\phi} \sin(\theta) + 2r\dot{\phi}\dot{\theta} \cos(\theta) + r\ddot{\phi} \sin(\theta) \\
 &= [r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi}] \sin(\theta) + 2r\dot{\phi}\dot{\theta} \cos(\theta)
 \end{aligned}$$

Zusammenfassend haben wir

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a} &= a_r \mathbf{e}_r + a_\theta \mathbf{e}_\theta + a_\phi \mathbf{e}_\phi & (F.2.13) \\
 &= \left[ \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r \sin^2(\theta) \dot{\phi}^2 \right] \mathbf{e}_r \\
 &\quad + \left[ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r \sin(\theta) \cos(\theta) \dot{\phi}^2 \right] \mathbf{e}_\theta \\
 &\quad + \left[ (r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi}) \sin(\theta) + 2r\dot{\phi}\dot{\theta} \cos(\theta) \right] \mathbf{e}_\phi
 \end{aligned}$$

### F.2.1. Interpretation

Wir teilen die Beschleunigung in drei Komponenten auf

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_p + \mathbf{a}_z + \mathbf{a}_c \quad (F.2.14)$$

Dies ist in der angegebenen Reihenfolge die Parallelbeschleunigung, die den Betrag der Geschwindigkeit erhöht, die Zentripetalbeschleunigung und die Coriolis-Beschleunigung.

Im Einzelnen haben wir

$$\mathbf{a}_p = \ddot{r}\mathbf{e}_r + r\ddot{\theta}\mathbf{e}_\theta + r\sin(\theta)\ddot{\phi}\mathbf{e}_\phi \quad (\text{F.2.15})$$

$$\mathbf{a}_z = -r\left[\dot{\theta}^2 + \sin^2(\theta)\dot{\phi}^2\right]\mathbf{e}_r - r\sin(\theta)\cos(\theta)\dot{\phi}^2\mathbf{e}_\theta \quad (\text{F.2.16})$$

$$\mathbf{a}_c = 2\dot{r}\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + 2\left[\dot{r}\sin(\theta) + r\dot{\theta}\cos(\theta)\right]\dot{\phi}\mathbf{e}_\phi \quad (\text{F.2.17})$$



# G. Berechnungen in ebenen schiefwinkligen Dreiecken

(Siehe Bronstein, Taschenbuch der Mathematik [Bro+08, pp. 146])

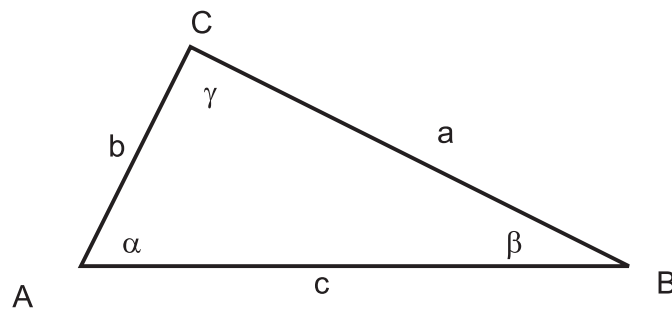


Abb. G.1.: DREIECK

**halber Dreiecksumfang**  $s = \frac{a+b+c}{2}$

**Radius des Umkreises**  $R = \frac{a}{2 \sin \alpha} = \frac{b}{2 \sin \beta} = \frac{c}{2 \sin \gamma}$

**Radius des Inkreises**  $r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}} = s \tan \frac{\alpha}{2} \tan \frac{\beta}{2} \tan \frac{\gamma}{2} = 4R \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}$

**Flächeninhalt**  $S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma = 2R^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma = rs = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

**Sinussatz**  $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$   
 $R$  ist der Umkreisradius

**Projektionssatz**  $c = a \cos \beta + b \cos \alpha$

**Kosinussatz oder Satz des Pythagoras im schiefwinkligen Dreieck**  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$

**Mollweidsche Gleichungen**  $(a+b) \sin \frac{\gamma}{2} = c \cos \left( \frac{\alpha-\beta}{2} \right)$   
 $(a-b) \cos \frac{\gamma}{2} = c \sin \left( \frac{\alpha-\beta}{2} \right)$

**Tangenssatz**  $\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan \frac{\alpha+\beta}{2}}{\tan \frac{\alpha-\beta}{2}}$

**Halbwinkelsatz**  $\tan \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$

**Tangensformeln**  $\tan \alpha = \frac{a \sin \beta}{c-a \cos \beta} = \frac{a \sin \gamma}{b-a \cos \gamma}$

**Beziehungen für halbe Winkel**  $\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$   
 $\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$

(Siehe Bronstein, Taschenbuch der Mathematik [Bro+08, pp. 148])

	gegeben	Formeln
1.	1 Seite und 2 Winkel ( $a, \alpha, \beta$ )	$\gamma = \pi - \alpha - \beta$ , $b = \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha}$ , $c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha}$ , $S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$
2.	2 Seiten und der eingeschlossene Winkel ( $a, b, \gamma$ )	$\tan \frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{a-b}{a+b} \cot \frac{\gamma}{2}$ , $\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}$ $\alpha$ und $\beta$ werden aus $\alpha + \beta$ und $\alpha - \beta$ berechnet. $c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha}$ , $S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$
3.	2 Seiten und der einer von ihnen gegenüberliegende Winkel ( $a, b, \alpha$ )	$\sin \beta = \frac{b \sin \alpha}{a}$ Für $a \geq b$ ist $\beta < \frac{\pi}{2}$ und eindeutig bestimmt. Für $a < b$ sind die folgenden Fälle möglich: <ol style="list-style-type: none"> <li>1. <math>\beta</math> hat für <math>b \sin \alpha &lt; a</math> zwei Werte <math>\beta_2 = \pi - \beta_1</math></li> <li>2. <math>\beta</math> hat genau einen Wert (<math>\frac{\pi}{2}</math>) für <math>b \sin \alpha = a</math></li> <li>3. Für <math>b \sin \alpha &gt; a</math> ist es unmöglich, ein DREIECK zu konstruieren.</li> </ol> $\gamma = \pi - \alpha - \beta$ $c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha}$ $S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$
4.	3 Seiten ( $a, b, c$ )	$r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$ , $\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{r}{s-a}$ , $\tan \frac{\beta}{2} = \frac{r}{s-b}$ , $\tan \frac{\gamma}{2} = \frac{r}{s-c}$ , $S = rs = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

**Tab. G.1.:** Formeln für schiefwinklige ebene Dreiecke

## H. Berechnung der Ableitung in rotierenden Bezugssystemen

Hier werden Ableitungen in rotierenden Bezugssystemen betrachtet. Der Maple Quelltext ist:

```
> with(LinearAlgebra):
> with(VectorCalculus):
> with(tensor):
> SetCoordinates( 'cartesian'[x,y,z] ):
>
>
> AA := Matrix(3,3,[[cos(omegaz*t), sin(omegaz*t),0],
>                  [-sin(omegaz*t),cos(omegaz*t),0],
>                  [0,0,1]]);
>
> AAinv := MatrixInverse(AA);
> omega := <0,0,omegaz>;
> s := <R*cos(3*omegaz*t),R*sin(3*omegaz*t),rz>;
> sp := convert(MatrixVectorMultiply(AA,s),arctrig);
> res1 :=diff(s,t);
> CrossProduct(omega,s);
> tr1 :=diff(sp,t);
> tr2 := simplify(MatrixVectorMultiply(AAinv,tr1));
> res2 := tr2+CrossProduct(omega,s);
> rr :=simplify(res2-res1);
>
```

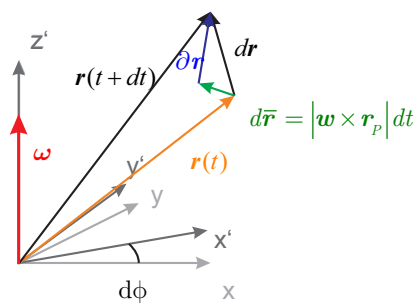
Der Mathematica-Quelltext ist

```

AA =  $\begin{pmatrix} \cos(t\omega_z) & \sin(t\omega_z) & 0 \\ -\sin(t\omega_z) & \cos(t\omega_z) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 
AAinv = Simplify[MatrixPower[AA, -1]]
Simplify[AAinv.AA]
 $\omega = \{0, 0, \omega_z\}$ 
 $s = \{f_x(t), f_y(t), f_z(t)\}$ 
sp = AA.s
res1 =  $\frac{\partial s}{\partial t}$ 
cp =  $\omega \times s$ 
tr1 = Simplify  $\left[ \frac{\partial sp}{\partial t} \right]$ 
tr2 = Simplify[AAinv.tr1]
res2 = cp + tr2
rr = res2 - res1
res3falsch = Simplify[cp + tr1]
```

Hier ist angenommen worden, dass der Rotationsvektor  $\omega$  entlang der  $z$ -Richtung des Koordinatensystems angeordnet ist. Dann transformiert die Matrix  $AA$  einen Vektor aus dem Laborsystem in das rotierende Bezugssystem.  $AAinv$  transformiert zurück.  $s$  ist der zeitabhängige Ortsvektor.  $sp$  ist der Ortsvektor transformiert in das rotierende Bezugssystem.  $tr1$  ist die Ableitung von  $sp$  im rotierenden Bezugssystem.  $tr2$  ist  $tr1$  zurücktransformiert in das Laborsystem.

#### Zusammenfassung



**Abb. H.1.:** Beziehung zwischen den Ableitungen

Gleichung

$$d\mathbf{r} = \partial\mathbf{r} + d\bar{\mathbf{r}} = \partial\mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} dt \quad (\text{H.0.1})$$

gilt dann, wenn die Ableitung im rotierenden Bezugssystem zurück nach dem Laborsystem transformiert ist.

$$AA = \begin{pmatrix} \cos(\omega_z t) & \sin(\omega_z t) & 0 \\ -\sin(\omega_z t) & \cos(\omega_z t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A$$

$$AAInv = \begin{pmatrix} \cos(\omega_z t) & -\sin(\omega_z t) & 0 \\ \sin(\omega_z t) & \cos(\omega_z t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} R \cos(3\omega_z t) \\ R \sin(3\omega_z t) \\ r_z \end{pmatrix} \quad \text{allgemein:} \quad \mathbf{s} = \begin{pmatrix} f_x(t) \\ f_y(t) \\ f_z(t) \end{pmatrix}$$

Nach der Transformation ins rotierende Bezugssystem erhält man

$$\mathbf{s}\mathbf{p} = \begin{pmatrix} R \cos(2\omega_z t) \\ R \sin(2\omega_z t) \\ r_z \end{pmatrix} \quad \text{allgemein:} \quad \mathbf{s}' = \begin{pmatrix} \cos(\omega_z t)f_x(t) + \sin(\omega_z t)f_y(t) \\ \cos(\omega_z t)f_y(t) - \sin(\omega_z t)f_x(t) \\ f_z(t) \end{pmatrix}.$$

Die Ableitungen im Laborsystem sind

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} = 3\omega_z R \begin{pmatrix} -\sin(3\omega_z t) \\ \cos(3\omega_z t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{allgemein:} \quad \frac{d\mathbf{s}}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt}f_x(t) \\ \frac{d}{dt}f_y(t) \\ \frac{d}{dt}f_z(t) \end{pmatrix}$$

und im rotierenden Bezugssystem (gestrichenes Bezugssystem)

$$\frac{d\mathbf{s}\mathbf{p}}{dt} = 2\omega_z R \begin{pmatrix} -\sin(2\omega_z t) \\ \cos(2\omega_z t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

allgemein:

$$\frac{d\mathbf{s}'}{dt} = \begin{pmatrix} \cos(\omega_z t)\frac{d}{dt}f_x(t) + \sin(\omega_z t)\frac{d}{dt}f_y(t) - \omega_z \sin(\omega_z t)f_x(t) + \omega_z \cos(\omega_z t)f_y(t) \\ -\sin(\omega_z t)\frac{d}{dt}f_x(t) + \cos(\omega_z t)\frac{d}{dt}f_y(t) - \omega_z \cos(\omega_z t)f_x(t) - \omega_z \sin(\omega_z t)f_y(t) \\ \frac{d}{dt}f_z(t) \end{pmatrix}$$

Zurücktransformiert ins Laborsystem mit  $A^{-1}\frac{d\mathbf{s}'}{dt}$  erhält man

$$\frac{\partial\mathbf{s}}{\partial t} = 2\omega_z R \begin{pmatrix} -\sin(3\omega_z t) \\ \cos(3\omega_z t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{allgemein:} \quad \frac{\partial\mathbf{s}}{\partial t} = \begin{pmatrix} \omega_z f_y(t) + \frac{d}{dt}f_x(t) \\ -\omega_z f_x(t) + \frac{d}{dt}f_y(t) \\ \frac{d}{dt}f_z(t) \end{pmatrix}$$

Das Kreuzprodukt ist

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{s} = \omega_z R \begin{pmatrix} -\sin(3\omega_z t) \\ \cos(3\omega_z t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{allgemein:} \quad \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{s} = \begin{pmatrix} -\omega_z f_y(t) \\ \omega_z f_x(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{s} &= 2\omega_z R \begin{pmatrix} -\sin(3\omega_z t) \\ \cos(3\omega_z t) \\ 0 \end{pmatrix} + \omega_z R \begin{pmatrix} -\sin(3\omega_z t) \\ \cos(3\omega_z t) \\ 0 \end{pmatrix} = 3\omega_z R \begin{pmatrix} -\sin(3\omega_z t) \\ \cos(3\omega_z t) \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{d\mathbf{s}}{dt} \\ &\text{allgemein:} \\ \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{s} &= \begin{pmatrix} \omega_z f_y(t) + \frac{d}{dt}f_x(t) \\ -\omega_z f_x(t) + \frac{d}{dt}f_y(t) \\ \frac{d}{dt}f_z(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\omega_z f_y(t) \\ \omega_z f_x(t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt}f_x(t) \\ \frac{d}{dt}f_y(t) \\ \frac{d}{dt}f_z(t) \end{pmatrix} = \frac{d\mathbf{s}}{dt} \end{aligned}$$

so dass sowohl im Spezialfall wie auch allgemein gilt

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{s}$$

gilt. Wäre  $\frac{d\mathbf{s}'}{dt}$  nicht ins Laborsystem zurücktransformiert worden, hätte man

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{s} &= \begin{pmatrix} \frac{d}{dt}f_x(t) \cos(t\omega_z) - \omega_z f_x(t) \sin(t\omega_z) + \frac{d}{dt}f_y(t) \sin(t\omega_z) + \omega_z f_y(t) (\cos(t\omega_z) - 1) \\ -\frac{d}{dt}f_x(t) \sin(t\omega_z) + f_x(t)\omega_z (1 - \cos(t\omega_z)) + \frac{d}{dt}f_y(t) \cos(t\omega_z) - \omega_z f_y(t) \sin(t\omega_z) \\ \frac{d}{dt}f_z(t) \end{pmatrix} \\ &\quad \text{(H.0.2)} \end{aligned}$$

erhalten, was nicht das Resultat im Laborsystem ist.

Wenn mit Vektoren in der Darstellung eines Koordinatensystems gerechnet wird, müssen alle Vektoren im gleichen Koordinatensystem dargestellt werden!

# I. Drehungen

## I.1. Drehmatrizen

Eine Drehung um die  $x$ -Achse beschrieben durch den Vektor  $\mathbf{e}_x = (1, 0, 0)^T$  um den Winkel  $\alpha$  wird durch die Matrix

$$\mathbf{R}_x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \quad (\text{I.1.1})$$

die Transformation ausgeführt. Für eine Drehung um die  $y$ -Achse beschrieben durch den Vektor  $\mathbf{e}_y = (0, 1, 0)^T$  um den Winkel  $\beta$  wird durch die Matrix

$$\mathbf{R}_y(\beta) = \begin{pmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{pmatrix} \quad (\text{I.1.2})$$

die Transformation ausgeführt. Schliesslich wird eine Drehung um die  $z$ -Achse beschrieben durch den Vektor  $\mathbf{e}_z = (0, 0, 1)^T$  um den Winkel  $\gamma$  wird durch die Matrix

$$\mathbf{R}_z(\gamma) = \begin{pmatrix} \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) & 0 \\ \sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{I.1.3})$$

ausgeführt.

Der Vektor  $\mathbf{r} = (x, y, z)^T$  soll um den Winkel  $\alpha$  um die  $x$ -Achse gedreht werden. Dies wird mit der Operation

$$\mathbf{r}' = \mathbf{R}_x(\alpha)\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \cos(\alpha) - z \sin(\alpha) \\ y \sin(\alpha) + z \cos(\alpha) \end{pmatrix} \quad (\text{I.1.4})$$

bewerkstelligt. Im Allgemeinen wird eine Drehung durch die Multiplikation des Vektors von links mit einer Matrix beschrieben.

Die Drehung zurück wird (antisymmetrische reelle Matrix mit der Determinante 1) wird durch die inverse Matrix oder die transponierte Matrix beschrieben. Alternativ kann man auch  $\alpha$  durch  $-\alpha$  ersetzen.

$$\mathbf{R}_x(-\alpha) = \mathbf{R}_x^T(\alpha) = \mathbf{R}_x^{-1}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ 0 & -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \quad (\text{I.1.5})$$

Eine Drehung um einen beliebigen Vektor  $\mathbf{r}_\alpha = (x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha)^T$  mit  $x_\alpha^2 + y_\alpha^2 + z_\alpha^2 = 1$  wird durch

$$R_{(x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha)^T}(\alpha) = \begin{pmatrix} x_\alpha^2 + \cos(\alpha)(y_\alpha^2 + z_\alpha^2) & -x_\alpha y_\alpha \cos(\alpha) + x_\alpha y_\alpha - z_\alpha \sin(\alpha) & -x_\alpha z_\alpha \cos(\alpha) + x_\alpha z_\alpha + y_\alpha \sin(\alpha) \\ -x_\alpha y_\alpha \cos(\alpha) + x_\alpha y_\alpha + z_\alpha \sin(\alpha) & \cos(\alpha)(x_\alpha^2 + z_\alpha^2) + y_\alpha^2 & -x_\alpha \sin(\alpha) - y_\alpha z_\alpha \cos(\alpha) + y_\alpha z_\alpha \\ -x_\alpha z_\alpha \cos(\alpha) + x_\alpha z_\alpha - y_\alpha \sin(\alpha) & x_\alpha \sin(\alpha) - y_\alpha z_\alpha \cos(\alpha) + y_\alpha z_\alpha & \cos(\alpha)(x_\alpha^2 + y_\alpha^2) + z_\alpha^2 \end{pmatrix} \quad (\text{I.1.6})$$

beschrieben [Wol14]. Die Drehung ist bei positivem  $\alpha$  rechtshändig bezüglich der Richtung von  $\mathbf{r}_\alpha$  (Der Daumen zeigt in die Richtung von  $\mathbf{r}_\alpha$ , die Finger geben die Drehrichtung).

## I.2. Drehung von Vektoren und Matrizen (oder Tensoren)

Sei  $R_{e_\alpha}(\alpha)$  die Drehmatrix. Dann ist der aus  $\mathbf{r}$  hervorgegangene um die Achse  $\mathbf{e}_\alpha$  und den Winkel  $\alpha$  gedrehte Vektor

$$\mathbf{r}' = R_{e_\alpha}(\alpha)\mathbf{r} \quad (\text{I.2.1})$$

Ein Beispiel dafür ist in (I.1.4) gezeigt.

Die aus der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} A_{xx} & A_{xy} & A_{xz} \\ A_{yx} & A_{yy} & A_{yz} \\ A_{zx} & A_{zy} & A_{zz} \end{pmatrix}$$

hervorgegangene um die Achse  $\mathbf{e}_\alpha$  und den Winkel  $\alpha$  gedrehte Matrix ist

$$A' = R_{e_\alpha}(\alpha)AR_{e_\alpha}^T(\alpha). \quad (\text{I.2.2})$$

Die Drehung zurück ist dann

$$R_{e_\alpha}(-\alpha)A'R_{e_\alpha}^T(-\alpha) = R_{e_\alpha}^T(\alpha)A'R_{e_\alpha}(\alpha) = R_{e_\alpha}^T(\alpha)R_{e_\alpha}(\alpha)AR_{e_\alpha}^T(\alpha)R_{e_\alpha}(\alpha) = A \quad (\text{I.2.3})$$

Wenn wir als Beispiel die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ -b & c & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$

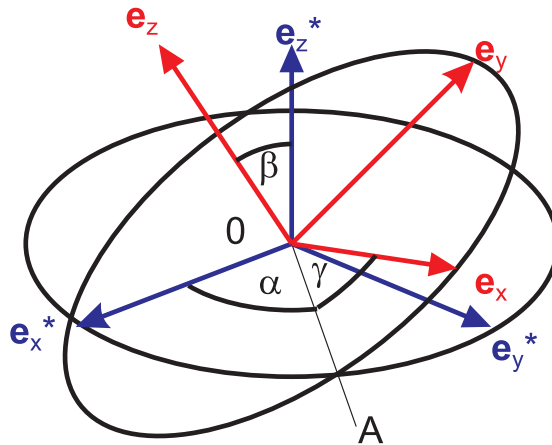
um  $\mathbf{e}_\alpha = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T$  drehen, erhalten wir



$$\begin{aligned}
\mathbf{A}' &= \mathbf{R}_{(1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2})^T}(\alpha) \mathbf{A} \mathbf{R}_{(1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2})^T}^T(\alpha) & (I.2.4) \\
&= \mathbf{R}_{(1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2})^T}(\alpha) \mathbf{A} \mathbf{R}_{(1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2})^T}(-\alpha) \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\cos(\alpha) + 1) & \frac{\sin(\alpha)}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2}(\cos(\alpha) - 1) \\ -\frac{\sin(\alpha)}{\sqrt{2}} & \cos(\alpha) & -\frac{\sin(\alpha)}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2}(\cos(\alpha) - 1) & \frac{\sin(\alpha)}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2}(\cos(\alpha) + 1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ -b & c & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\cos(\alpha) + 1) & -\frac{\sin(\alpha)}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2}(\cos(\alpha) - 1) \\ \frac{\sin(\alpha)}{\sqrt{2}} & \cos(\alpha) & \frac{\sin(\alpha)}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2}(\cos(\alpha) - 1) & -\frac{\sin(\alpha)}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2}(\cos(\alpha) + 1) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\cos(\alpha) + 1) & \frac{\sin(\alpha)}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2}(\cos(\alpha) - 1) \\ -\frac{\sin(\alpha)}{\sqrt{2}} & \cos(\alpha) & -\frac{\sin(\alpha)}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2}(\cos(\alpha) - 1) & \frac{\sin(\alpha)}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2}(\cos(\alpha) + 1) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a(\cos(\alpha) + 1) + \frac{b\sin(\alpha)}{\sqrt{2}} & b\cos(\alpha) - \frac{a\sin(\alpha)}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2}a(\cos(\alpha) - 1) + \frac{b\sin(\alpha)}{\sqrt{2}} \\ \frac{c\sin(\alpha)}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}b(\cos(\alpha) + 1) & \frac{b\sin(\alpha)}{\sqrt{2}} + c\cos(\alpha) & \frac{c\sin(\alpha)}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}b(\cos(\alpha) - 1) \\ \frac{1}{2}d(\cos(\alpha) - 1) & -\frac{d\sin(\alpha)}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2}d(\cos(\alpha) + 1) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{4}((a+d)\cos^2(\alpha) + 2(a-d)\cos(\alpha) + a + 2c\sin^2(\alpha) + d) & 0 & 0 \\ \frac{1}{4}(-\sqrt{2}\sin(\alpha)(\cos(\alpha)(a-2c+d) + a-d) - 2b(\cos(\alpha)+1)) & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4}\sin(\alpha)(\sin(\alpha)(a-2c+d) + 2\sqrt{2}b) & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4}(2b(\cos(\alpha)+1) - \sqrt{2}\sin(\alpha)(\cos(\alpha)(a-2c+d) + a-d)) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(a+d)\sin^2(\alpha) + c\cos^2(\alpha) & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}(-\sqrt{2}\sin(\alpha)(\cos(\alpha)(a-2c+d) - a+d) - 2b(\cos(\alpha)-1)) & 0 \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{4}\sin(\alpha)(\sin(\alpha)(a-2c+d) - 2\sqrt{2}b) \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}(2b(\cos(\alpha)-1) - \sqrt{2}\sin(\alpha)(\cos(\alpha)(a-2c+d) - a+d)) \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}(\cos(\alpha)((a+d)\cos(\alpha) - 2a + 2d) + a + 2c\sin^2(\alpha) + d) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

### I.3. Allgemeine Drehung mit Eulerwinkeln

Das KOORDINATENSYSTEM  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$  geht durch drei Drehungen aus dem KOORDINATENSYSTEM  $\mathbf{e}_x^*, \mathbf{e}_y^*, \mathbf{e}_z^*$  hervor.



**Abb. I.1.:** Definition der Eulerschen Winkel

Die Eulerschen Winkel sind

1. Drehung um  $e_z^*$  :  $\alpha$
2. Drehung um  $OA$  :  $\beta$
3. Drehung um  $e_z$  :  $\gamma$

Dabei  $\overline{OA}$  steht senkrecht zur Ebene aufgespannt durch  $e_z$  und  $e_z^*$ .  
Die Reihenfolge der Drehungen ist

1. Drehung: Bringe  $e_x^*$  senkrecht zu  $e_z$  (In der Abbildung I.3 zeigen die Kreise die Ebenen senkrecht zu  $e_z^*$  und senkrecht zu  $e_z$  Die Schnittlinie der beiden Kreise ist  $\overline{OA}$ .)
2. Drehung: Bringe  $z$ -Achse in richtige Lage
3. Drehung: Bringe  $x,y$ -Achsen in die richtige Lage.

# J. Berechnung elektrischer Felder

## J.1. In der Nähe eines Leiterstückes

Entlang der  $x$ -Achse von  $x = 0$  bis  $x = \ell$  sei die LADUNG  $Q$  homogen verteilt. Zu berechnen ist das elektrische Feld für einen Punkt  $P = (\xi, 0, 0)$  auf der  $x$ -Achse!

Die Linienladungsdichte ist

$$\lambda = \frac{Q}{\ell}$$

Das elektrische Feld bei  $P$  ist

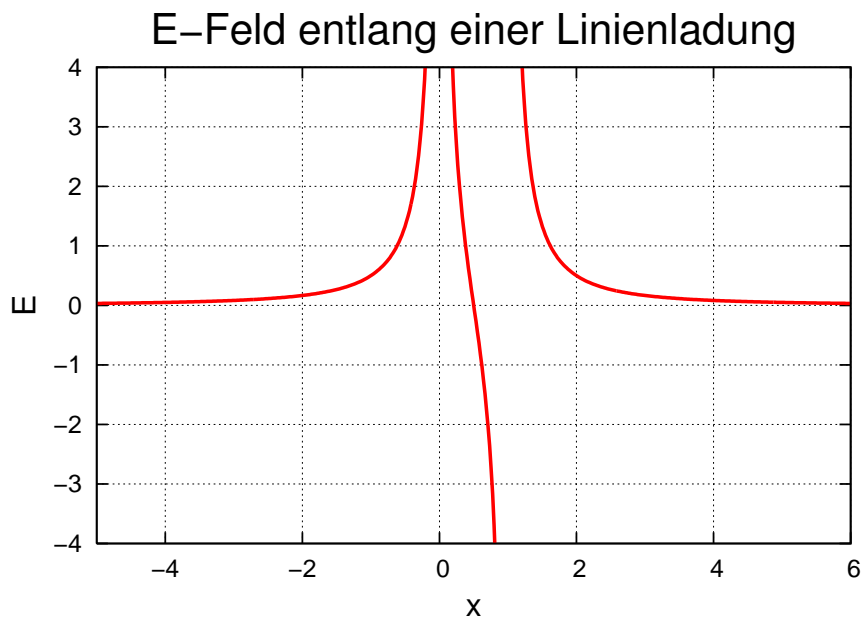
$$dE_x(x, \xi) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda(x - \xi) d\xi}{|x - \xi|^3}$$

Wir integrieren über die Länge des Drahtes

$$E_x(\xi) = \int_0^\ell dE_x(x, \xi) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \cdot \begin{cases} \int_0^\ell \frac{d\xi}{(x - \xi)^2}, & \text{für } x > \ell \text{ oder } x < 0; \\ \int_0^x \frac{d\xi}{(x - \xi)^2} - \int_x^\ell \frac{d\xi}{(x - \xi)^2}, & \text{für } 0 < x < \ell. \end{cases}$$

Die Lösung dieser Gleichung ist

$$E_x(x) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 x(x - \ell)} \begin{cases} \frac{\lambda\ell}{4\pi\epsilon_0 x(x - \ell)}, & \text{für } x > \ell \text{ oder } x < 0; \\ \frac{\lambda(2x - \ell)}{4\pi\epsilon_0 x(x - \ell)}, & \text{für } 0 < x < \ell. \end{cases}$$



**Abb. J.1.:** Elektrisches Feld entlang einer Linienladung.

Wir berechnen nun das elektrische Feld entlang der Mittelsenkrechten einer Linienladung der Länge  $\ell$ . Zur Berechnung legen wir das Koordinationssystem so, dass die Ladungsverteilung von  $-\frac{\ell}{2}$  bis  $\frac{\ell}{2}$  reicht. Aus Symmetriegründen existiert auf der Mittelsenkrechten keine Komponente in  $x$ -Richtung. Wir betrachten also die Komponente entlang  $y$ . Am Punkt  $P = (0, y, 0)$  ist

$$dE_y(y) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} y$$

Ebenso ist

$$E_y(y) = \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{y}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} dx = \frac{\lambda y}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} \frac{dx}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Nach Bronstein[Bro+08] ist

$$\int \frac{dx}{X^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{a^2 \sqrt{X}}$$

mit  $X = x^2 + a^2$ . Daraus folgt

$$\begin{aligned}
 E_y(y) &= \frac{\lambda y}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{x}{y^2\sqrt{x^2+y^2}} \right) \Big|_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} \\
 &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 y} \left( \frac{\ell}{2\sqrt{\frac{\ell^2}{4}+y^2}} + \frac{\ell}{2\sqrt{\frac{\ell^2}{4}+y^2}} \right) \\
 &= \frac{\lambda\ell}{4\pi\epsilon_0 y} \frac{1}{\sqrt{y^2+\frac{\ell^2}{4}}} \\
 &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{y\sqrt{y^2+\frac{\ell^2}{4}}}
 \end{aligned}$$

Für  $y \gg \ell$  bekommt man

$$E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda\ell}{y^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 y^2}$$

Für  $y \ll -\ell$  bekommt man

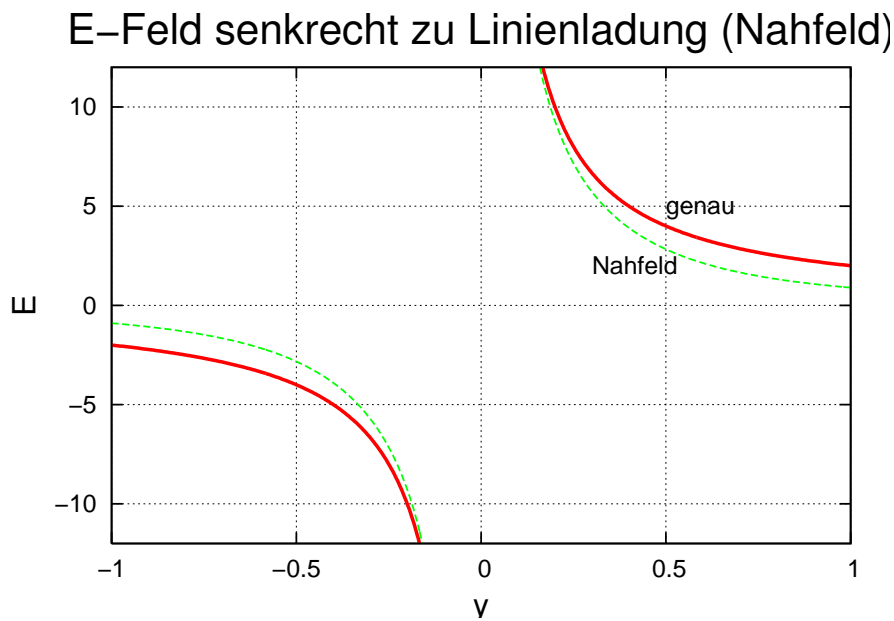
$$E_y = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda\ell}{y^2} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 y^2}$$

Wenn die Linienladung «unendlich» ausgedehnt ist, gilt

$$y \ll \ell$$

Dann ist

$$E_y \approx \frac{\lambda\ell}{4\pi\epsilon_0 y} \frac{1}{\sqrt{\frac{\ell^2}{4}}} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 |y|} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 \ell |y|}$$



**Abb. J.2.:** Elektrisches Feld senkrecht zu einer Linienladung.

## J.2. Auf der Symmetrieachse einer Kreisscheibe

Zur Berechnung setzen wir die Flächenladungsdichte auf

$$\sigma = \frac{g}{\pi r^2}$$

Das elektrische Feld auf der Symmetrieachse kann nur parallel zu dieser sein. Wir setzen also an

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma \hat{r} d\hat{r} d\varphi}{(\hat{r}^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} x$$

Also ist

$$E_x = \int_0^{2\pi} \int_0^r \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma \hat{r} x d\hat{r} d\varphi}{(\hat{r}^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sigma x}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^r \frac{\hat{r} d\hat{r} d\varphi}{(\hat{r}^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \int_0^r \frac{\hat{r} d\hat{r}}{(\hat{r}^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Nach Bronstein ist

$$\int \frac{r dr}{\sqrt{(r^2 + x^2)^3}} = -\frac{1}{\sqrt{r^2 + x^2}}$$

Also ist

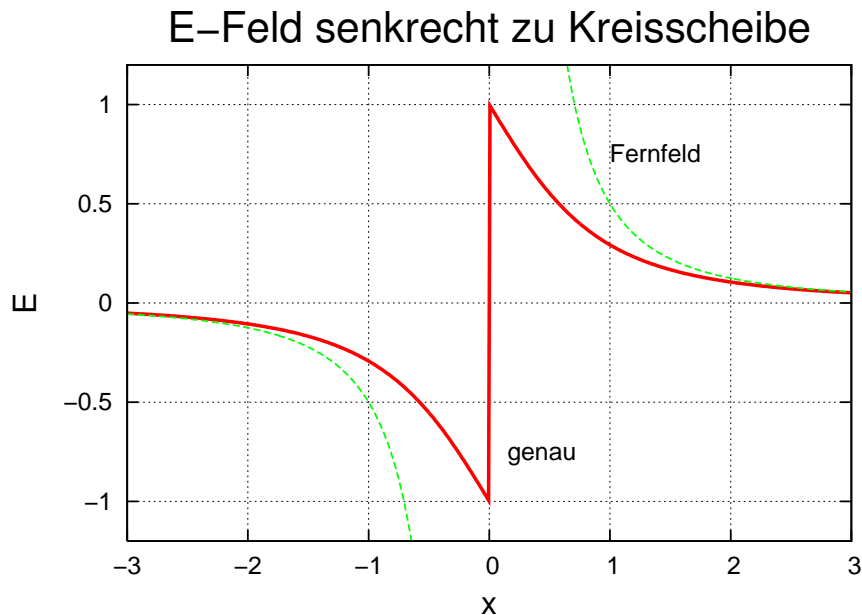
$$\begin{aligned}
 E_x &= \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0} \left( -\frac{1}{\sqrt{\hat{r}^2 + x^2}} \right) \Big|_0^r \\
 &= \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0} \left( -\frac{1}{\sqrt{r^2 + x^2}} + \frac{1}{|x|} \right) \\
 &= -\frac{\sigma x}{2\varepsilon_0} \cdot \frac{|x| - \sqrt{r^2 + x^2}}{|x| \sqrt{r^2 + x^2}} \\
 &= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \cdot \frac{x}{|x|} \cdot \frac{\sqrt{r^2 + x^2} - |x|}{\sqrt{r^2 + x^2}}
 \end{aligned}$$

Für  $|x| \gg r$  ist

$$\sqrt{r^2 + |x|^2} - |x| = |x| \left( \sqrt{1 + \frac{r^2}{x^2}} \right) - |x| = |x| \left( 1 + \frac{r^2}{2x^2} \right) - |x| = \frac{r^2}{2x^2}$$

und damit

$$E_x = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0} \frac{r^2}{x^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}$$



**Abb. J.3.:**  $\mathbf{E}$ -Feld einer homogen geladenen Kreisscheibe entlang einer Senkrechten durch den Mittelpunkt.

### J.3. Innerhalb und ausserhalb einer geladenen Zylinderfläche

Der Zylindermantel habe den Radius  $R$ , die Flächenladungsdichte sei  $\sigma$ . Wir betrachten eine Zylinderfläche coaxial zur geladenen Fläche mit dem Radius  $r < R$ . Das  $\mathbf{E}$ -Feld ist aus Symmetriegründen radial symmetrisch. Der Fluss durch die Fläche ist:

$$\phi = \iint_{\text{Fläche}} E_n da = E_r \iint_{\text{Fläche}} da = E_r \cdot 2\pi r \ell = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Da keine LADUNG umschlossen wird, ist

$$E_r = 0, \quad r < R$$

Für  $r > R$  gilt

$$E_r \cdot 2\pi r \ell = \frac{\sigma \cdot 2\pi R \ell}{\varepsilon_0}$$

oder

$$E_r = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0 r}$$



**Abb. J.4.:** LADUNG senkrecht zu einem Kreiszylinder.



## J.4. In allen Bereichen zweier koaxialer zylinderförmiger Leiter

Nach Abschnitt J.3 ist  $E_r = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0}$  wenn die Ladungsdichte  $\sigma$  auf der Zylinderschale mit  $R < r$  aufgebracht ist. Wir betrachten zwei konzentrische Zylinder mit den Radien  $R_1 < R_2$  und deren Oberflächenladungsdichten  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$ . Für  $r < R_1$  gilt

$$E_r = 0 \text{ für } r < R_1$$

Für  $R_1 < r < R_2$  existiert allein das Feld des inneren Kreiszyllinders. Also ist dort:

$$E_r = \frac{\sigma_1 R_1}{\varepsilon_0 r} \text{ für } R_1 < r < R_2$$

Schliesslich ist für  $r > R_2$ :

$$E_r = \frac{\sigma_1 R_1}{\varepsilon_0 r} + \frac{\sigma_2 R_2}{\varepsilon_0 r} = \frac{\sigma_1 R_1 + \sigma_2 R_2}{\varepsilon_0 r} \text{ für } r > R_2$$

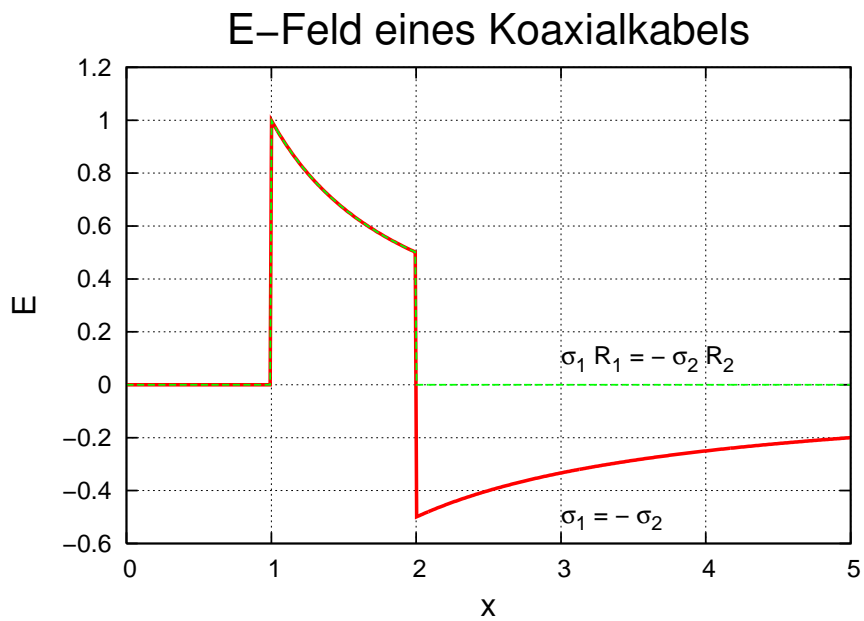
wobei hier die Additivität elektrischer Felder benutzt wurde. Wenn für  $r > R_2$   $E_r = 0$  sein soll, muss gelten

$$\sigma_1 R_1 + \sigma_2 R_2 = 0$$

oder

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = -\frac{R_2}{R_1}$$

.



**Abb. J.5.:** Elektrische Felder bei einem Koaxialkabel, wobei einmal (dünne Linie) die Oberflächenladungsdichten  $\sigma_i$  vom Betrage nach gleich und einmal (dicke Linie) die Produkte  $R_i \cdot \sigma_i$  dem Betrage nach gleich sind.

# K. Lorentztransformationen

## K.1. Lorentztransformationen für die magnetische Induktion

Bewegung entlang der  $x$ -Richtung

$$\begin{aligned}E'_x &= E_x \\E'_y &= \gamma(v_x) (E_y - v_x \cdot B_z) \\E'_z &= \gamma(v_x) (E_z + v_x \cdot B_y) \\B'_x &= B_x \\B'_y &= \gamma(v_x) \left( B_y + \frac{v_x}{c^2} E_z \right) \\B'_z &= \gamma(v_x) \left( B_z - \frac{v_x}{c^2} E_y \right)\end{aligned}$$

Bewegung entlang der  $y$ -Richtung

$$\begin{aligned}E'_x &= \gamma(v_y) (E_x + v_y \cdot B_z) \\E'_y &= E_y \\E'_z &= \gamma(v_y) (E_z - v_y \cdot B_x) \\B'_x &= \gamma(v_y) \left( B_x - \frac{v_y}{c^2} E_z \right) \\B'_y &= B_y \\B'_z &= \gamma(v_y) \left( B_z + \frac{v_y}{c^2} E_x \right)\end{aligned}$$

Bewegung entlang der  $z$ -Richtung

$$\begin{aligned}E'_x &= \gamma(v_z) (E_x - v_z \cdot B_y) \\E'_y &= \gamma(v_z) (E_y + v_z \cdot B_x) \\E'_z &= E_z \\B'_x &= \gamma(v_z) \left( B_x + \frac{v_z}{c^2} E_y \right) \\B'_y &= \gamma(v_z) \left( B_y - \frac{v_z}{c^2} E_x \right) \\B'_z &= B_z\end{aligned}$$

## K.2. Lorentztransformation für das magnetische Feld

Bewegung entlang der  $x$ -Richtung

$$\begin{aligned}
 E'_x &= E_x \\
 E'_y &= \gamma(v_x) \left( E_y - \frac{v_x}{c^2} \frac{1}{\varepsilon_0} H_z \right) \\
 E'_z &= \gamma(v_x) \left( E_z + \frac{v_x}{c^2} \frac{1}{\varepsilon_0} H_y \right) \\
 H'_x &= H_x \\
 H'_y &= \gamma(v_x) (H_y + v_x \varepsilon_0 E_z) \\
 H'_z &= \gamma(v_x) (H_z - v_x \varepsilon_0 E_y)
 \end{aligned}$$

Bewegung entlang der  $y$ -Richtung

$$\begin{aligned}
 E'_x &= \gamma(v_y) \left( E_x + \frac{v_y}{c^2} \frac{1}{\varepsilon_0} H_z \right) \\
 E'_y &= E_y \\
 E'_z &= \gamma(v_y) \left( E_z - \frac{v_y}{c^2} \frac{1}{\varepsilon_0} H_x \right) \\
 H'_x &= \gamma(v_y) (H_x - v_y \varepsilon_0 E_z) \\
 H'_y &= H_y \\
 H'_z &= \gamma(v_y) (H_z + v_y \varepsilon_0 E_x)
 \end{aligned}$$

Bewegung entlang der  $z$ -Richtung

$$\begin{aligned}
 E'_x &= \gamma(v_z) \left( E_x - \frac{v_z}{c^2} \frac{1}{\varepsilon_0} H_y \right) \\
 E'_y &= \gamma(v_z) \left( E_y + \frac{v_z}{c^2} \frac{1}{\varepsilon_0} H_x \right) \\
 E'_z &= E_z \\
 H'_x &= \gamma(v_z) (H_x + v_z \varepsilon_0 E_y) \\
 H'_y &= \gamma(v_z) (H_y - v_z \varepsilon_0 E_x) \\
 H'_z &= H_z
 \end{aligned}$$

# Versuchsliste

1. Versuch Ladungstrennung . . . . .	11
2. Versuch Ladungstrennung . . . . .	11
3. Versuch Reibungselektrizität . . . . .	12
4. Versuch Ladungen löffeln . . . . .	12
5. Versuch Coulomb-Gesetz . . . . .	14
6. Versuch Elektrische Feldlinien . . . . .	16
7. Versuch Drehmoment auf einen elektrischen Dipol . . . . .	22
8. Versuch Elektrische Feldlinien . . . . .	22
9. Versuch Faraday-Becher . . . . .	23
10. Versuch Faraday-Käfig . . . . .	23
11. Versuch Van-de-Graaff-Generator . . . . .	23
12. Versuch Kapazität von Kugeln . . . . .	40
13. Versuch Reihen- und Parallelschaltung von Kapazitäten . . . . .	42
14. Versuch Energieumwandlung . . . . .	44
15. Versuch Spannungswaage (Kirchhoffsche Waage) . . . . .	46
16. Versuch Influenzversuch: Verschiebungsdichte im Kondensator . . . . .	47
17. Versuch Plattenkondensator mit Dielektrikum . . . . .	50
18. Versuch Steighöhe im Kondensator . . . . .	56
19. Versuch Strom-Spannungs-Kennlinie . . . . .	71
20. Versuch Ohmscher Leiter . . . . .	71
21. Versuch Ohmsches Gesetz . . . . .	72
22. Versuch Leitfähigkeit . . . . .	74
23. Versuch Temperaturabhängigkeit der Leitfähigkeit . . . . .	74
24. Versuch Kombination von Widerständen . . . . .	76
25. Versuch EMK des Daniell-Elementes . . . . .	79
26. Versuch Entladen eines Kondensators . . . . .	79
27. Versuch Dioden-Kennlinie: Halbleiterdiode, Germanium . . . . .	85
28. Versuch Potentiometerschaltung . . . . .	85
29. Versuch Kraft zweier stromdurchflossener Leiter . . . . .	92
30. Versuch Lorentzkraft auf stromdurchflossenen Leiter . . . . .	93
31. Versuch Fadenstrahlrohr . . . . .	99
32. Versuch Magnetische Feldlinien . . . . .	100
33. Versuch Magnetische Feldlinien . . . . .	100
34. Versuch Lorentz-Kraft, Leiterschaukel . . . . .	105
35. Versuch Barlowsches Rad . . . . .	107
36. Versuch Barlowsches Rad . . . . .	107
37. Versuch Magnetfelder von Leitern . . . . .	114
38. Versuch Magnetfelder von Leitern . . . . .	115
39. Versuch Halleffekt . . . . .	121
40. Versuch Halleffekt . . . . .	121

41. Versuch Induktion . . . . .	134
42. Versuch Induktion im Erdfeld . . . . .	134
43. Versuch Induktion im Erdfeld . . . . .	134
44. Versuch Tesla-Transformator . . . . .	137
45. Versuch Magnetische Induktion . . . . .	138
46. Versuch Magnetische Induktion . . . . .	138
47. Versuch Fallrohre . . . . .	141
48. Versuch Fallrohre . . . . .	141
49. Versuch Funkeninduktor . . . . .	148
50. Versuch Funkeninduktor . . . . .	148
51. Versuch Hochspannungsleitung . . . . .	151
52. Versuch Hochspannungsleitung . . . . .	151
53. Versuch Transformatorenversuche, Teil Hochspannung . . . . .	151
54. Versuch Transformatorenversuche, Teil Hochstrom . . . . .	151
55. Versuch Transformatorenversuche . . . . .	151
56. Versuch Berechnung von Spannungen in einem Netzwerk . . . . .	152
57. Versuch Einfache Wechselstromkreise . . . . .	153
58. Versuch Wechselstromwiderstand . . . . .	155
59. Versuch Wechselstromwiderstand . . . . .	155
60. Versuch Elektrischer Schwingkreis . . . . .	160
61. Versuch Elektrischer Schwingkreis . . . . .	160
62. Versuch Elektrischer Schwingkreis . . . . .	160
63. Versuch Elektromotor und -generator . . . . .	166
64. Versuch Elektromotor und -generator . . . . .	166
65. Versuch Simulation Elektromotor . . . . .	166
66. Versuch Simulation von Gleich- und Wechselstromgeneratoren . . . . .	166
67. Versuch Drehstromgenerator . . . . .	172
68. Versuch Asynchroner Drehstrommotor . . . . .	172
69. Versuch Schleifring-Drehstromasynchronmotor für Fahrstühle usw. . . . .	172
70. Versuch Einphasen-Asynchronmotor . . . . .	172
71. Versuch Linearmotor . . . . .	173
72. Versuch Betatron . . . . .	173
73. Versuch Dia- und Paramagnetismus . . . . .	180
74. Versuch Dia- und Paramagnetismus . . . . .	180
75. Versuch Dia- und Paramagnetismus . . . . .	181
76. Versuch Ferromagnetismus - Modellversuch . . . . .	193
77. Versuch Hysterese des Ferromagneten . . . . .	194
78. Versuch Hysterese des Ferromagneten . . . . .	194
79. Versuch Hysterese des Ferromagneten . . . . .	194
80. Versuch Magnetische Bezirke . . . . .	195
81. Versuch Lecherleitung . . . . .	214
82. Versuch Koaxialleitung . . . . .	214
83. Versuch Stehende Wellen . . . . .	220
84. Versuch Stehende Wellen . . . . .	220
85. Versuch Hertzscher Dipol . . . . .	222
86. Versuch Hertzscher Dipol . . . . .	223
87. Versuch Hertzscher Dipol . . . . .	223

88. Versuch Wellenwanne . . . . .	228
89. Versuch Wellenwanne . . . . .	228
90. Versuch Polarisiertes Licht: Polarisator und Analysator . . . . .	230
91. Versuch Fresnelsche Formeln . . . . .	233
92. Versuch Brewsterwinkel . . . . .	250
93. Versuch Brewsterwinkel . . . . .	250
94. Versuch Brewsterwinkel . . . . .	250
95. Versuch Evaneszente Wellen - tunneln mit Licht . . . . .	257
96. Versuch Tunneleffekt mit Mikrowellen . . . . .	258
97. Versuch Tunneleffekt mit Mikrowellen . . . . .	258
98. Versuch Tunneleffekt mit Mikrowellen . . . . .	258
99. Versuch Kraft-Polygon . . . . .	283
100. Versuch Kraft-Polygon . . . . .	284





# Abbildungsverzeichnis

2.1.	Auslenkung zweier mit identischer LADUNG $q$ geladener Kugeln. .	13
2.2.	Feldlinien + und - . . . . .	16
2.3.	Feldlinien bei zwei gleichen positiven LADUNGEN. . . . .	17
2.4.	Feldlinien $+q$ und $-q$ . . . . .	18
2.5.	Integration über eine Kugelfläche mit einer Punktladung im Zentrum	19
2.6.	Allgemeine Oberflächen und beliebige Ladungsverteilung . . . . .	20
2.7.	Kräfte auf einen Dipol im homogenen elektrischen Feld . . . . .	22
2.8.	Berechnung eines Feldes einer Kugelschale . . . . .	23
2.9.	Die Feldverteilung einer homogen geladenen Kugelschale. . . . .	24
2.10.	Elektrisches Feld einer homogen geladenen Kugel . . . . .	25
2.11.	Integrationsfläche zur Berechnung des elektrischen Feldes einer Ebene . . . . .	25
2.12.	Elektrisches Feld um eine endliche Platte. . . . .	26
2.13.	Elektrisches Feld entgegengesetzt gleich geladener Platten. . . . .	27
2.14.	Elektrisches Feld gleich geladener Platten . . . . .	28
2.15.	Integrationsfläche . . . . .	28
2.16.	Feldlinien in der Nähe eines Leiters . . . . .	29
2.17.	Approximation eines beliebigen Integrationsweges durch Kreissegmente. . . . .	31
2.18.	Potential einer homogen geladenen Ebene . . . . .	34
2.19.	Potential eines Kreisringes . . . . .	35
2.20.	Potential einer homogen geladenen Kreisscheibe . . . . .	36
2.21.	Potential einer homogen geladenen Kugelschale . . . . .	37
2.22.	Potential einer homogenen unendlichen Linienladung . . . . .	38
2.23.	Integrationsoberfläche an der Grenze Metall-Vakuum. . . . .	40
2.24.	Geometrie eines Plattenkondensators. . . . .	41
2.25.	Minimierung der Randeffekte in einem Kondensator . . . . .	42
2.26.	PARALLELSCHALTUNG von Kondensatoren. . . . .	43
2.27.	REIHENSCHALTUNG oder SERIENSCHALTUNG von Kondensatoren. . . . .	43
2.28.	Flächenladungsversuch . . . . .	46
2.29.	Schematisches Bild eines ATOMS mit seiner ELEKTRONENHÜLLE. . . . .	48
2.30.	Isolatoren in einem Kondensatoren . . . . .	50
2.31.	Anordnung permanenter Dipole ohne und mit elektrischem Feld. . . . .	51
2.32.	Induzierte Polarisierung . . . . .	52
2.33.	Berechnung des Gesetzes von Clausius-Mosotti . . . . .	54
2.34.	Links: Kondensator ohne und rechts: mit Dielektrikum . . . . .	55
2.35.	Dielektrische Flüssigkeit im Kondensator . . . . .	57
2.36.	Skizze der Änderungen beim Anlegen einer SPANNUNG . . . . .	57
3.1.	Kräfte auf LADUNGEN in einem Leiter . . . . .	65
3.2.	Berechnung des Stromes in einem Medium . . . . .	67

3.3.	Fluss eines Stromdichtefeldes . . . . .	69
3.4.	Stromfluss in einem Kondensator . . . . .	70
3.5.	Bahnkurven ohne und mit elektrischem Feld. . . . .	72
3.6.	Berechnung des Widerstandes bei einem inhomogenen Leiter . . . . .	75
3.7.	Ladungstransport in einem van de Graaff-Generator . . . . .	78
3.8.	Aufladen und Entladen eines Kondensators über einen WIDERSTAND. . . . .	80
3.9.	Ladekurven am Kondensator . . . . .	81
3.10.	Entladekurven am Kondensator. . . . .	82
3.11.	Kennlinie eines $1000\Omega$ -Widerstands. . . . .	83
3.12.	In Schaltungen übliche Symbole. . . . .	83
3.13.	Messung der Kennlinie eines Widerstandes. . . . .	84
3.14.	Bestimmung einer Diodenkennlinie . . . . .	84
3.15.	Typische Diodenkennlinie. . . . .	85
3.16.	Spannungsteiler. . . . .	86
3.17.	Arbeitspunkt zweier Widerstände . . . . .	87
3.18.	Serieschaltung einer Diode $D$ mit einem WIDERSTAND $R$ . . . . .	88
3.19.	Arbeitspunkt einer Diode. . . . .	88
3.20.	Kennlinien eines Transistors. . . . .	89
3.21.	Bestimmung der Ausgangskennlinie eines Transistors. . . . .	89
3.22.	Arbeitskennlinie eines Transistors. . . . .	90
3.23.	Verstärkung eines Transistors in der Emitterschaltung . . . . .	90
3.24.	Verstärkerschaltung mit BC107. . . . .	91
3.25.	Strom in zwei parallelen Leitern . . . . .	93
3.26.	Metallischer Gastank mit Ausströmöffnung. . . . .	94
3.27.	Berechnung der magnetischen Kraft. . . . .	95
3.28.	Magnetische Induktion relativ zur Geschwindigkeit der Ladung. . . . .	100
3.29.	Berechnung der Kraft auf ein Leiterelement. . . . .	103
3.30.	Kräfte auf eine Leiterschleife im homogenen $\mathbf{B}$ -Feld . . . . .	104
3.31.	Drehmoment auf eine Leiterschleife im homogenen Magnetfeld . . . . .	105
3.32.	Drehmoment auf eine Leiterschleife im homogenen Magnetfeld . . . . .	106
3.33.	Tangentiales Magnetfeld eines Linienstromes. . . . .	110
3.34.	Magnetfeld einer homogenen Stromverteilung . . . . .	111
3.35.	Integrationsfläche zur Analyse der Quellenfreiheit des Magnetfeldes . . . . .	113
3.36.	Integration über die Mantelfläche. . . . .	113
3.37.	Darstellung von $\mathbf{B}$ in einer ( $x = \text{const}$ )-Ebene. . . . .	119
3.38.	Vektorpotential einer unendlichen Stromdichte. . . . .	120
3.39.	HALL-EFFEKT . . . . .	121
3.40.	Bewegte magnetische Induktion und elektrische Felder. . . . .	122
3.41.	Lorentztransformation von $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ . . . . .	125
4.1.	Induktion im inhomogenen Magnetfeld. . . . .	133
4.2.	Vergleich eines Stabmagneten mit einer Spule. . . . .	135
4.3.	Induzierte SPANNUNG . . . . .	136
4.4.	Vorzeichen der magnetischen Induktion und der induzierten SPANNUNG. . . . .	136
4.5.	SELBSTINDUKTION . . . . .	137

4.6.	WIRBELSTRÖME in Metallen . . . . .	141
4.7.	Bewegung eines Leiters aus einem Magnetfeld. . . . .	142
4.8.	Magnetische Induktion einer langen Spule . . . . .	144
4.9.	Berechnung einer endlichen Spule . . . . .	145
4.10.	Magnetische Induktion einer endlichen Spule bei konstantem $r$ . . . . .	146
4.11.	Magnetische Induktion einer endlichen Spule bei konstantem $l$ . . . . .	147
4.12.	Zwei gekoppelte Stromkreise . . . . .	148
4.13.	Symbolische Darstellung eines TRANSFORMATORS . . . . .	149
4.14.	Schematischer Aufbau eines TRANSFORMATORS . . . . .	150
4.15.	Kirchhoffsche Gesetze: links die MASCHENREGEL, rechts die KNO- TENREGEL. . . . .	152
4.16.	Definition von Strömen und Spannungen bei Wechselspannungen . . . . .	153
4.17.	Spule mit Wechselspannung . . . . .	156
4.18.	Kondensator mit Wechselspannung . . . . .	159
4.19.	Schwingkreis . . . . .	161
4.20.	Parallelschwingkreis . . . . .	162
4.21.	Schwingkreis mit Widerstand . . . . .	162
4.22.	Parallelschwingkreis gedämpft . . . . .	163
4.23.	Parallelschwingkreis gedämpft: zweite Möglichkeit . . . . .	164
4.24.	Parallelschwingkreis gedämpft: dritte Möglichkeit . . . . .	165
4.25.	Bestandteile eines Elektromotors . . . . .	166
4.26.	Aufbau eines Elektromotors . . . . .	167
4.27.	Bauarten von Elektromotoren . . . . .	170
4.28.	Kennlinien von Nebenschluss- und Hauptschlussmotoren. . . . .	172
4.29.	Skizze eines Betatrons . . . . .	173
4.30.	Berechnung des Skin-Effektes . . . . .	175
4.31.	Berechnung der Energie im Magnetfeld . . . . .	178
4.32.	Dia-, Para- und Ferromagnete im inhomogenen Feld. . . . .	180
4.33.	Kreisströme als Ursache des Dia- und des Paramagnetismus . . . . .	181
4.34.	Illustration zum Satz von Larmor . . . . .	182
4.35.	Einschalten eines Magnetfeldes für ein Elektron in einem Atom. . . . .	183
4.36.	Berechnung der Larmorfrequenz mit einem Kreisel . . . . .	185
4.37.	Berechnung des Diamagnetismus . . . . .	186
4.38.	Ein einzelner Kreisstrom . . . . .	187
4.39.	Atomare Kreisströme . . . . .	188
4.40.	Elektronenspin . . . . .	190
4.41.	Schematischer Verlauf der Magnetisierung . . . . .	192
4.42.	Zusammenhang zwischen $H$ , $M$ und $B$ . . . . .	193
4.43.	Messung der Hysterese eines Ferromagneten. . . . .	194
4.44.	Hysteresekurve eines Ferromagneten . . . . .	195
4.45.	Ferromagnetische Domänen . . . . .	196
4.46.	Domänenstruktur im ändernden Magnetfeld. . . . .	196
4.47.	Löschen des remanenten Magnetismus . . . . .	197
6.1.	3 mögliche DOPPELLEITERSYSTEME. . . . .	214
6.2.	800 MHz-Breitbandverstärker . . . . .	215
6.3.	Magnetfelder und elektrische Felder bei einer Lecherleitung. . . . .	215
6.4.	Doppelleitung aus parallelen Platten. . . . .	216

6.5.	Ausbreitung von elektromagnetischen Wellen . . . . .	217
6.6.	Integrationspfad zur Anwendung des vierten Maxwellschen Geset- zes . . . . .	218
6.7.	Koaxialkabel, Wellen- und Abschlusswiderstand . . . . .	219
6.8.	Berechnung des Poynting-Vektors . . . . .	221
6.9.	Wellenausbreitung . . . . .	223
6.10.	Berechnung der Wellenausbreitung . . . . .	224
6.11.	Bild einer ebenen Welle . . . . .	227
6.12.	Kugelwelle . . . . .	228
6.13.	Polarisation durch Absorption in einem Drahtpolarisator . . . . .	231
6.14.	Polarisator und Analysator . . . . .	231
6.15.	Dichroismus . . . . .	232
6.16.	Polarisation und Spiegelung . . . . .	233
6.17.	Definition der S-POLARISATION und der P-POLARISATION . . . . .	233
6.18.	Stetigkeitsbedingungen für elektromagnetische Wellen . . . . .	241
6.19.	Richtungen des elektrischen Feldes und Vorzeichen . . . . .	245
6.20.	Richtungen der Felder bei senkrechtem Einfall . . . . .	247
6.21.	Polarisation bei der Spiegelung an Wasser . . . . .	249
6.22.	Polarisation bei der Spiegelung an Wasser . . . . .	249
6.23.	Polarisation bei der Spiegelung an Wasser . . . . .	250
6.24.	p-Polarisation . . . . .	251
6.25.	Intensitätsverlauf für p- und s-Polarisation . . . . .	251
6.26.	Amplitudenverlauf . . . . .	252
6.27.	Intensitätsverlauf . . . . .	252
6.28.	Verlauf der Intensität . . . . .	255
6.29.	Gewichtete Intensität . . . . .	255
6.30.	Feldamplituden und Intensitäten bei senkrechtem Einfall, abhän- gig von $a_n = n_2/n_1$ . . . . .	257
6.31.	Feldamplituden und Intensitäten bei senkrechtem Einfall, abhän- gig von $a_n = n_2/n_1$ , mit logarithmischer Abszisse. . . . .	257
6.32.	Momentaufnahme der Interferenz . . . . .	258
6.33.	Intensitätsverteilung bei Totalreflexion . . . . .	259
C.1.	Berechnung der Ableitung . . . . .	275
C.2.	Approximationen der Funktion $f(x) = \cos(x)$ mit dem Grad 1, 2 und 3. . . . .	280
C.3.	Approximationen der Funktion $f(x) = \cos(x)$ mit dem Grad 1, 2 und 3. . . . .	282
C.4.	Approximationen der Funktion $f(x) = \cos(x)$ mit dem Grad 1, 2 und 3. . . . .	282
C.5.	Definition von Vektoren . . . . .	283
C.6.	Gradient als Richtung der stärksten Steigung . . . . .	290
C.7.	VEKTORFELD mit Umrandung . . . . .	291
C.8.	Drehung eines schwimmenden Klotzes, Rotation . . . . .	293
D.1.	Integration einer Funktion . . . . .	297
D.2.	Darstellung von $f(x)$ , wobei $a$ variiert wird. . . . .	302
E.1.	Kartesisches, zylindrisches und sphärisches Koordinatensystem . . . . .	305

E.2.	Umrechnung der Koordinaten . . . . .	307
F.1.	Mitgeführtes orthogonales Koordinatensystem und kartesisches Koordinatensystem . . . . .	309
F.2.	Betrachtung in der $xy$ -Ebene für $\mathbf{e}_\phi$ . . . . .	310
F.3.	Betrachtung in der $\rho z$ -Ebene zur Bestimmung von $\mathbf{e}_r$ und $\mathbf{e}_\theta$ . . .	310
G.1.	DREIECK . . . . .	321
H.1.	Beziehung zwischen den Ableitungen . . . . .	324
I.1.	Definition der Eulerschen Winkel . . . . .	330
J.1.	Elektrisches Feld entlang einer Linienladung. . . . .	332
J.2.	Elektrisches Feld senkrecht zu einer Linienladung. . . . .	334
J.3.	$\mathbf{E}$ -Feld einer homogen geladenen Kreisscheibe. . . . .	335
J.4.	LADUNG senkrecht zu einem Kreiszylinder. . . . .	336
J.5.	Elektrische Felder bei einem Koaxialkabel. . . . .	338



# Tabellenverzeichnis

2.1.	Elektrisches Feld in der Natur . . . . .	15
2.2.	Gefüllte Elektronenschale . . . . .	49
2.3.	Nicht gefüllte Elektronenschale . . . . .	49
2.4.	Einige relative Permittivitäten . . . . .	51
3.1.	Verstärkungen der Schaltung 3.21. . . . .	91
3.2.	Dimensionierung der Schaltung nach Abbildung 3.24 . . . . .	92
4.1.	Wirbelstromkräfte in $\text{N m}^{-3}$ von Magneten mit 0.1 T und 1 T auf Platten mit der Geschwindigkeit $v$ aus verschiedenen Materialien. . . . .	143
4.2.	Skintiefen verschiedener Materialien (nach [Wik16a; Wik16b]) . . . . .	178
C.1.	Beispiele für Ableitungen . . . . .	276
C.2.	Differentiationsregeln . . . . .	276
C.3.	Ableitung einiger Funktionen . . . . .	277
C.4.	Reihenentwicklungen . . . . .	279
D.1.	Beispiele für Integrale . . . . .	298
D.2.	Unbestimmte Integrale . . . . .	299
G.1.	Formeln für schiefwinklige ebene Dreiecke . . . . .	322





# Glossar

**Dipol** Entweder

1. zwei dem Betrage nach gleich grosse **Ladungen**  $q$  mit unterschiedlichem Vorzeichen im Abstand  $r$ . Das elektrische Dipolmoment zeigt von der negativen Ladung zur positiven Ladung oder
2. ein Kreisstrom, der ein magnetisches Dipolmoment erzeugt

21, 22, 29, 49, 51, 53, 55, 191, 270, 271

**elektrisches Feld** Eine Eigenschaft einer Ladung, anders als bei der Coulombkraft. Das elektrische Feld einer Ladung ist die Coulombkraft auf eine Testladung, geteilt durch die Grösse der Testladung. Symbol  $\mathbf{E}$ , Einheit  $[\mathbf{E}] = \text{N C}^{-1} = \text{V m}^{-1}$ . 15, 16, 18, 19, 23–26, 28

**Elementarladung** Die kleinste direkt beobachtbare Ladung. Sie hat die Grösse  $e = 1.602\,176\,634 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ . 14, 268

**extensive Grösse** Eine extensive Grösse ist eine Grösse, die proportional zum beobachteten System ist. Beispiele sind das Volumen oder die Energie. 12

**Ladung** Ladung ist die Quelle von elektrischen Feldern. Sie wird in Coulomb gemessen. Nach E. Noether [Noe18] ist die Erhaltung der Ladung eine Konsequenz der Eichinvarianz elektrischer und magnetischer Felder, gegeben durch das elektrostatische Potential und das Vektorpotential. Symbol  $q$  oder  $Q$ , Einheit  $[q] = \text{C} = \text{A s} = \text{Coulomb}$  11–15, 17, 18, 21, 27, 28, 33, 39, 40, 43, 51, 95, 96, 107, 123, 142, 187, 217, 218, 231, 345, 353

**Ladungseinheit** Die Ladungseinheit hängt vom Einheitensystem ab. IM SI-System ist dies das Coulomb. Es gibt auch Einheitsensystem, vor allem in der Theorie beliebt, bei denen die Ladungseinheit 1 ist. Im elektrostatischen CGS-System hat die Ladung die Einheit  $\text{g}^{1/2}\text{cm}^{3/2}\text{s}^{-1}$ . Im elektromagnetischen CGS-System ist die Ladungseinheit  $\text{g}^{1/2}\text{cm}^{1/2}$ . 13



# Abkürzungen

**RMS** Root-Mean-Square. 154



# Referenzen

- [AF00] M. Alonso und E. J. Finn. *Physik*. 3. Aufl. QC 21/2000 A Ex.5. JR. Oldenbourg Verlag, 2000 (siehe S. 265).
- [AW95] G. B. Arfken und H. J. Weber. *Mathematical Methods for Physicists*. 4. Aufl. QA 401/1995 A. Academic Press, 1995 (siehe S. 265).
- [Bro+08] I. N. Bronštein u. a. *Taschenbuch der Mathematik*. 7. Aufl. QA 40/2008 B. Verlag Harri Deutsch, 2008 (siehe S. 35, 117, 265, 285, 286, 288, 298–300, 305, 321, 322, 332).
- [Cod17] Codata. *Landé-g-Faktor Proton*. <http://physics.nist.gov/cgi-bin/cuu/Value?gp>. Entnommen 2017-06-29. 29. Juni 2017. URL: <http://physics.nist.gov/cgi-bin/cuu/Value?gp> (siehe S. 190).
- [Dör01] A. Döring. „Rasterkraftmikroskopische Untersuchungen an Haftklebstoffen“. Seite 61. PhD Thesis. University of Ulm, 2001 (siehe S. 27).
- [Far32a] M. Faraday. „Experimental Researches in Electricity“. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 122 (1832), S. 125–162. DOI: 10.1098/rstl.1832.0006. eprint: <http://rstl.royalsocietypublishing.org/content/122/125.full.pdf+html>. URL: <http://rstl.royalsocietypublishing.org/content/122/125.short> (siehe S. 265).
- [Far32b] M. Faraday. „The Bakerian Lecture: Experimental Researches in Electricity. Second Series“. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 122 (1832), S. 163–194. DOI: 10.1098/rstl.1832.0007. eprint: <http://rstl.royalsocietypublishing.org/content/122/163.full.pdf+html>. URL: <http://rstl.royalsocietypublishing.org/content/122/163.short> (siehe S. 265).
- [Far33a] M. Faraday. „Experimental Researches in Electricity. Fifth Series“. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 123 (1833), S. 675–710. DOI: 10.1098/rstl.1833.0030. eprint: <http://rstl.royalsocietypublishing.org/content/123/675.full.pdf+html>. URL: <http://rstl.royalsocietypublishing.org/content/123/675.short> (siehe S. 265).
- [Far33b] M. Faraday. „Experimental Researches in Electricity. Fourth Series“. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 123 (1833), S. 507–522. DOI: 10.1098/rstl.1833.0022. eprint: <http://rstl.royalsocietypublishing.org/content/123/507.full.pdf+html>. URL: <http://rstl.royalsocietypublishing.org/content/123/507.short> (siehe S. 265).

- [Far33c] M. Faraday. „Experimental Researches in Electricity. Third Series“. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 123 (1833), S. 23–54. DOI: [10.1098/rstl.1833.0006](https://doi.org/10.1098/rstl.1833.0006). eprint: <http://rstl.royalsocietypublishing.org/content/123/23.full.pdf+html>. URL: <http://rstl.royalsocietypublishing.org/content/123/23.short> (siehe S. 265).
- [Far34a] M. Faraday. „Experimental Researches in Electricity. Eighth Series“. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 124 (1834), S. 425–470. DOI: [10.1098/rstl.1834.0022](https://doi.org/10.1098/rstl.1834.0022). eprint: <http://rstl.royalsocietypublishing.org/content/124/425.full.pdf+html>. URL: <http://rstl.royalsocietypublishing.org/content/124/425.short> (siehe S. 265).
- [Far34b] M. Faraday. „Experimental Researches in Electricity. Seventh Series“. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 124 (1834), S. 77–122. DOI: [10.1098/rstl.1834.0008](https://doi.org/10.1098/rstl.1834.0008). eprint: <http://rstl.royalsocietypublishing.org/content/124/77.full.pdf+html>. URL: <http://rstl.royalsocietypublishing.org/content/124/77.short> (siehe S. 265).
- [Far34c] M. Faraday. „Experimental Researches in Electricity. Sixth Series“. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 124 (1834), S. 55–76. DOI: [10.1098/rstl.1834.0007](https://doi.org/10.1098/rstl.1834.0007). eprint: <http://rstl.royalsocietypublishing.org/content/124/55.full.pdf+html>. URL: <http://rstl.royalsocietypublishing.org/content/124/55.short> (siehe S. 265).
- [Far35a] M. Faraday. „Experimental Researches in Electricity. Ninth Series“. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 125 (1835), S. 41–56. DOI: [10.1098/rstl.1835.0005](https://doi.org/10.1098/rstl.1835.0005). eprint: <http://rstl.royalsocietypublishing.org/content/125/41.full.pdf+html>. URL: <http://rstl.royalsocietypublishing.org/content/125/41.short> (siehe S. 265).
- [Far35b] M. Faraday. „Experimental Researches in Electricity. Tenth Series“. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 125 (1835), S. 263–274. DOI: [10.1098/rstl.1835.0016](https://doi.org/10.1098/rstl.1835.0016). eprint: <http://rstl.royalsocietypublishing.org/content/125/263.full.pdf+html>. URL: <http://rstl.royalsocietypublishing.org/content/125/263.short> (siehe S. 265).
- [Far38a] M. Faraday. „Experimental Researches in Electricity. Thirteenth Series“. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 128 (1838), S. 125–168. DOI: [10.1098/rstl.1838.0009](https://doi.org/10.1098/rstl.1838.0009). eprint: <http://rstl.royalsocietypublishing.org/content/128/125.full.pdf+html>. URL: <http://rstl.royalsocietypublishing.org/content/128/125.short> (siehe S. 265).
- [Far38b] M. Faraday. „Supplementary Note to Experimental Researches in Electricity. Eleventh Series“. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 128 (1838), S. 79–81. DOI: [10.1098/rstl.1838.0007](https://doi.org/10.1098/rstl.1838.0007). eprint: <http://rstl.royalsocietypublishing.org/content/128/>

- 79.full.pdf+html. URL: <http://rstl.royalsocietypublishing.org/content/128/79.short> (siehe S. 265).
- [Far39] M. Faraday. „Experimental Researches in Electricity. Fifteenth Series“. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 129 (1839), S. 1–12. DOI: [10.1098/rstl.1839.0002](https://doi.org/10.1098/rstl.1839.0002). eprint: <http://rstl.royalsocietypublishing.org/content/129/1.full.pdf+html>. URL: <http://rstl.royalsocietypublishing.org/content/129/1.short> (siehe S. 265).
- [Far40] M. Faraday. „Experimental Researches in Electricity. Seventeenth Series“. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 130 (1840), S. 93–127. DOI: [10.1098/rstl.1840.0004](https://doi.org/10.1098/rstl.1840.0004). eprint: <http://rstl.royalsocietypublishing.org/content/130/93.full.pdf+html>. URL: <http://rstl.royalsocietypublishing.org/content/130/93.short> (siehe S. 265).
- [Far43] M. Faraday. „Experimental Researches in Electricity. Eighteenth Series“. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 133 (1843), S. 17–32. DOI: [10.1098/rstl.1843.0004](https://doi.org/10.1098/rstl.1843.0004). eprint: <http://rstl.royalsocietypublishing.org/content/133/17.full.pdf+html>. URL: <http://rstl.royalsocietypublishing.org/content/133/17.short> (siehe S. 265).
- [Far46] M. Faraday. „Experimental Researches in Electricity. Twentieth Series“. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 136 (1846), S. 21–40. DOI: [10.1098/rstl.1846.0003](https://doi.org/10.1098/rstl.1846.0003). eprint: <http://rstl.royalsocietypublishing.org/content/136/21.full.pdf+html>. URL: <http://rstl.royalsocietypublishing.org/content/136/21.short> (siehe S. 265).
- [Far49a] M. Faraday. „Experimental Researches in Electricity. Twenty-Second Series (Continued)“. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 139 (1849), S. 19–41. DOI: [10.1098/rstl.1849.0002](https://doi.org/10.1098/rstl.1849.0002). eprint: <http://rstl.royalsocietypublishing.org/content/139/19.full.pdf+html>. URL: <http://rstl.royalsocietypublishing.org/content/139/19.short> (siehe S. 265).
- [Far49b] M. Faraday. „The Bakerian Lecture: Experimental Researches in Electricity. Twenty-Second Series“. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 139 (1849), S. 1–18. DOI: [10.1098/rstl.1849.0001](https://doi.org/10.1098/rstl.1849.0001). eprint: <http://rstl.royalsocietypublishing.org/content/139/1.full.pdf+html>. URL: <http://rstl.royalsocietypublishing.org/content/139/1.short> (siehe S. 265).
- [Far50] M. Faraday. „Experimental Researches in Electricity. Twenty-Third Series“. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 140 (1850), S. 171–188. DOI: [10.1098/rstl.1850.0008](https://doi.org/10.1098/rstl.1850.0008). eprint: <http://rstl.royalsocietypublishing.org/content/140/171.full.pdf+html>. URL: <http://rstl.royalsocietypublishing.org/content/140/171.short> (siehe S. 265).

- [Far51a] M. Faraday. „Experimental Researches in Electricity. Twenty-Fifth Series“. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 141 (1851), S. 7–28. DOI: [10.1098/rstl.1851.0004](https://doi.org/10.1098/rstl.1851.0004). eprint: <http://rstl.royalsocietypublishing.org/content/141/7.full.pdf+html>. URL: <http://rstl.royalsocietypublishing.org/content/141/7.short> (siehe S. 265).
- [Far51b] M. Faraday. „Experimental Researches in Electricity. Twenty-Sixth Series“. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 141 (1851), S. 29–84. DOI: [10.1098/rstl.1851.0005](https://doi.org/10.1098/rstl.1851.0005). eprint: <http://rstl.royalsocietypublishing.org/content/141/29.full.pdf+html>. URL: <http://rstl.royalsocietypublishing.org/content/141/29.short> (siehe S. 265).
- [Far51c] M. Faraday. „The Bakerian Lecture. Experimental Researches in Electricity. Twenty-Fourth Series“. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 141 (1851), S. 1–6. DOI: [10.1098/rstl.1851.0001](https://doi.org/10.1098/rstl.1851.0001). eprint: <http://rstl.royalsocietypublishing.org/content/141/1.full.pdf+html>. URL: <http://rstl.royalsocietypublishing.org/content/141/1.short> (siehe S. 265).
- [Far52a] M. Faraday. „Experimental Researches in Electricity. Twenty-Eighth Series“. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 142 (1852), S. 25–56. DOI: [10.1098/rstl.1852.0004](https://doi.org/10.1098/rstl.1852.0004). eprint: <http://rstl.royalsocietypublishing.org/content/142/25.full.pdf+html>. URL: <http://rstl.royalsocietypublishing.org/content/142/25.short> (siehe S. 265).
- [Far52b] M. Faraday. „Experimental Researches in Electricity. Twenty-Ninth Series“. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 142 (1852), S. 137–159. DOI: [10.1098/rstl.1852.0012](https://doi.org/10.1098/rstl.1852.0012). eprint: <http://rstl.royalsocietypublishing.org/content/142/137.full.pdf+html>. URL: <http://rstl.royalsocietypublishing.org/content/142/137.short> (siehe S. 265).
- [Gia06] D. C. Giancoli. *Physik*. QC 21/2006 Gb Ex.2. Pearson Studium, 2006 (siehe S. 265).
- [HRW03] D. Halliday, R. Resnick und J. Walker. *Physik*. QC 21/2003 H. Wiley-VCH GmbH, 2003 (siehe S. 265).
- [Hec05] E. Hecht. *Optik*. 4. Aufl. Übersetzt von Dr. Anna Schleitzer. Oldenbourg Wissenschaftsverlag GmbH, 2005. ISBN: 3-486-27359-0. DOI: [10.1515/9783110526653](https://doi.org/10.1515/9783110526653) (siehe S. 228, 230–232, 257).
- [Jac75] J. D. Jackson. *Classical electrodynamics*. 2. Aufl. Wiley, 1975 (siehe S. 40, 114, 139, 176, 294).
- [Kän78] W. Känzig. *Physik 2: Elektrizität und Magnetismus*. Verlag der Fachvereine Zürich, 1978 (siehe S. 57).
- [Kne78] F. Kneubühl. *Repetitorium der Physik*. Teubner, 1978. DOI: [10.1007/978-3-322-84886-4](https://doi.org/10.1007/978-3-322-84886-4) (siehe S. 12, 30, 38, 39, 44, 191, 265).
- [LL85] L. D. Landau und E. M. Lifschitz. *Elektrodynamik der Kontinua*. 4. Aufl. Bd. 8. Akademie-Verlag Berlin, 1985 (siehe S. 54).



- [LL89] L. D. Landau und E. M. Lifschitz. *Klassische Feldtheorie*. Hrsg. von H.-G. Schöpf. Bd. 2. Akademie-Verlag Berlin, 1989 (siehe S. 114, 117).
- [LLS96] R. Langkau, G. Lindström und W. Scobel. *Physik kompakt: Elektromagnetische Wellen*. QC 21/C6.4. vieweg studium, 1996 (siehe S. 265).
- [Lei98] H. J. Leisi. *Klassische Physik*. Bd. 2. QC 21/1996 L-2 und QC 21/1996 L-1. Birkhäuser, 1998. DOI: [10.1007/978-3-0348-8807-3](https://doi.org/10.1007/978-3-0348-8807-3) (siehe S. 66, 71, 77, 79, 93–95, 99, 107, 112, 114, 121, 122, 134, 182, 188, 203, 265).
- [LL96] G. Lindström und R. Langkau. *Physik kompakt: Elektrodynamik*. QC 21/C6.3 Ex.2. vieweg studium, 1996. DOI: [10.1007/978-3-662-12692-9](https://doi.org/10.1007/978-3-662-12692-9) (siehe S. 265).
- [Mar09] O. Marti. *Physikalische Elektronik und Messtechnik*. [http://wwwex.physik.uni-ulm.de/lehre/physikalischeelektronik/phys\\_elektr/phys\\_elektr.pdf](http://wwwex.physik.uni-ulm.de/lehre/physikalischeelektronik/phys_elektr/phys_elektr.pdf). Universität Ulm, 2009. URL: [http://wwwex.physik.uni-ulm.de/lehre/physikalischeelektronik/phys\\_elektr/phys\\_elektr.pdf](http://wwwex.physik.uni-ulm.de/lehre/physikalischeelektronik/phys_elektr/phys_elektr.pdf) (siehe S. 92).
- [Mar14] O. Marti. *Mechanik - Vorlesungsskript*. Vorlesungsskripte Othmar Marti. Universität Ulm, 2014, S. 389. URL: <http://wwwex.physik.uni-ulm.de/lehre/krm-2014/krm-2014.pdf> (siehe S. 185).
- [Mar15] O. Marti. *Wärmelehre. Skript zur Vorlesung*. Universität Ulm, 2015. eprint: <http://wwwex.physik.uni-ulm.de/lehre/td-2015/td-2015.pdf>. URL: <http://wwwex.physik.uni-ulm.de/lehre/td-2015/td-2015.html> (besucht am 08.05.2020) (siehe S. 73).
- [Max65] J. C. Maxwell. „A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field“. In: *Phil. Trans. R. Soc. Lond.* 155 (1865), S. 459–512. DOI: [10.1098/rstl.1865.0008](https://doi.org/10.1098/rstl.1865.0008) (siehe S. 265).
- [Max73] J. C. Maxwell. *A treatise on electricity and magnetism*. Oxford : Clarendon Press, 1873. DOI: [10.1017/cbo9780511709340](https://doi.org/10.1017/cbo9780511709340) (siehe S. 209, 265).
- [MS09] L. C. McDermott und P. S. Shaffer. *Tutorien zur Physik*. Pearson Studium, 2009 (siehe S. 265).
- [Mes06] D. Meschede. *Gerthsen Physik*. 23. Aufl. QC 21/2006 G-1 Ex.2. Springer Verlag, 2006. DOI: [10.1007/978-3-662-45977-5](https://doi.org/10.1007/978-3-662-45977-5) (siehe S. 232, 265).
- [Noe18] E. Noether. „Invariante Variationsprobleme“. In: *Nachrichten der Königlich-niglichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse* (1918). (vorgelegt 26.7.1.1918 durch Felix Klein, endgültige Fassung des Manuskripts September 1918), S. 235–257. DOI: [10.1007/978-3-642-39990-9\\_13](https://doi.org/10.1007/978-3-642-39990-9_13) (siehe S. 353).
- [Pér96] J.-P. Pérez. *Optik*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 1996. ISBN: 3-86025-389-1 (siehe S. 228, 231).
- [Som78] A. Sommerfeld. *Theoretische Physik III, Elektrodynamik*. Verlag Harri Deutsch, 1978 (siehe S. 54).

- [Thi11] B. Thidé. *Electromagnetic Field Theory*. März 2011. ISBN: 0486477738. URL: [https://www.researchgate.net/profile/Bo\\_Thide/publication/258221118\\_Electromagnetic\\_Field\\_Theory/links/0deec5279bb5419081000000/Electromagnetic-Field-Theory.pdf](https://www.researchgate.net/profile/Bo_Thide/publication/258221118_Electromagnetic_Field_Theory/links/0deec5279bb5419081000000/Electromagnetic-Field-Theory.pdf) (besucht am 09.06.2020) (siehe S. 114).
- [TM04] P. A. Tipler und G. Mosca. *Physik*. 2. Aufl. ISBN-13: 978-3827411648. Spektrum Verlag, 2004. DOI: [10.1007/978-3-8274-2236-1](https://doi.org/10.1007/978-3-8274-2236-1) (siehe S. 12, 22, 30, 38, 39, 44, 71, 77, 79, 93, 121, 134, 230, 231, 265).
- [Tur07] C. W. Turtur. *Prüfungstrainer Physik*. Teubner Verlag, 2007. DOI: [10.1007/978-3-8348-8332-2](https://doi.org/10.1007/978-3-8348-8332-2) (siehe S. 265).
- [Wel94] K. Weltner. *Mathematik für Physiker*. Lehrbuch und Leitfaden (5 Bände) Exemplar 711621537. vieweg studium, 1994. DOI: [10.1007/978-3-642-15527-7](https://doi.org/10.1007/978-3-642-15527-7) (siehe S. 265).
- [Wik16a] Wikipedia. *Elektrische Leitfähigkeiten*. [https://de.wikipedia.org/wiki/Wikipedia:Lizenzbestimmungen\\_Creative\\_Commons\\_Attribution-ShareAlike\\_3.0\\_Unported](https://de.wikipedia.org/wiki/Wikipedia:Lizenzbestimmungen_Creative_Commons_Attribution-ShareAlike_3.0_Unported). 21. Juni 2016. URL: [https://de.wikipedia.org/wiki/Elektrische%5C\\_Leitf%7B%5C%22a%7Dhigkeit](https://de.wikipedia.org/wiki/Elektrische%5C_Leitf%7B%5C%22a%7Dhigkeit) (siehe S. 178).
- [Wik16b] Wikipedia. *Permeabilitäten*. [https://de.wikipedia.org/wiki/Wikipedia:Lizenzbestimmungen\\_Creative\\_Commons\\_Attribution-ShareAlike\\_3.0\\_Unported](https://de.wikipedia.org/wiki/Wikipedia:Lizenzbestimmungen_Creative_Commons_Attribution-ShareAlike_3.0_Unported). 21. Juni 2016. URL: [https://de.wikipedia.org/wiki/Permeabilit%7B%5C%22a%7Dt%5C\\_\(Magnetismus\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Permeabilit%7B%5C%22a%7Dt%5C_(Magnetismus)) (siehe S. 178).
- [Wik20a] Wikipedia. *Impedanzanalysator*. 12. Juni 2020. URL: <https://de.wikipedia.org/wiki/Impedanzanalysator> (besucht am 12.06.2020) (siehe S. 158).
- [Wik20b] Wikipedia. *Lorentz-Transformation*. 6. Juni 2020. URL: <https://de.wikipedia.org/wiki/Lorentz-Transformation> (siehe S. 127).
- [Wol14] I. Wolfram Research. *Mathematica*. Version 10.0. Champaign, Illinois: Wolfram Research, Inc., 2014 (siehe S. 328).

# Stichwortverzeichnis

$\delta$ -Funktion

Dirac, 301–303

Übersetzungsfaktor, 150

Ableitung, 275–276

Bezugssystem

rotierend, 323–326

drei Dimensionen, 290–294

mitgeführt, 294–295

Ableitung von Vektoren, 287–294

Ableitung:Näherungslösungen, 280–282

Ampèresches Durchflutungsgesetz, 107–112

Ampèresches Gesetz, 115

Amplitude, 227, 228, 230–232, 251, 252

Analysator, 231, 232

Atom, 48

atomare Polarisierbarkeit, 48

**B**-Feld

Eigenschaften, 99–120

Barlowsches Rad, 107

Basis, 83

Basis-Emitter-Kennlinie, 89

Bauelemente, 82–92

Betatron, 173–174

Betrag der Amplitude, 229

Beweglichkeit, 73

Bezugssystem, 93

Bildladung, 29–30

Binormale, 286

Biot-Savart

Gesetz, 102–107, 118

Kraft, 103

Biot-Savart-Kraft, 181

Bohrsches Magneton, 190

Boltzmannstatistik, 191

Brechungsindex, 229

Brechzahl, 229

Brewster-Winkel, 248

Cavendish, 13

Clausius, 53–55

Coulomb, 14

Gesetz, 14, 60

Coulombeichung, 116, 117

Coulombsches Gesetz, 12–14

Curie-Gesetz, 192

Curie-Konstante, 192

**D** dielektrische Verschiebung, 19

Diamagnetismus, 181, 186–188

Dichroismus, 231

Dielektrika, 50–56

dielektrische Suszeptibilität, 63

Dielektrische Verschiebung, 19

dielektrische Verschiebung, 60, 61, 180

Stetigkeit, 52, 63

Dielektrizitätskonstanten, 238

Differentiation

einfache Funktionen, 277–278

Regeln, 276–277

Differentiationsregeln, 276–277

Dipol, 21–22

Dipolmoment, 21

induziert, 48, 63

Dirac

$\delta$ -Funktion, 301–303

Divergenz, 21, 291–292

Domäne

ferromagnetisch, 196

Doppelleitersystem, 213–218

Drehmatrizen, 327–328

Drehmoment, 105

Drehspulinstrument, 106

Drehung

Matrix, 328–329

Tensor, 328–329

Vektor, 328–329

Drehungen, 327–330

Dreibein

- rechtshändig, 213
- Dreieck, 321, 322
  - schiefwinklig, 321–322
- Driftgeschwindigkeit, 65, 73
- Durchlassrichtung, 85
- Eichung, 116
- Einfallsebene, 234, 238
- Elektrische Eigenschaften
  - materie, 47–60
- elektrische Felder von Leitern, 22–30
- Elektrische Feldlinien, 60
- elektrische Flussdichte, 19
- Elektrische Ladung, 12–14
- Elektrische Ströme, 65–132
- elektrische Suszeptibilität, 180
- elektrischer Fluss, 21, 23, 61
- elektrischer Strom, 66
- Elektrisches Feld
  - Fluss, 19
- elektrisches Feld, 15–18, 60, 99, 180
  - Energie, 44–47
  - Energiedichte, 45, 62
  - Stetigkeit, 52, 63
- elektrisches Potential, 32, 61
- Elektrodynamik
  - Kraftgesetz, 102
- elektromagnetische Wellen, 209–260
- Elektromotor, 166–173
  - gemittelte Betrachtung, 169
- elektromotorische Kraft, 77–79
- Elektronen, 99, 189
  - Hülle, 48
- Elektrostatik, 11–63, 116
- elektrostatisches Potential, 30–38, 61
  - kontinuierliche Ladungsverteilung, 62
- Emitter, 83
- EMK, 77–79, 138, 139, 152
- Energie
  - elektrisches Feld, 44–47
  - Magnetfeld, 178–179
  - potentiell, 61
- Energiedichte des elektrischen Feldes, 45, 62
- Energiefluss, 221–222
  - stehende Wellen, 222
- $\epsilon_0$  Permittivität des Vakuums, 13, 60
- Eulersche Winkel, 329–330
- Fakultät, 281
- Faraday
  - Induktionsgesetz
    - differentiell, 137–140
    - integral, 137–140
  - Michael, 16
- Faradaysches Induktionsgesetz, 133–178
- Feld
  - elektrisch, 15–18, 60
  - magnetisch, 98–99
- Feldlinien, 16
  - elektrisch, 60
- Ferromagnet, 195
- Ferromagnetismus, 181, 193–197
- Flächenladungsdichte, 46–47
- Fluss, 68
  - elektrisch, 61
  - elktrisch, 21
  - magnetisch, 134–137
- Fluss des elektrischen Feldes, 19
- Flussdichte
  - elektrisch, 19
  - magnetisch, 99–102, 134
- Frequenz
  - Skineffekt, 178
- Fresnelsche Formeln
  - p-Polarisation, 243, 244
- Fresnelschen Formeln, 234
- Funkeninduktor, 148
- Galilei-Transformation, 210
- Gauss
  - Gesetz, 52
- Gauss, K.F., 295
- Gaussssches Gesetz, 18–21, 61
- Gegeninduktivitäten, 149
- Gesetz
  - Clausius und Mosotti, 53–55
  - Clausius-Mosotti, 55
  - Coulomb, 12–14, 60
  - Gauss, 18–21, 52, 61
  - Kirchhoff, 152–153
  - Ohm, 71–77
- Gesetz von Biot-Savart, 102–107, 118
- Gleichung
  - Poisson, 62
- Gleichungen
  - Maxwell, 203–208

- Gradient, 290–291  
 Graphit, 71  
 Green, G., 296  
  
***H***-Feld, 98–99  
 Hall-Effekt, 121–122  
 Hallspannung, 121, 122  
 Hauptnormale, 286  
 Hauptschlussmotor, 170  
 Helmholtzspulen, 99  
 Hohlleiter, 220  
 Hysterese, 197  
  
***i*** Stromdichte, 69  
 Impedanz  
     Kapazität  
         komplex, 160  
     Kondensator  
         komplex, 160  
 Impedanzen, 153–165  
 Induktion, 133  
     magnetisch, 99–102, 134  
 Induktionsgesetz, 176  
     Faraday, 133–178  
         differentiell, 137–140  
         integral, 137–140  
         universell, 140  
 Induktionskonstante, 99  
 induktiver Widerstand, 157, 158, 274  
 Induktivität  
     Selbst-, 147  
     Wechselstromwiderstand, 156–157  
         komplex, 157–158  
 induzierte Spannung, 141, 150, 156  
 Inertialsystem, 94  
 Influenz, 29–30, 42  
 Influenzladung, 29  
 Inhomogenes Magnetfeld, 180–182  
 Integrale  
     bestimmt, 299–300  
     Rechenverfahren, 298  
     unbestimmt, 299  
     variable obere Grenze, 299–300  
 Integration, 297–298  
 Intensität, 228–232, 234, 240, 251, 252, 255  
  
 Joulsche Wärme, 77–79  
 Kapazität, 39–44, 62  
  
 Impedanz  
     komplex, 160  
     Wechselstromwiderstand, 159  
 kapazitiver Widerstand, 274  
 Kartesische Koordinaten, 305–308  
 Kern, 47  
 Kernladungszahl, 47  
 Kirchhoffsche Gesetze, 152–153  
 Klebestreifen, 27  
 Knotenregel, 152  
 Koaxialkabel, 220  
 Kollektor, 83  
 Kollektor-Kennlinienfeld, 89  
 Kommutator, 166  
 Kondensator, 82  
     Impedanz  
         komplex, 160  
     Reihenschaltung, 43  
     Wechselstromwiderstand, 159  
 Kondensatoren, 42  
     Parallelschaltung, 43  
 Kontinuitätsgleichung, 66–70  
 Koordinaten  
     kartesich, 305–308  
     sphärisch, 305–308  
     zylindrisch, 305–308  
 Koordinatensystem, 329  
 Kraft, 13  
     Biot  
         Savart, 103  
 Kraftgesetz der Elektrodynamik, 102  
 Kurve  
     Normlenebene, 285  
     Raum, 285–286  
     tangente, 285  
  
 Lösung, allgemein  
     Wellengleichung, 211–213  
 Ladung, 11–18, 21–24, 27–35, 39–41, 43, 44, 47, 50, 51, 54, 56, 58, 60, 65, 67, 73, 77, 79, 93–98, 100, 102, 107, 123, 126, 130, 187, 194, 203, 217, 218, 222–224, 331, 336  
     elektrisch, 12–14  
     magnetisch, 114  
     Proton, 94  
 Ladungsdichte, 26  
 Ladungserhaltung, 69, 95

- Ladungsinvarianz, 95
  - relativistisch, 95
- Ladungsmenge, 67
- Ladungsträger, 65, 67, 68, 73
- Ladungstransport, 65
- Ladungsverteilung
  - kontinuierlich, 60
- Landé-Faktor, 190
- Langevin-Funktion, 192
- Laplace, 118
- Larmor
  - Satz, 182–186
- Larmorkreisfrequenz, 185
- Larmorwinkelgeschwindigkeit, 184
- Lecher-Leitung, 213
- Lecherleitungen, 220
- Leiter, 61
  - elektrische Felder, 22–30
- Leiterschleife
  - bewegt, 133–134
- Leitfähigkeit, 71
  - Skineffekt, 178
- Leitwert, 71
- Lenzsche Regel, 135, 136
- Lichtenberg, G.C. 1742–1799, 12
- Lichtstrahlen, 227
- Linienintegral, 300–301
- Lorentz-Beziehung, 54, 63
- Lorentz-Kraft, 99
- Lorentz-Transformation, 99, 210
  - $\mathbf{B}$ , 122–127
  - $\mathbf{E}$ , 122–127
  - allgemeine elektromagnetische Fel-  
der, 127–128
  - beliebige Geschwindigkeit, 127–128
  - EMK, 138
- Lorentzzeichnung, 117
- Lorentzkraft, 92–93, 122, 136, 140
- Magnetfeld, 92–93
  - Eigenschaften, 99–120
  - Energie, 178–179
  - inhomogen, 180–182
  - Quellenfreiheit, 112–114
  - zeitlich veränderlich, 133–197
- Magnetische Eigenschaften der Mate-  
rie, 179–197
- magnetische Feldstärke, 101
- magnetische Flussdichte, 99–102, 134,  
180
- magnetische Induktion, 99–102, 134,  
180
- Magnetische Kraft
  - Berechnung, 93–99
- magnetischer Fluss, 134–137
- magnetisches Feld, 98–99, 101, 180
- Magnetisches Moment, 106
  - Elektronen, 189–190
- magnetisches Moment, 108
- Magnetisierung, 188–189
- Maschenregel, 152
- Materie
  - elektrische Eigenschaften, 47–60
  - magnetische Eigenschaften, 179–  
197
  - Magnetisierung, 188–189
- Mathematik, 275–286
- Maxwell
  - Gleichungen, 203–208
- Maxwell, James Clerk, 203
- Maxwellsche Gleichungen, 203–208
- Maxwellsche Verschiebungsstromdich-  
te, 203
- Maxwellspannung, 45, 62
- mechanische Spannung, 45
- Millikan, 14
- Moment
  - magnetisch, 106
  - Elektronen, 189–190
- Mosotti, 53–55
- Motor, 106
- $\nabla$  Nabla-Operator, 296
- Nabla-Operator, 296
- Nebenschlussmotor, 169
- Normalenebene, 285
- Normalenebene zu Tangente einer Kur-  
ve, 285
- Oberfläche, 238
- Oberflächenladungsdichte, 45
- Oberflächennormalen, 238
- Ohmscher Leiter, 71
- ohmscher Widerstand, 150
- Ohmsches Gesetz, 71–77
- Optik, 210
- optisch aktive Substanz, 232



- Orientierung
  - $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$ , 213
- Orientierungspolarisation, 51
- $\mathbf{p}$  Dipolmoment, 21
- p-Polarisation, 233, 251, 252, 255
- p-polarisiert, 234
- Parallelschaltung, 42
  - Kondensatoren, 43, 62
- Paramagnetismus, 181, 191–193
- Permeabilität
  - Skineffekt, 178
  - Vakuum, 98
- Permittivität, 53
  - Vakuum, 13, 60
- $\varphi$  Potential, 32
- Pointingvektor, 238
- Poisson-Gleichung, 38–39, 62
- Poissongleichung, 39
- Polarisation, 53
  - p, 251, 252, 255
  - s, 238–241, 251, 252, 255
- Polarisationsfilter, 233
- Polarisator, 231, 232
- Polarisierbarkeit, 53
  - atomar, 48
- Potential
  - elektrostatisch, 30–38, 61
  - kontinuierlich, 62
  - Stetigkeit, 53, 63
- potentielle Energie, 61
- Poynting-Vektor, 221–222
- Poyntingvektor
  - stehende Wellen, 222
- Produkte mit Vektoren, 286–287
- Protonen, 47
- Punktladung, 13
- Quantenelektrodynamik, 190
- Quantenfeldtheorie, 117
- Quantenmechanik, 116
- Quellen, 21
- Quellenfreiheit des Magnetfeldes, 112–114
- Raum
  - Kurve, 285–286
- RC-Stromkreise, 79–82
- Rechte-Hand-Regel, 135, 136
- Reflexion, 234, 240, 258
- Regel
  - Lenz, 135
- Reihen, 278–280
- Reihenschaltung, 43
  - Kondensatoren, 43, 62
- rektifizierende Ebene, 286
- relative Dielektrizitätszahl, 180
- relative elektrische Permeabilität, 180
- relative elektrische Permittivität, 180
- Relativitätstheorie, 93, 116, 117, 224
- retardierte Zeit, 225
- $\rho_{el}$  elektrische Ladungsdichte, 15
- Rotation, 292–294
- Rotor, 166
- s-Polarisation, 233, 238–241, 251, 252, 255
- s-polarisiert, 234
- Satz von Gauss, 295
- Satz von Green, 296
- Satz von Larmor, 182–186
- Satz von Stokes, 296
- Schaltungen, 82–92
- Schiefwinkliges Dreieck, 321–322
- Schmiegungsebene, 285
- Schwingkreis, 161–163
  - elektrisch, 163
  - gedämpft, 162–163
  - komplex, 163–165
  - ideal, 160–161
  - komplex, 161–162
- Selbstinduktion, 137
- Selbstinduktivität, 147, 149
- Serienschaltung, 43
- SI-System, 98, 101
- Signalfilterung, 163
- Skineffekt, 175–178
  - Frequenz, 178
- Spannung, 32, 33, 41, 43, 44, 46, 50, 56–58, 61, 66, 78, 80, 84, 86–89, 91, 92, 121, 122, 136, 137, 150, 151, 153–157, 159, 161, 167, 195, 272
  - induziert, 141, 150, 156
  - mechanisch, 45
- Spannungsquelle, 80
- Sperrrichtung, 85
- spezifischer Widerstand, 72, 141, 271

- Sphärische Koordinaten, 305–308
- Spiegelsymmetrie, 26
- Spin, 189
  - Elektronen, 189–190
- Spule, 135
  - endlich lang, 145–147
  - unendlich lang, 143–145
- Stator, 166
- Stehende Wellen, 220–221
- stehende Wellen
  - Energiefluss, 222
  - Poyntingvektor, 222
- Stetigkeit, 52–53
  - dielektrische Verschiebung, 52, 63
  - elektrisches Feld, 52, 63
  - Potential, 53, 63
- Stokes, G. G., 296
- Strahlungsfeld, 225
- Strom, 66–68, 70, 77, 86–88, 90, 91, 93, 95, 98, 100, 101, 106, 107, 109, 111, 112, 118–120, 122, 128, 134–137, 141, 142, 144, 145, 147–151, 154, 155, 157, 159, 160, 167, 170, 171, 176, 182, 187, 189, 194, 195
  - elektrisch, 66
  - makroskopisch, 128
- Stromdichte, 67, 69
- Stromdichtefeld, 68
- Stromkreise, 79–82
- Stromverteilung
  - Magnetfeld, 114–120
- Suszeptibilität, 180
  - dielektrisch, 63
- Symmetrieüberlegungen, 26
- Tangente, 285
- Tangente an Kurve, 285
- Taylorreihe, 278–279
- Tensor, 39, 71, 222, 268, 272, 273
- Transformator, 147–151
- Translationsinvarianz, 25
- Umrechnung
  - kartesisch zu sphärisch, 306
  - kartesisch zu zylindrisch, 306
  - sphärisch zu kartesisch, 306
  - sphärisch zu zylindrisch, 307
  - zylindrisch zu kartesisch, 307
  - zylindrisch zu sphärisch, 308
- Vakuum, 209, 210
- Vakuumpermittivität, 229
- van de Graaff-Generator, 78
- Vektoren, 283–286
  - Ableitung, 287–294
  - Vektorprodukt, 286–287
- Vektorfeld, 13, 67, 116, 129, 208, 269, 291
  - Stromdichte, 69
- Vektoridentitäten, 286–295
- Vektorpotential, 114–117, 119, 120, 131
- Vektorprodukt, 286–287
- Verschiebung
  - dielektrisch, 19
- Verschiebungspolarisation, 52
- Verschiebungsstrom, 133
- Vierervektor, 97
- Volumen, 286
- Weber, 135
- Wechselspannungsquelle, 163
- Wechselstrom
  - Induktivität, 156–157
    - komplex, 157–158
  - Ohmscher Widerstand, 153–155
    - komplex, 155–156
  - Spule, 156–157
    - komplex, 157–158
- Wechselstromkreise, 153–165
- Wechselstromwiderstand
  - Kapazität, 159
  - Kondensator, 159
- Wellen
  - Doppelleiter, 213–218
  - elektromagnetisch, 209–260
  - Raum, 222–227
  - stehend, 220–221
- Wellengleichung, 209–211
  - allgemeine Lösung, 211–213
  - Vakuum, 209–211
- Wellenvektor, 227
- Wellenwiderstand, 218–220
- Wellenzahl, 227
- Wideroe-Bedingung, 174
- Widerstand, 72, 75, 76, 78–80, 82–84, 88, 90–92, 134, 137, 154, 155,



162, 163, 176, 179, 214, 218,  
219, 271, 273  
induktiv, 157, 158, 274  
kapazitiv, 274  
ohmsch, 150  
    komplex, 155–156  
    Wechselstrom, 153–155  
spezifisch, 72, 141, 271  
Winkel  
    Euler, 329–330  
Wirbelstrom, 141–143  
  
Zahlendichte, 191  
zeitlich veränderliche Magnetfelder, 133–  
197  
Zylinderkoordinaten, 305–308

