Übungsblatt 04

PHYS1100 Grundkurs I (Physik, Wirtschaftsphysik, Physik Lehramt)

Othmar Marti, (othmar.marti@uni-ulm.de)

11. 11. 2005 und 14. 11. 2005

1 Aufgaben

1. Berechnen Sie die kinetische Energien

   a) eines SMART ($805kg$) bei $100km/h$,

   b) eines Lastwagens ($4 \cdot 10^7 g$) bei $90km/h$,

   c) eines VW Touareg ($2945kg$) bei $201km/h$,

   d) eines Velofahrers ($80kg$, inklusive Velo) bei $15km/h$,

   e) eine Fahrradfahrerin ($70kg$, inklusive Fahrrad) bei $50km/h$,

   f) eines Joggers ($62.143kg$) bei $11.743km/h$

   g) einer Gewehrkugel (zylinderförmig, $6mm$ Durchmesser, $20mm$ Länge aus Blei (Daten bitte selber nachschlagen) bei $600m/s$ und

   h) eines Kometen ($10^3 t$), bei $12km/s$.

2. Gegeben seien die Kraftfelder (Kraftvektoren, die eine Funktion des Ortes sind)

   a)
   $$\boldsymbol{F}_1(x, y, z) = \begin{pmatrix} ax^3 \\ bx^4 \\ cx^5 \end{pmatrix}$$

   b)
   $$\boldsymbol{F}_2(x, y, z) = \begin{pmatrix} ay^3 \\ bz^5 \\ cx \end{pmatrix}$$

   Berechnen Sie jeweils ausgehend vom Koordinatenursprung die Arbeit entlang der x-, y- und der z-Achse sowie entlang der Winkelhalbierenden zwischen der positiven x-Achse und der positiven y-Achse.

3. Gegeben seien die Kraftfelder (Kraftvektoren, die eine Funktion des Ortes sind)

   a)
$$\boldsymbol{F}_3(x,y,z) = \begin{pmatrix} ax^2 \\ by^2 \\ cz^2 \end{pmatrix}$$

   b)
$$\boldsymbol{F}_4(x,y,z) = \begin{pmatrix} ae^{x^2/x_0^2} \\ b\cosh(y/y_0) \\ c\sinh(z/z_0) \end{pmatrix}$$

   c)
$$\boldsymbol{F}_5(x,y,z) = \frac{2e^{(x^2+y^2+z^2)/r_0^2}}{r_0^2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

   d)
$$\boldsymbol{F}_6(x,y,z) = \begin{pmatrix} ay+cz \\ bz+ax \\ cx+by \end{pmatrix}$$

   e)
$$\boldsymbol{F}_7(x,y,z) = a \begin{pmatrix} \frac{-yz\sin(x/x_0)}{x_0} \\ z\cos(x/x_0) \\ y\cos(x/x_0) \end{pmatrix}$$

   Berechnen Sie jeweils E_{pot} entlang der x-, y- und der z-Achse sowie entlang der Winkelhalbierenden zwischen der positiven x-Achse und der positiven y-Achse. E_{pot} sei am Koordinatenursprung null.

4. Verwenden Sie die Rotation, um aus den Kraftfeldern aus den Aufgaben 2 und 3 die konservativen und die nicht-konservativen Kraftfelder zu finden.

5. Gegeben sei
$$\boldsymbol{F}_8(x,y,z) = \begin{pmatrix} ax^4 \\ by^2 \\ cz^6 \end{pmatrix}$$

   Berechnen Sie $E_{pot}(1,1,1)$, indem Sie $E_{pot}(0,0,0) = 0$ setzen und entlang der Pfade

   a) $(0,0,0) \longrightarrow (1,0,0) \longrightarrow (1,1,0) \longrightarrow (1,1,1)$
   b) $(0,0,0) \longrightarrow (0,1,0) \longrightarrow (0,1,1) \longrightarrow (1,1,1)$
   c) $(0,0,0) \longrightarrow (0,0,1) \longrightarrow (1,0,1) \longrightarrow (1,1,1)$

   integrieren.

6. Die Bahn eines wiederkehrenden Kometen ist durch

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} a\cos(t/t_0) \\ b\sin(t/t_0) \end{pmatrix}$$

(Ellipsenbahn) gegeben. Berechnen Sie

a) Drücken Sie $ds(t)$ als Funktion von $dx(t) = \frac{df_x(t)}{dt}dt$ und $dy(t)$ aus.
b) Berechnen Sie $\boldsymbol{\tau}(t)$.
c) Berechnen Sie $R(t)$.
d) Berechnen Sie $\boldsymbol{n}(t)$.
e) Berechnen Sie $v(t)$.
f) Berechnen Sie $a_\tau(t)$.
g) Berechnen Sie $a_n(t)$.

7. Gegeben sind die Messdaten aus der Vorlesung

		m_1 vorher		m_2 vorher		m_1 nachher		m_2 nachher	
m_1/kg	m_2/kg	f_1	f_2	f_1	f_2	f_1	f_2	f_1	f_2
0.5	0.5	335	352	0	0	0	0	386	404
0.5	0.5	787	792	0	0	0	0	801	806
0.5	0.5	2032	2040	0	0	0	0	2055	2064
0.75	0.5	3670	3678	0	0	3691	3735	3687	3695
0.75	0.5	4242	4250	0	0	4258	4296	4262	4270
0.25	0.75	5382	5388.5	0	0	5413	5396	5406	5420
0.5	0.75	6810	6816	0	0	6881	6829	6826	6834
0.5	0.75	7103	7108	0	0	7165	7117	7117	7124
0.5	0.75	7930	7937	0	0	7995	7944	7944	7956
0.5	0.5	9378	9386	9384	9377	9410	9401	9405	9414
0.5	0.5	10364	10377	10403	10400	10413	10409	10407	10462
0.5	0.5	10934	10945	10953	10946	10972	10965	10969	10983
0.25	0.75	12388	12399	12414	12401	12444	12436	12500	12572
0.25	0.75	14211	14197	14224	14217	14234	14229	14248	14239
0.75	0.25	14677	14665	14685	14681	14694.5	14689	0	0

Die Bildnummern (Frames) f_i sind notiert worden, wenn die Schlitten die linken (f_1) und die rechte (f_2) Markierung jeweils im Abstand von $20cm$ berührt haben. Die Videokamera nimmt 25 Bilder pro Sekunde auf. Der Messfehler ist jeweils $\pm 0.5 Frames$.

Wir vermuten, dass der Gesamtimpuls vorher p_{vorher} gleich dem Gesamtimpuls nachher $p_{nachher}$ ist, und dass das gleiche für die Gesamtenergie E_{kin} gilt. Um dies zu zeigen berechnen Sie die Differenzen $< \Delta p >=< p_{vorher} - p_{nachher} >$ und $< \Delta E >=< E_{kin,\,vorher} - E_{kin,\,nachher} >$ sowie die Grössen $\sigma_{<\Delta p>}$ und $\sigma_{<\Delta E>}$. Diskutieren Sie die Resultate.

Das Videofile gibt es unter 2005-11-02.avi ($16MBytes$, XVid). Die dazugehörige Software VirtualDub gibt es bei SourceForge.

2 Lösungen

1. a)

$$W_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$$
$$W = 310570{,}99J \approx 3{,}1 \cdot 10^5 J$$

b)

$$W = 1{,}25 \cdot 10^7 J$$

c)

$$W = 4590314{,}24J \approx 4{,}6 \cdot 10^6 J$$

d)

$$W = 694{,}44J \approx 694J$$

e)

$$W = 6751{,}54J \approx 6752J$$

f)

$$W = 330{,}61J \approx 331J$$

g)

$$W = 1154{,}3J \qquad m = \rho \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h = 6{,}41 \cdot 10^{-3} kg$$
$$\rho = 11{,}34 \frac{kg}{dm^3}$$

h)

$$W = 7{,}2 \cdot 10^{13} J$$

2. Kurvenintegrale allgemein:

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\boldsymbol{x}) \\ f_2(\boldsymbol{x}) \\ f_3(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}$$

Kurve Γ:

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \qquad a \leq t \leq b$$

$$\int_\Gamma \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} = \int_\Gamma f_1(\boldsymbol{x})\, dx + f_2(\boldsymbol{x})\, dy + f_3(\boldsymbol{x})\, dz$$

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} &= \int_a^b \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}(t)) \cdot \frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt} dt \\ &= \int_a^b \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}(t)) \cdot \dot{\boldsymbol{x}}(t)\, dt \\ &= \int_a^b \left(f_1(\boldsymbol{x}(t))\, \dot{x}(t) + f_2(\boldsymbol{x}(t))\, \dot{y}(t) + f_3(\boldsymbol{x}(t))\, \dot{z}(t)\right) dt\end{aligned}$$

a)

$$\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} ax^3 \\ bx^4 \\ cx^5 \end{pmatrix}$$

$$\Gamma_1 : x - Achse : 0 \leq t \leq s \qquad \boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$W_x = \int_0^s a\,(x(t))^3 \cdot 1dt = \int_0^s at^3 dt = \frac{1}{4} as^4$$

$$\Gamma_2 : y - Achse : 0 \leq t \leq s \quad \boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$W_y = \int_0^s b\,(x(t))^4 \cdot 1dt = \int_0^s 0 \cdot 1dt = 0$$

$$\Gamma_3 : z - Achse : 0 \leq t \leq s \quad \boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$$

$$W_z = \int_0^s c\,(x(t))^5 \cdot 1dt = \int_0^s 0 \cdot 1dt = 0$$

$$\Gamma_4 : \text{Winkelhalbierende} : 0 \leq t \leq s \quad \boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
W_{xy} &= \int_0^s a\left(x\left(t\right)\right)^3 \cdot 1 + b\left(x\left(t\right)\right)^4 \cdot 1dt \\
&= \int_0^s a \cdot t^3 + bt^4 dt \\
&= \frac{1}{4}as^4 + \frac{1}{5}bs^5
\end{aligned}
$$

Weglänge hier : $\sqrt{2} \cdot s$!

b)

$$
\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} ay^3 \\ bz^5 \\ cx \end{pmatrix}
$$

$$
\Gamma_1 : x - Achse\ 0 \leq t \leq s \quad \boldsymbol{x}\left(t\right) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

$$
W_x = \int_0^s a\left(y\left(t\right)\right)^3 \cdot 1dt = \int_0^s 0 \cdot 1dt = 0
$$

$$
\Gamma_2 : y - Achse : 0 \leq t \leq s \quad \boldsymbol{x}\left(t\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{pmatrix}
$$

$$
W_y = \int_0^s b\left(z\left(t\right)\right)^5 \cdot 1dt = \int_0^s 0 \cdot 1dt = 0
$$

$$
\Gamma_3 : z - Achse : 0 \leq t \leq s \quad \boldsymbol{x}\left(t\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}
$$

$$
W_z = \int_0^s cx\left(t\right) \cdot 1dt = \int_0^s 0 \cdot 1dt = 0
$$

$$
\Gamma_4 : \text{Winkelhalbierende} : 0 \leq t \leq s \quad \left(\boldsymbol{x}\right)t = \begin{pmatrix} t \\ t \\ 0 \end{pmatrix}
$$

$$W_{xy} = \int_0^s a\left(y\left(t\right)\right)^3 \cdot 1 + b\left(z\left(t\right)\right)^5 \cdot 1 + cx\left(t\right) \cdot 0dt$$
$$= \int_0^s at^3 dt = \frac{1}{4}as^4$$

hier: $s = x_{Ende} = y_{Ende} \neq$Weglänge
Weglänge:$l = \sqrt{2} \cdot s$

3. a)

$$E_{pot} = -\int \boldsymbol{F} d\boldsymbol{s}$$
$$E_x = -\int_0^s a\left(x\left(t\right)\right)^2 \cdot 1dt = -\int_0^s at^2 dt = -\frac{1}{3}as^3$$
$$E_y = -\frac{1}{3}bs^3$$
$$E_z = -\frac{1}{3}cs^3$$
$$E_{xy} = -\int_0^s at^2 \cdot 1 + bt^2 \cdot 1 + ct^2 \cdot 0dt = -\left(\frac{1}{3}as^3 + \frac{1}{3}bs^3\right)$$

b)

$$E_x = -\int_0^s a \cdot e^{\frac{t^2}{x_0^2}} \cdot 1dt = -\left(-\frac{1}{2}ia\sqrt{\pi}x_0 \operatorname{erf}\left(\frac{i \cdot s}{x_0}\right)\right)$$
$$E_y = -\int_0^s b\cosh\left(\frac{t}{y_0}\right) \cdot 1dt = -y_0 b \sinh\left(\frac{s}{y_0}\right)$$
$$E_z = -\int_0^s c\sinh\left(\frac{t}{z_0}\right) \cdot 1dt = -z_0 c\left(\cosh\left(\frac{s}{z_0}\right) - 1\right)$$
$$E_{xy} = -\int_0^s ae^{\frac{t^2}{x_0^2}} \cdot 1 + b\cosh\left(\frac{t}{y_0}\right) \cdot 1dt$$
$$= -\left(-\frac{1}{2}ia\sqrt{\pi}x_0 \operatorname{erf}\left(\frac{i \cdot s}{x_0}\right) + y_0 b \sinh\left(\frac{s}{y_0}\right)\right)$$

Error Function: $\operatorname{erf}\left(x\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^x e^{-t^2} dt$

c)

$$
\begin{aligned}
E_x &= -\int_0^s \frac{2e^{\frac{t^2}{r_0^2}}}{r_0^2} \cdot t \cdot 1dt = -e^{\frac{s^2}{r_0^2}} + 1 \\
E_y &= -e^{\frac{s^2}{r_0^2}} + 1 \\
E_z &= -e^{\frac{s^2}{r_0^2}} + 1 \\
E_{xy} &= -\int_0^s \frac{2e^{\frac{2t^2}{r_0^2}}}{r_0^2} t \cdot 1 + \frac{2e^{\frac{2t^2}{r_0^2}}}{r_0^2} \cdot t \cdot 1dt \\
&= -\left(\frac{1}{2}e^{\frac{2s^2}{r_0^2}} + \frac{1}{2}e^{\frac{2s^2}{r_0^2}}\right) + 1 \\
&= 1 - e^{\frac{2s^2}{r_0^2}}
\end{aligned}
$$

(Weglänge ℓ: mit $s = \frac{\ell}{\sqrt{2}}$ folgt das gleiche Ergebnis wie für E_x.)

d)

$$
\begin{aligned}
E_x &= -\int_0^s (a \cdot 0 + c \cdot 0) \cdot 1dt = 0 \\
E_y &= -\int_0^s (b \cdot 0 + a \cdot 0) \cdot 1dt = 0 \\
E_z &= -\int_0^s (c \cdot 0 + b \cdot 0) \cdot 1dt = 0 \\
E_{xy} &= -\int_0^s (at + c \cdot 0) \cdot 1 + (b \cdot 0 + a \cdot t) \cdot 1 + (c \cdot t + b \cdot t) \cdot 0dt \\
&= -as^2
\end{aligned}
$$

e)

$$E_x = -\int_0^s \frac{a \cdot 0}{x_0} \cdot \sin\left(\frac{t}{x_0}\right) \cdot 1dt = 0$$

$$E_y = -\int_0^s a \cdot 0 \cdot \cos 0 \cdot 1dt = 0$$

$$E_z = -\int_0^s a \cdot 0 \cdot \cos 0 \cdot 1dt = 0$$

$$E_{xy} = -\int_0^s a \cdot (-t) \cdot 0 \cdot \sin\left(\frac{t}{x_0}\right) \frac{1}{x_0} \cdot 1 + a \cdot 0 \cdot \cos\left(\frac{t}{x_0}\right) \cdot 1dt = 0$$

4. Rotation: rot $\boldsymbol{F} = \nabla \times \boldsymbol{F}$

$$\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \qquad \text{rot } \boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial z} \\ \frac{\partial a}{\partial z} - \frac{\partial c}{\partial x} \\ \frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y} \end{pmatrix}$$

a)

$$\text{rot } \boldsymbol{F}_1 = \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ 0 - 5cx^4 \\ 4bx^3 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5cx^4 \\ 4bx^3 \end{pmatrix}$$

b)

$$\text{rot } \boldsymbol{F}_2 = \begin{pmatrix} 0 - 5bz^4 \\ 0 - c \\ 0 - 3ay^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5bz^4 \\ -c \\ -3ay^2 \end{pmatrix}$$

c)

$$\text{rot } \boldsymbol{F}_3 = \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ 0 - 0 \\ 0 - 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

d)

$$\text{rot } \boldsymbol{F}_4 = \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ 0 - 0 \\ 0 - 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

e)

$$\text{rot } \boldsymbol{F}_5 = \begin{pmatrix} yz - yz \\ xz - xz \\ xy - xy \end{pmatrix} \cdot \frac{4e^{\frac{x^2+y^2+z^2}{r_0^2}}}{r_0^4} = \mathbf{0}$$

f)

$$\text{rot } \boldsymbol{F}_6 = \begin{pmatrix} b - b \\ c - c \\ a - a \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

g)

$$\text{rot } \boldsymbol{F}_7 = \begin{pmatrix} a\cos\frac{x}{x0} - a\cos\frac{x}{x0} \\ -\frac{a}{x0}y\sin\left(\frac{x}{x0}\right) + \frac{a}{x0}y\sin\left(\frac{x}{x0}\right) \\ -\frac{a}{x0}z\sin\left(\frac{x}{x0}\right) + \frac{a}{x0}z\sin\left(\frac{x}{x0}\right) \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

5.

$$\boldsymbol{F}_8 = \begin{pmatrix} ax^4 \\ by^2 \\ cz^6 \end{pmatrix}$$

a)

$$\begin{aligned} E_{pot} &= \int_{\Gamma_1} -\boldsymbol{F}d\boldsymbol{s} + \int_{\Gamma_2} -\boldsymbol{F}d\boldsymbol{s} + \int_{\Gamma_3} -\boldsymbol{F}d\boldsymbol{s} \\ &= E_1 + E_2 + E_3 \end{aligned}$$

$$E_1 = -\int_0^1 at^4 \cdot 1dt = -\frac{1}{5}at^5\Big|_0^1 = -\frac{1}{5}a$$

$$E_2 = -\int_0^1 bt^2 \cdot 1dt = -\frac{1}{3}bt^3\Big|_0^1 = -\frac{1}{3}b$$

$$E_3 = -\int_0^1 ct^6 \cdot 1dt = -\frac{1}{7}ct^7\Big|_0^1 = -\frac{1}{7}c$$

$$E_{pot}\,(1{,}1{,}1) = -\frac{1}{5}a - \frac{1}{3}b - \frac{1}{7}c$$

b) analog, nur Reihenfolge verschieden $\Rightarrow$ gleiches Ergebnis

c) analog, nur Reihenfolge verschieden $\Rightarrow$ gleiches Ergebnis

6.

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} a & \cos & \frac{t}{t_0} \\ b & \sin & \frac{t}{t_0} \end{pmatrix}$$

a)

$$\begin{aligned} ds(t) &= \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}dt \\ &= \sqrt{\left(\frac{a}{t_0}\sin\frac{t}{t_0}\right)^2 + \left(\frac{b}{t_0}\cos\frac{t}{t_0}\right)^2}dt \end{aligned}$$

b)

$$\boldsymbol{\tau}(t) = \begin{pmatrix} \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}} \\ \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{a}{t_0}\sin\frac{t}{t_0}\right)^2 + \left(\frac{b}{t_0}\cos\frac{t}{t_0}\right)^2}} \begin{pmatrix} -\frac{a}{t_0} & \sin & \frac{t}{t_0} \\ \frac{b}{t_0} & \cos & \frac{t}{t_0} \end{pmatrix}$$

c)

$$\begin{aligned} R(t) &= \frac{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}} = \frac{\sqrt{\left(\frac{a}{t_0}\sin\frac{t}{t_0}\right)^2 + \left(\frac{b}{t_0}\cos\frac{t}{t_0}\right)^2}^3}{(*)} \\ (*) &= -\frac{a}{t_0}\sin\frac{t}{t_0}\cdot\left(-\frac{b}{t_0^2}\sin\frac{t}{t_0}\right) + \frac{a}{t_0^2}\cos\frac{t}{t_0}\cdot\frac{b}{t_0}\cos\frac{t}{t_0} \\ &= \frac{ab}{t_0^3}\sin^2\frac{t}{t_0} + \frac{ab}{t_0^3}\cos^2\frac{t}{t_0} \\ &= \frac{ab}{t_0^3} \\ R(t) &= \frac{\sqrt{\left(\frac{a}{t_0}\sin\frac{t}{t_0}\right)^2 + \left(\frac{b}{t_0}\cos\frac{t}{t_0}\right)^2}^3}{\frac{ab}{t_0^3}} \\ &= \frac{t_0^3}{ab}\cdot\frac{1}{t_0^3}\sqrt{a^2\sin^2\frac{t}{t_0} + b^2\cos^2\frac{t}{t_0}}^3 \end{aligned}$$

d)

$$\boldsymbol{n}(t) = \begin{pmatrix} \frac{-\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}} \\ \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{a}{t_0}\sin\frac{t}{t_0}\right)^2 + \left(\frac{b}{t_0}\cos\frac{t}{t_0}\right)^2}} \begin{pmatrix} -\frac{b}{t_0} & \cos & \frac{t}{t_0} \\ -\frac{a}{t_0} & \sin & \frac{t}{t_0} \end{pmatrix}$$

e)

$$v(t) = |\boldsymbol{v}(t)| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$$

f)

$$
\begin{aligned}
a_\tau(t) &= \frac{\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \\
&= \frac{-\frac{a}{t_0}\sin\frac{t}{t_0}\cdot\left(-\frac{a}{t_0^2}\cos\frac{t}{t_0}\right) + \frac{b}{t_0}\cos\frac{t}{t_0}\cdot\left(-\frac{b}{t_0^2}\sin\frac{t}{t_0}\right)}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \\
&= \frac{\sin\frac{t}{t_0}\cdot\cos\frac{t}{t_0}\left(\frac{a^2}{t_0^3} - \frac{b^2}{t_0^3}\right)}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \\
&= \frac{(a^2 - b^2)\,\frac{1}{t_0^3}\sin\frac{t}{t_0}\cdot\cos\frac{t}{t_0}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \\
&= \frac{(a^2 - b^2)\,\frac{1}{t_0^3}\sin\frac{t}{t_0}\cdot\cos\frac{t}{t_0}}{\sqrt{\left(\frac{a}{t_0}\sin\frac{t}{t_0}\right)^2 + \left(\frac{b}{t_0}\cos\frac{t}{t_0}\right)^2}}
\end{aligned}
$$

g)

$$
\begin{aligned}
a_n(t) &= \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = \frac{v^2}{R} \\
&= \frac{\left(\sqrt{\left(\frac{a}{t_0}\sin\frac{t}{t_0}\right)^2 + \left(\frac{b}{t_0}\cos\frac{t}{t_0}\right)^2}\right)^2}{\left(\sqrt{\left(\frac{a}{t_0}\sin\frac{t}{t_0}\right)^2 + \left(\frac{b}{t_0}\cos\frac{t}{t_0}\right)^2}\right)^3}\cdot\left(\frac{t_0^3}{ab}\right)^{-1} = \frac{ab}{t_0^3\sqrt{\ldots}} \\
&= \frac{ab}{t_0^3\sqrt{\left(\frac{a}{t_0}\sin\frac{t}{t_0}\right)^2 + \left(\frac{b}{t_0}\cos\frac{t}{t_0}\right)^2}} \\
&= \frac{ab}{t_0^2\sqrt{a^2\sin^2\frac{t}{t_0} + b^2\cos^2\frac{t}{t_0}}}
\end{aligned}
$$

		m1 vorher		m2 vorher		m1 nachher		m2 nachher	
m1	**m2**	**f1**	**f2**	**f1**	**f2**	**f1**	**f2**	**f1**	**f2**
0,5	0,50	335	352	0	0	0	0	386	404
0,5	0,50	787	792	0	0	0	0	801	806
0,5	0,50	2032	2040	0	0	0	0	2055	2064
0,75	0,50	3670	3678	0	0	3691	3735	3687	3695
0,75	0,50	4242	4250	0	0	4258	4296	4262	4270
0,25	0,75	5382	5388,5	0	0	5413	5396	5406	5420
0,5	0,75	6810	6816	0	0	6881	6829	6826	6834
0,5	0,75	7103	7108	0	0	7165	7117	7117	7124
0,5	0,75	7930	7937	0	0	7995	7944	7944	7956
0,5	0,50	9378	9386	9384	9377	9410	9401	9405	9414
0,5	0,50	10364	10377	10403	10400	10413	10409	10407	10462
0,5	0,50	10934	10945	10953	10946	10972	10965	10969	10983
0,25	0,75	12388	12399	12414	12401	12444	12436	12500	12572
0,25	0,75	14211	14197	14224	14217	14234	14229	14248	14239
0,75	0,25	14677	14665	14685	14681	14694,5	14689	0	0

Frames / s: 25,00
Zeit pro Frame: 0,04 s
Strecke: 0,2 m

		vorher		nachher	
m1	m2	v1 / m/s	v2 / m/s	v1 / m/s	v2 / m/s
0,5	0,5	0,29411765	0	0	0,27777778
0,5	0,5	1	0	0	1
0,5	0,5	0,625	0	0	0,55555556
0,75	0,5	0,625	0	0,11363636	0,625
0,75	0,5	0,625	0	0,13157895	0,625
0,25	0,75	0,76923077	0	-0,29411765	0,35714286
0,5	0,75	0,83333333	0	-0,09615385	0,625
0,5	0,75	1	0	-0,10416667	0,71428571
0,5	0,75	0,71428571	0	-0,09803922	0,41666667
0,5	0,5	0,625	-0,71428571	-0,55555556	0,55555556
0,5	0,5	0,38461538	-1,66666667	-1,25	0,09090909
0,5	0,5	0,45454545	-0,71428571	-0,71428571	0,35714286
0,25	0,75	0,45454545	-0,38461538	-0,625	0,06944444
0,25	0,75	-0,35714286	-0,71428571	-1	-0,55555556
0,75	0,25	-0,41666667	-1,25	-0,90909091	0

p vorher	p nachher	E vorher	E nachher	Δp	ΔE
0,14705882	0,13888889	0,0216263	0,01929012	0,00816993	0,00233617
0,5	0,5	0,25	0,25	0	0
0,3125	0,27777778	0,09765625	0,07716049	0,03472222	0,02049576
0,46875	0,39772727	0,14648438	0,10249871	0,07102273	0,04398567
0,46875	0,41118421	0,14648438	0,10414863	0,05756579	0,04233574
0,19230769	0,19432773	0,0739645	0,05864478	-0,00202004	0,01531972
0,41666667	0,42067308	0,17361111	0,14879577	-0,00400641	0,02481535
0,5	0,48363095	0,25	0,1940392	0,01636905	0,0559608
0,35714286	0,26348039	0,12755102	0,06750709	0,09366246	0,06004393
-0,04464286	0	0,22520727	0,15432099	-0,04464286	0,07088628
-0,64102564	-0,57954545	0,73142669	0,39269112	-0,06148019	0,33873558
-0,12987013	-0,17857143	0,17920391	0,15943878	0,0487013	0,01976514
-0,17482517	-0,10416667	0,08129982	0,05063657	-0,07065851	0,03066324
-0,625	-0,66666667	0,20727041	0,24074074	0,04166667	-0,03347033
-0,625	-0,68181818	0,26041667	0,30991736	0,05681818	-0,04950069

	Δp	ΔE
Mittelwerte:	0,01639269	0,04282482
Std.Abw.:	0,04837503	0,08819565
Std.Abw. d. M.:	0,01249038	0,02277202

