Übungsblatt 11

PHYS1100 Grundkurs I (Physik, Wirtschaftsphysik, Physik Lehramt)

Othmar Marti, (othmar.marti@uni-ulm.de)

20. 1. 2006 und 23. 1. 2006

1 Aufgaben

1. In Röhrenfernsehgeräten werden Elektronen typischerweise mit einer Spannung von $20kV$ über eine Distanz von $d = 0.5m$ beschleunigt. Die als konstant angenommene Kraft berechnet sich aus

$$F = \frac{U}{d}e$$

   wobei $e = 1.6 \cdot 10^{-19}C = 1.6 \cdot 10^{-19}\frac{J}{V}$ die Elementarladung ist. Berechnen Sie relativistisch und klassisch

   a) den Weg des Elektrons als Funktion der Zeit im Laborsystem.
   b) die Geschwindigkeit des Elektrons als Funktion der Zeit im Laborsystem.
   c) die Beschleunigung des Elektrons als Funktion der Zeit im Laborsystem.
   d) die Masse des Elektrons als Funktion der Zeit im Laborsystem.
   e) die Energie des Elektrons als Funktion der Zeit im Laborsystem.
   f) die kinetische Energie des Elektrons als Funktion der Zeit im Laborsystem.

   Diskutieren Sie die Unterschiede.

2. Die Reise nach α-Centauri (4.24 Lichtjahre entfernt) soll so durchgeführt werden, dass auf dem halben Hinweg das Raumschiff mit einer konstanten Kraft F beschleunigt und auf dem zweiten Teil des Hinwegs mit der konstanten Kraft $-F$ gebremst wird. Berechnen Sie relativistisch

   a) die Reisedauer als Funktion der Kraft
   b) die maximale Geschwindigkeit als Funktion der Kraft
   c) die Reisedauer im Laborsystem und im Raumschiff

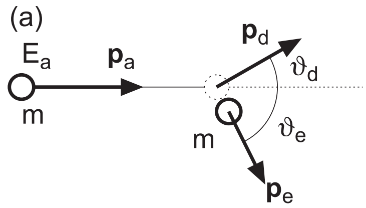
d) die maximale kinetische Energie eines Insassen, bei dem die Waage am Äquator auf Normalnull die Kraft $600N$ anzeigt.

3. Das Raumschiff aus der vorherigen Aufgabe kommuniziere mit der Erde mit elektromagnetischen Wellen mit einer Frequenz von $11GHz$. Da die Erdatmosphäre nur wenige Fenster ohne Absorption hat, kann diese Frequenz nicht geändert werden. Wie müssen die Sende- und Empfangsfrequenzen im Raumschiff verstimmt werden, damit die Kommunikation klappt? Berechnen Sie die Frequenzverstimmung als Funktion der Laborzeit und der Laborposition.

4. Im CERN bei Genf (Genève, Ginevra oder Geneva in drei anderen Sprachen) werden Elektronen und Positronen auf die Geschwindigkeit $k \cdot c$ mit $k < 1$ beschleunigt. Elektronen und Positronen laufen gegenläufig um den Speicherring. Wie gross ist die dissipierte Energie bei einem vollständig plastischen Stoss im klassischen Sinne? Was passiert wirklich?

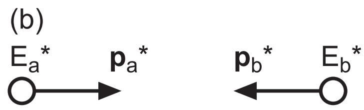
5. Wir studieren die elastische Streuung zweier identischer Teilchen der Masse m. Das einlaufende Teilchen der Energie E_a (Impuls $\boldsymbol{p}_a$) fällt auf das im Laborsystem ruhende Teilchen ein (a). Das einlaufende Teilchen wird um den Streuwinkel ϑ_d abgelenkt; das ruhende Teilchen fliegt unter dem Winkel ϑ_e zur Einfallsrichtung weg. Die Impulse nach der Streuung sind $\boldsymbol{p}_d$ sowie $\boldsymbol{p}_e$. Die Impulse $\boldsymbol{p}_a$ und $\boldsymbol{p}_d$ definieren die Reaktionsebene. Die Impulserhaltung senkrecht zur Reaktionsebene verlangt, dass auch $\boldsymbol{p}_e$ in der Reaktionsebene liegt. (Aufgabe nach Leisi, Klassische Physik 1, Birkhäuser)

   a) Berechnen Sie relativistisch die Schwerpunktsgeschwindigkeit v als Funktion von m und E_a.

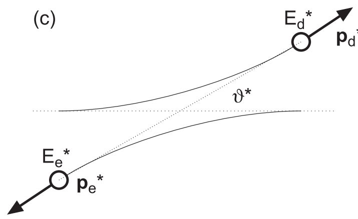


   b) Berechnen Sie die totale Energie $E*$ im Schwerpunktsystem als Funktion von m und E_a.

   c) Berechnen Sie die Impulse (p_a^*, p_b^*) und die Energien (E_a^*, E_b^*) der Teilchen im Schwerpunktsystem vor dem Stoss als Funktion von E_a und m (Abbildung (b)).



   d) Berechnen Sie die Impulse ($\boldsymbol{p}_d^*$, $\boldsymbol{p}_e^*$) und die Energien (E_d^*, E_e^*) der Teilchen nach dem Stoss, als Funktion von E_a, m und des Streuwinkels ϑ_d^* im Schwerpunktsystem (Abbildung c)).



   e) Drücken Sie die Streuwinkel ϑ_d, ϑ_e im Laborsystem aus durch E_a, m und den Streuwinkel ϑ^* im Schwerpunktsystem. Zeigen Sie, dass für nichtrelativistische Verhältnisse ($E_a \approx mc^2$) für die Winkel $(\vartheta_d + \vartheta_e) = \pi/2$, und für hochrelativistische Verhältnisse ($E_a \gg mc^2$) für die Winkel $(\vartheta_d + \vartheta_e) \rightarrow 0$ (Vorwärtsstreuung!) gilt.

6. α, β und γ seien die Eulerwinkel. Die Transformationsmatrix sei

$$T = \begin{pmatrix} -\cos\beta\sin\alpha\sin\gamma + \cos\alpha\cos\gamma & -\cos\beta\sin\alpha\cos\gamma - \cos\alpha\sin\gamma & \sin\beta\sin\alpha \\ \cos\beta\cos\alpha\sin\gamma + \sin\alpha\cos\gamma & \cos\beta\cos\alpha\cos\gamma - \sin\alpha\sin\gamma & -\sin\beta\cos\alpha \\ \sin\beta\sin\gamma & \sin\beta\cos\gamma & \cos\beta \end{pmatrix}$$

   a) Geben Sie die Eulerwinkel an für eine Drehung, die $(1,0,0)$ in $(0,2^{-1/2},2^{-1/2})$ überführt.

   b) Wie wird $(0,0,1)$ transformiert?

7. α, β und γ seien die Eulerwinkel. Die Transformationsmatrix T_1 transformiere $(1,0,0)$ nach $(0,1,0)$. T_2 transformiere $(0,1,0)$ nach $(0,0,1)$.

   a) Berechnen Sie $T_1\,T_2$.

   b) Berechnen Sie $T_2\,T_1$.

   c) Ist $T_1\,T_2 = T_2\,T_1$? Geben Sie eine Begründung an.

2 Lösungen

1.
$$F = \frac{U}{d} \cdot e = 6.4 \cdot 10^{-15} N$$

Ruhemasse des Elektrons:

$$m_0 = 9.10938 \cdot 10^{-31} kg$$

Ruheenergie des Elektrons:

$$m_0 c^2 = 8.1871 \cdot 10^{-14} J$$

Faktoren:

$$\frac{F}{m_0} = 7.03528 \cdot 10^{15} \frac{m}{s^2}$$
$$\frac{F}{m_0 c} = 2.3580 \cdot 10^7 \frac{1}{s}$$
$$\frac{m_0 c^2}{F} = 12.775 m$$

a) **relativistisch**

$$s\left(t\right) = \frac{m_0 c^2}{F} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{F \cdot t}{m_0 \cdot c} \right)^2} - 1 \right)$$

$$\begin{aligned} s(t) &= 12.775 m \left(\sqrt{1 + (2.3580 \cdot 10^7 \frac{1}{s})^2 t^2} - 1 \right) \\ &= 12.775 m \left(\sqrt{1 + 5.50708 \cdot 10^{14} \frac{1}{s^2} t^2} - 1 \right) \\ &= 3.5176 \cdot 10^{15} \frac{m}{s^2} t^2 - 4.8430 \cdot 10^{29} \frac{m}{s^4} t^4 + O\left(t^6\right) \end{aligned}$$

(nicht gefragt: Die relativistische Laufzeit ist $T = 1.2038 \cdot 10^{-8} s$)

klassisch

$$s(t) = \frac{1}{2} \frac{F}{m_0} t^2 = 3.5176 \cdot 10^{15} \frac{m}{s^2} t^2$$

(nicht gefragt: Die klassische Laufzeit ist $T = 1.1922 \cdot 10^{-8} s$)

b) **relativistisch**

$$v\left(t\right) = \frac{F}{m_0} \cdot \frac{t}{\sqrt{1 + \left(\frac{F \cdot t}{m_0 \cdot c} \right)^2}}$$

$$v\left(t\right) = 7.03528 \cdot 10^{15}\frac{m}{s^2} \cdot \frac{t}{\sqrt{1+\left(2.3580 \cdot 10^7 \frac{1}{s} \cdot t\right)^2}}$$
$$= 7.03528 \cdot 10^{15}\frac{m}{s^2}\, t - 1.93719 \cdot 10^{30}\frac{m}{s^4}\, t^3 + O\left(t^5\right)$$

klassisch

$$v(t) = \frac{F}{m_0}t = 7.03528 \cdot 10^{15}\frac{m}{s^2}t$$

c) **relativistisch**

$$a\left(t\right) = \frac{F}{m_0 \cdot \left(1+\left(\frac{F\cdot t}{m_0\cdot c}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$a\left(t\right) = 7.03528 \cdot 10^{15}\frac{m}{s^2} \cdot \left(1+\left(2.3580 \cdot 10^7 \frac{1}{s} \cdot t\right)^2\right)^{-\frac{3}{2}}$$
$$= 7.03528 \cdot 10^{15}\frac{m}{s^2} - 5.8116 \cdot 10^{30}\frac{m}{s^4}\, t^2 + O\left(t^4\right)$$

klassisch

$$a(t) = \frac{F}{m_0} = 7.03528 \cdot 10^{15}\frac{m}{s^2}$$

d) **relativistisch**

$$m\left(v\right) = \frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

und damit

$$m\left(t\right) = \frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{\frac{Ft}{m_0 c}}{\sqrt{1+\quad\frac{F\cdot t}{m_0\cdot c}}^{\,2}}\right)^2}} = m_0\sqrt{1+\left(\frac{F\cdot t}{m_0\cdot c}\right)^2}$$

$$m\left(t\right) = 9.10938 \cdot 10^{-31}kg\sqrt{1+\left(2.3580 \cdot 10^7 \frac{1}{s} \cdot t\right)^2}$$
$$= 9.10938 \cdot 10^{-31}kg + 2.5083 \cdot 10^{-16}\frac{kg}{s^2}\, t^2 + O\left(t^4\right)$$

klassisch

$$m(t) = m_0 = 9.10938 \cdot 10^{-31}kg$$

e) **relativistisch**

$$E(t) = m(v)\cdot c^2 = m_0 c^2\sqrt{1+\left(\frac{F\cdot t}{m_0\cdot c}\right)^2}$$

$$\begin{aligned}E(t) &= 8.1871\cdot 10^{-14}J\sqrt{1+\left(2.3580\cdot 10^7\frac{1}{s}\cdot t\right)^2}\\ &= 8.1871\cdot 10^{-14}J + 22.544\frac{J}{s^2}\,t^2 - 3.1037\cdot 10^{15}\frac{J}{s^4}\,t^4 + O\left(t^6\right)\end{aligned}$$

klassisch

$$E(t) = \frac{1}{2}m_0 v^2 = \frac{1}{2}m_0\left(\frac{F}{m_0}t\right)^2 = 22.544\frac{J}{s^2}t^2$$

f) **relativistisch**

$$E_{kin}(t) = (m(v) - m_0)\cdot c^2 = m_0 c^2\left(\sqrt{1+\left(\frac{F\cdot t}{m_0\cdot c}\right)^2}-1\right)$$

$$\begin{aligned}E_{kin}(t) &= 8.1871\cdot 10^{-14}J\left(\sqrt{1+\left(2.3580\cdot 10^7\frac{1}{s}\cdot t\right)^2}-1\right)\\ &= 22.544\frac{J}{s^2}\,t^2 - 3.1037\cdot 10^{15}\frac{J}{s^4}\,t^4 + O\left(t^6\right)\end{aligned}$$

klassisch

$$E_{kin}(t) = \frac{1}{2}m_0 v^2 = \frac{1}{2}m_0\left(\frac{F}{m_0}t\right)^2 = 22.544\frac{J}{s^2}t^2$$

2. Skript Seite 136 - 140

$$F(t) = F_0 = const.$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}v(t) &= \frac{F}{m_0}\cdot t\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{F\cdot t}{m_0\cdot c}\right)^2}}\\ a(t) &= \frac{F}{m_0}\frac{1}{\left(1+\left(\frac{F\cdot t}{m_0\cdot c}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

a) Es folgt:

$$
\begin{aligned}
s(t) &= \int_0^t v(t')\,dt' \\
&= \frac{m_0 \cdot c^2}{F}\left(\sqrt{\frac{m_0^2 c^2 + F^2 \cdot t^2}{m_0^2 \cdot c^2}} - 1\right) \\
&= \frac{m_0 \cdot c^2}{F}\left(\sqrt{1 + \left(\frac{F \cdot t}{m_0 \cdot c}\right)^2} - 1\right)
\end{aligned}
$$

Beschleunigt wird auf der 1. Hälfte der Strecke:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{2} &= 4{,}24 LJ \cdot \frac{1}{2} \\
&= 4{,}24 \cdot \frac{1}{2} \cdot 9{,}46 \cdot 10^{15} m \\
&= 2{,}0 \cdot 10^{16} m
\end{aligned}
$$

Auflösen nach t:

$$
\sqrt{\left(\frac{s \cdot F}{m_0 \cdot c^2} + 1\right)^2 - 1} \cdot \frac{m_0 \cdot c}{F} = t
$$

$$
\begin{aligned}
t &= \sqrt{\frac{s^2 \cdot F^2}{m_0^2 \cdot c^4} + \frac{2 \cdot s \cdot F}{m_0 \cdot c^2}}\,\frac{m_0 \cdot c}{F} \\
t &= \sqrt{\frac{F \cdot s}{m_0 \cdot c^2} \cdot \frac{m_0^2 \cdot c^2}{F^2}\left(\frac{F \cdot s}{m_0 \cdot c^2} + 2\right)} \\
&= \sqrt{\frac{s \cdot m_0}{F}\left(\frac{F \cdot s}{m_0 \cdot c^2} + 2\right)} \\
&= \sqrt{\frac{s^2}{c^2} + \frac{2 m_0 \cdot s}{F}}
\end{aligned}
$$

Die Reisedauer ist:

$$
\begin{aligned}
T &= 2 \cdot t\left(\frac{d}{2}\right) \\
&= 2\sqrt{\frac{d^2}{4c^2} + 2\frac{m_0 \cdot d}{2F}}
\end{aligned}
$$

b)

$$v_{\max} = v\left(t\left(\frac{d}{2}\right)\right)$$
$$= \frac{F}{m_0}\cdot\sqrt{\frac{d^2}{4c^2}+\frac{m_0\cdot d}{F}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{F^2}{m_0^2c^2}\left(\frac{d^2}{4c^2}+\frac{m_0 d}{F}\right)}}$$

c) Zeit im Raumschiff

$$d\tau = dt\cdot\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{dt}{\sqrt{1+\left(\frac{F\cdot t}{m_0 c}\right)^2}}$$
$$\Rightarrow \tau = \int_0^t \frac{d\hat{t}}{\sqrt{1+\left(\frac{F\cdot\hat{t}}{m_0\cdot c}\right)^2}} = \frac{m_0\cdot c}{F} Ar\sinh\left(\frac{F\cdot t}{m_0 c}\right)$$
$$\tau\left(t\left(\frac{d}{2}\right)\right) = \frac{m_0\cdot c}{F} Ar\sinh\left(\frac{F\sqrt{\frac{d^2}{4c^2}+\frac{m_0 d}{F}}}{m_0\cdot c}\right)$$
$$\tau_{ges} = 2\cdot\tau$$

d) Kinetische Energie:

$$E_{kin} = m_0c^2\left(\sqrt{1+\left(\frac{F\cdot t}{m_0\cdot c}\right)^2}-1\right)$$
$$E_{kin,}\max = E_{kin}\left(t\right)\left(\frac{d}{2}\right)$$
$$= m_0c^2\left(\sqrt{1+\frac{F^2}{m_0^2c^2}\left(\frac{d^2}{4c^2}+\frac{m_0 d}{F}\right)}-1\right)$$

m_0 aus Gewichtskraft:
$G = m_0\cdot g \Rightarrow m_0 = \frac{G}{g}$
g am Äquator: $9.745\frac{m}{s^2}$
$\Rightarrow m_0 = \frac{600N}{9.745\frac{m}{s^2}} = 61.57kg$
oder: $9.78\frac{m}{s^2}$
$\Rightarrow m_0 = \frac{600N}{9.745\frac{m}{s^2}} = 61.35kg$

3. Der Sender auf der Erde strahlt $11GHz$ aus (ν_1); der Empfänger im bewegten Raumschiff detektiert ν_2.

$$\nu_2 = \nu_1\sqrt{\frac{1-\frac{v(t)}{c}}{1+\frac{v(t)}{c}}}$$

die Geschwindigkeit in Abhängigkeit von der Zeit ist

$$v(t) = \frac{F\,t}{m_0}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{F^2t^2}{{m_0}^2c^2}}}$$

Damit ist ν_2 in Abhängigkeit von der Laborzeit t

$$\nu_2 = \nu_1\sqrt{\frac{+F\,t-\sqrt{{m_0}^2c^2+F^2t^2}}{\sqrt{{m_0}^2c^2+F^2t^2}+F\,t}}$$

Für die Bremszeit bis nach α-Centauri wird danach mit symmetrischer Frequenzgestaltung empfangen.
Dementsprechend muss für den Empfang einer Frequenz auf der Erde mit $\nu 2 = 11GHz$ ein Signal ν_1 vom bewegten Raumschiff aus gesendet werden mit:

$$\nu_1 = \nu_2\sqrt{\frac{1+\frac{v(t)}{c}}{1-\frac{v(t)}{c}}}$$

Die Geschwindigkeit in Abhängigkeit von der Zeit ist

$$v(t) = \frac{F\,t}{m_0}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{F^2t^2}{{m_0}^2c^2}}}$$

Damit ist ν_1 in Abhängigkeit von der Laborzeit t

$$\nu_1 = \nu_2\sqrt{\frac{\sqrt{{m_0}^2c^2+F^2t^2}+F\,t}{F\,t-\sqrt{{m_0}^2c^2+F^2t^2}}}$$

Für die Bremszeit bis nach α-Centauri muss danach mit symmetrischer Frequenzgestaltung gesendet werden.
In Abhängigkeit von der Laborposition, d.h. $v = v(s) = v(s(t)) = v(t)$

$$\nu_2 = \nu_1\sqrt{\frac{1-\frac{v(s)}{c}}{1+\frac{v(s)}{c}}}$$

Die Geschwindigkeit ist abhängig von der Zeit t:

$$v(s) = \frac{F\,t\,(s)}{m_0}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{F^2(t(s))^2}{{m_0}^2c^2}}}$$

die Zeit t hängt wiederum vom Ort s ab:

$$t(s) = \sqrt{\frac{s^2}{c^2}+2\,\frac{m_0\,s}{F}}$$

Damit ist ν_2 in Abhängigkeit vom Ort im Laborsystem s

$$\nu_2 = \nu_1 \frac{\sqrt{m_0\,c^2 + sF - \sqrt{sF}\sqrt{sF + 2\,m_0\,c^2}}}{\sqrt{m_0\,c^2 + sF + \sqrt{sF}\sqrt{sF + 2\,m_0\,c^2}}}$$

Für den Bremsweg bis nach α-Centauri wird danach mit symmetrischer Frequenzgestaltung empfangen.
Dementsprechend muss für den Empfang einer Frequenz auf der Erde mit $\nu_2 = 11GHz$ ein Signal ν_1 vom bewegten Raumschiff aus gesendet werden mit:

$$\nu_1 = \nu_2 \sqrt{\frac{1 + \frac{v(s)}{c}}{1 - \frac{v(s)}{c}}}$$

die Geschwindigkeit in Abhängigkeit von der Zeit ist

$$v(s) = \frac{F\,t\,(s)}{m_0} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{F^2 (t(s))^2}{{m_0}^2 c^2}}}$$

die Zeit t hängt wiederum vom Ort s ab:

$$t(s) = \sqrt{\frac{s^2}{c^2} + 2\,\frac{m_0\,s}{F}}$$

Damit ist ν_1 in Abhängigkeit vom Ort im Laborsystem s

$$\nu_1 = \nu_2 \sqrt{\frac{m_0\,c^2 + sF + \sqrt{F\,s}\sqrt{sF + 2\,m_0\,c^2}}{m_0\,c^2 + sF - \sqrt{F\,s}\sqrt{sF + 2\,m_0\,c^2}}}$$

Für den Bremsweg bis nach α-Centauri muss danach mit symmetrischer Frequenzgestaltung gesendet werden.

4. Masse Elektron/Positron:$m_0 = 9.10938 \cdot 10^{-31} kg$

   Geschwindigkeit: $v = k \cdot c$, $k < 1$

   Vollständig plastischer Stoss: gleiche Massen, gleiche Geschwindigkeiten, entgegengesetzt

   Die Massen sind nach dem Stoss in Ruhe.

   Dissipierte Energie: $E_1 = 2 \cdot \frac{1}{2} m \cdot v^2 = m_0 \cdot c^2 \cdot k^2$

   Tatsächlich: Annihilation, d.h. Paarvernichtung; Elektron und Positron werden vernichtet, 2 Photonen gleicher Energie entstehen.

   Dissipierte Energie: $E_2 = 2 \cdot m \cdot c^2 = \frac{2 m_0 c^2}{\sqrt{1-k^2}}$

   z.B. $k = 0.9$:

   $E_1 = 6.63 \cdot 10^{-14} J$

   $E_2 = 3.76 \cdot 10^{-13} J$

5. a) relativistischer Impuls: $p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

relativistischer Energiesatz: $E = \sqrt{m_0^2 c^4 + c^2 p^2}$

- Von Kugel 2 aus gesehen:

$$
\begin{aligned}
E_a^2 &= m_0^2 c^4 + c^2 p^2 \\
&= m_0^2 c^4 + c^2 \frac{m_0^2 v^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} \\
\to E_a^2 - m_0^2 c^4 &= c^2 m_0^2 v^2 \cdot \frac{1}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)} \\
\to \left(E_a^2 - m_0^2 c^4\right)\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) &= c^2 m_0^2 v^2 \\
\to \left(E_a^2 - m_0^2 c^4\right) &= c^2 m_0^2 v^2 + \left(E_a^2 - m_0^2 c^4\right)\frac{v^2}{c^2} \\
\to \frac{\left(E_a^2 - m_0^2 c^4\right)}{c^2 m_0^2} &= v^2 + \left(\frac{E_a^2}{c^4 m_0^2} - 1\right) v^2 = \frac{E_a^2}{c^4 m_0^2} v^2 \\
\to \left(\frac{E_a^2}{c^2 m_0^2} - c^2\right) \cdot \frac{c^4 m_0^2}{E_a^2} &= v^2 \\
\to \left(c^2 - \frac{c^6 m_2^0}{E_a^2}\right) &= v^2 \\
\to v &= c \cdot \sqrt{1 - \frac{c^4 m_0^2}{E_a^2}}
\end{aligned}
$$

- Im Schwerpunktsystem bewegen sich beide Kugeln mit gleicher Geschwindigkeit u auf den Schwerpunkt zu. Addiert man diese beiden Geschwindigkeiten u relativistisch, muss das wieder gleich v sein:

$$
v = \frac{u+u}{1+\frac{u^2}{c^2}} = \frac{2u}{1+\frac{u^2}{c^2}} \stackrel{!}{=} c \cdot \sqrt{1 - \frac{c^4 m_0^2}{E_a^2}}
$$

$$
\to 2u = \left(1 + \frac{u^2}{c^2}\right) \cdot c \cdot \sqrt{1 - \frac{c^4 m_0^2}{E_a^2}}
$$

Wir müssen die quadratische Gleichung lösen:

$$
\frac{u^2}{c^2} \cdot c \cdot \sqrt{1 - \frac{c^4 m_0^2}{E_a^2}} - 2u + c \cdot \sqrt{1 - \frac{c^4 m_0^2}{E_a^2}} = 0
$$

$$\Rightarrow u_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot \frac{1}{c} \cdot \left(\sqrt{1 - \frac{c^4 m_0^2}{E_a^2}}\right)^2 \cdot c}}{\frac{2}{c} \cdot \sqrt{1 - \frac{c^4 m_0^2}{E_a^2}}}$$

$$= \frac{c \pm c \cdot \sqrt{1 - 1 + \frac{c^4 m_0^2}{E_a^2}}}{\sqrt{1 - \frac{c^4 m_0^2}{E_a^2}}}$$

$$= \frac{c\left(1 \pm \frac{c^2 m_0}{E_a}\right)}{\sqrt{1 - \frac{c^4 m_0^2}{E_a^2}}}$$

$$= c \cdot \frac{\frac{E_a \pm m_0 c^2}{E_a}}{\sqrt{\frac{E_a^2 - c^4 m_0^2}{E_a^2}}}$$

$$= c \cdot \sqrt{\frac{(E_a \pm m_0 c^2)^2}{(E_a + m_o c^2)(E_a - m_0 c^2)}}$$

- von den beiden möglichen Lösungen $u_{1,2}$ ist nur

  $$u_1 = c \cdot \sqrt{\frac{E_a - m_0 c^2}{E_a + m_0 c^2}}$$

  physikalisch sinnvoll, da u_2 grösser c wäre.
  Die Geschwindigkeit u_2 gibt an, wie schnell sich m_2 auf den Schwerpunkt zubewegt. Das entspricht von m_2 aus gesehen der Schwerpunktgeschwindigkeit.

Eine alternative Berechnung läuft über die Lage des Schwerpunktes. Im Laborsystem sei x die Position der bewegten Masse $m(v) = m_0 c^2 (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$, $x = 0$ die Position der ruhenden Masse und x_s die Lage des Schwerpunktes. Dann ist

$$m(v)(x_s - x) = m_0 x_s$$

Wir leiten nach der Zeit ab ($m(v)$ ist konstant, $dx_s/dt = u_1$) und bekommen

$$m(v)(u_1 - v) = m_0 u_1$$

Dann ist

$$u_1 = \frac{v \cdot m(v)}{m_0 - m(v)}$$

$m(v)$ wird über die Energie berechnet

$$E_a = m(v) c^2$$

Wir können die Gleichung auch nach v auflösen

$$v = c\begin{cases} \sqrt{1-\frac{m_0^2c^4}{E_a^2}} \\ -\sqrt{1-\frac{m_0^2c^4}{E_a^2}} \end{cases}$$

Nur die erste Lösung ist mit unserem Problem kompatibel. Also ist

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{vm(v)}{m_0 - m(v)} &&= \frac{c\sqrt{1-\frac{m_0^2c^4}{E_a^2}}\cdot\frac{E_a}{c^2}}{m_0-\frac{E_a}{c^2}} \\ &= c\frac{\sqrt{1-\frac{m_0^2c^4}{E_a^2}}\cdot E_a}{m_0c^2-E_a} &&= c\frac{\sqrt{E_a^2-m_0^2c^4}}{m_0c^2-E_a} \\ &= c\sqrt{\frac{(E_a-m_0c^2)(E_a+m_0c^2)}{(m_0c^2-E_a)^2}} &&= c\sqrt{\frac{(E_a-m_0c^2)(E_a+m_0c^2)}{(E_a-m_0c^2)^2}} \\ &= c\sqrt{\frac{(E_a+m_0c^2)}{(E_a-m_0c^2)}} \end{aligned}$$

c) Es ist sinnvoll, zuerst Aufgabenteil c) zu rechnen, da sich b) daraus ergibt.
Impuls:

$$p_a^* = \frac{m_0\cdot v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

setze für $v = c\cdot\sqrt{\frac{E_a-m_0c^2}{E_a+m_oc^2}}$ ein (siehe Teil a):

$$\begin{aligned} p_a^* &= m_0\cdot c\cdot\sqrt{\frac{E_a-m_0c^2}{E_a+m_0c^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{E_a-m_0c^2}{E_a+m_0c^2}}} \\ &= m_0c\cdot\sqrt{\frac{E_a-m_0c^2}{E_a+m_0c^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{E_a+m_0c^2-E_a+m_0c^2}{E_a+m_0c^2}}} \\ &= \sqrt{\frac{m_0^2c^2(E_a-m_0c^2)}{2m_0^2c^2}} \\ &= \sqrt{\frac{m_0(E_a-m_0c^2)}{2}} \\ &= -p_b^* \end{aligned} \tag{.1}$$

Energie:

$$\begin{aligned}
E_a^{*2} &= m_0^2 c^4 + c^2 p_a^{*2} \\
&= m_0^2 c^4 + c^2 \cdot \frac{m_0 \left(E_a - m_0 c^2\right)}{2} \\
&= m_0 c^2 \left(m_0 c^2 + \frac{E_a}{2} - \frac{m_0 c^2}{2} \right) \\
&= m_0 c^2 \left(\frac{m_0 c^2 + E_a}{2} \right) \\
&\rightarrow E_a^* = \sqrt{m_0 c^2 \left(\frac{m_0 c^2 + E_a}{2} \right)} = E_b^*
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
E_{ges}^* &= E_a^* + E_b^* = 2E_a^* \\
&= \sqrt{2 m_0 c^2 \left(m_0 c^2 + Ea\right)}
\end{aligned}$$

e) Die Energien im Schwerpunktsystem sind symmetrisch bezüglich beiden Teilchen:

$$E_a^* = E_b^* = E_d^* = E_e^* = \sqrt{m_0 c^2 \left(\frac{m_0 c^2 + E_a}{2} \right)}$$

Es ist

$$\begin{aligned}
E_d^{*2} &= m_0^2 c^4 + c^2 p_d^{*2} && = m_0^2 c^4 + c^2 \left({p_{d_x}^*}^2 + {p_{d_y}^*}^2 \right) \\
E_e^{*2} &= m_0^2 c^4 + c^2 p_e^{*2} && = m_0^2 c^4 + c^2 \left({p_{e_x}^*}^2 + {p_{e_y}^*}^2 \right)
\end{aligned}$$

Betrachte zunächst den Impuls aufgespalten in x- und y-Richtung:

x-Richtung:

$$p_{d_x}^* = -p_{e_x}^* = \cos\vartheta^* \cdot p_a^*$$

y-Richtung:

$$p_{d_y}^* = -p_{e_y}^* = \sin\vartheta^* p_a^*$$

Also ist

$$p_{d_y}^* = p_{d_x}^* \tan\vartheta^*$$

und

$$p_{e_y}^* = p_{e_x}^* \tan\vartheta^*$$

Damit haben wir

$$
\begin{aligned}
E_d^{*2} &= m_0^2c^4 + c^2 {p_{d_x}^*}^2 \left(1+\tan^2\vartheta^*\right) &&= \frac{m_0^2c^4}{2} + \frac{m_0c^2E_a}{2} \\
E_e^{*2} &= m_0^2c^4 + c^2 {p_{e_x}^*}^2 \left(1+\tan^2\vartheta^*\right) &&= \frac{m_0^2c^4}{2} + \frac{m_0c^2E_a}{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c^2 {p_{d_x}^*}^2 \left(1+\tan^2\vartheta^*\right) &= \frac{m_0c^2E_a}{2} - \frac{m_0^2c^4}{2} \\
c^2 {p_{e_x}^*}^2 \left(1+\tan^2\vartheta^*\right) &= \frac{m_0c^2E_a}{2} - \frac{m_0^2c^4}{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_{d_x}^* &= \sqrt{\frac{m_0E_a - m_0^2c^2}{2\left(1+\tan^2\vartheta^*\right)}} \\
p_{e_x}^* &= -\sqrt{\frac{m_0E_a - m_0^2c^2}{2\left(1+\tan^2\vartheta^*\right)}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_{d_y}^* &= \tan\vartheta^* \sqrt{\frac{m_0E_a - m_0^2c^2}{2\left(1+\tan^2\vartheta^*\right)}} \\
p_{e_y}^* &= -\tan\vartheta^* \sqrt{\frac{m_0E_a - m_0^2c^2}{2\left(1+\tan^2\vartheta^*\right)}}
\end{aligned}
$$

f) Die schnelle Lösung geht folgendermassen: Die Streuwinkel sind ein geometrisches Problem. Also können die klassischen Resultate verwendet werden, unter Berücksichtigung der Längenkontraktion. Das klassische Resultat wäre

$$
\begin{aligned}
\tan\vartheta_d &= \tan\frac{\vartheta^*}{2} \\
\tan\vartheta_e &= \tan\frac{\pi-\vartheta^*}{2}
\end{aligned}
$$

(Siehe auch Aufgabe 5 Übungsblatt 06) Bei relativistischen Geschwindigkeiten des Schwerpunktes in die x-Richtung wird die x-Koordinate kontrahiert, die y-Koordinate jedoch nicht. Da $\tan\vartheta^* = dy^*/dx^*$ ist und $dy^* = dy$ und $dx^* = dx/\sqrt{1-u_1^2/c^2}$ Weiter ist

$$
\sqrt{1-\frac{u_1^2}{c^2}} = \sqrt{1-\frac{E_a - m_0c^2}{E_a + m_0c^2}} = \sqrt{\frac{2m_0c^2}{E_a+m_0c^2}}
$$

und damit

$$\tan\vartheta_d = \sqrt{\frac{2m_0c^2}{E_a + m_0c^2}}\tan\frac{\vartheta^*}{2}$$
$$\tan\vartheta_e = \sqrt{\frac{2m_0c^2}{E_a + m_0c^2}}\tan\frac{\pi-\vartheta^*}{2}$$

Im klassischen Falle ist $E_a \approx m_0c^2$, also ist die Wurzel gleich eins. Dann ist

$$\begin{aligned} \tan\vartheta_d &= \tan\frac{\vartheta^*}{2} & \Rightarrow \quad & \vartheta_d = \frac{\vartheta^*}{2} \\ \tan\vartheta_e &= \tan\frac{\pi-\vartheta^*}{2} & \Rightarrow \quad & \vartheta_e = \frac{\pi-\vartheta^*}{2} \\ \vartheta_d + \vartheta_e &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Im hoch-relativistischen Falle ist $E_a \gg m_0c^2$ und damit $\sqrt{\frac{2m_0c^2}{E_a+m_0c^2}} \approx \sqrt{\frac{2m_0c^2}{E_a}} \ll 1$. Dann ist auch $\tan\vartheta_d \ll 1$ und damit $\tan\vartheta_d \approx \vartheta_d$ und analog für ϑ_e.

$$\begin{aligned} \tan\vartheta_d &= \sqrt{\frac{2m_0c^2}{E_a}}\tan\frac{\vartheta^*}{2} & \Rightarrow \quad & \vartheta_d = \sqrt{\frac{2m_0c^2}{E_a}}\tan\frac{\vartheta^*}{2} \\ \tan\vartheta_e &= \sqrt{\frac{2m_0c^2}{E_a}}\tan\frac{\pi-\vartheta^*}{2} & \Rightarrow \quad & \vartheta_e = \sqrt{\frac{2m_0c^2}{E_a}}\tan\frac{\pi-\vartheta^*}{2} \\ \vartheta_d + \vartheta_e &= \sqrt{\frac{2m_0c^2}{E_a}}\left(\tan\frac{\vartheta^*}{2} + \tan\frac{\pi-\vartheta^*}{2}\right) & \Rightarrow \quad & \vartheta_d + \vartheta_e \ll 1 \end{aligned}$$

Klassische Rechnung: Energie $mv_{x,0}^2/2 = m(v_x'^2 + v_y'^2)/2$ oder $v_{x,0}^2 = v_x'^2 + v_y'^2 = u_1^2$ und $v_y' = v_x' \tan\vartheta^*$ und damit $u_1^2 = v_x'^2(1+\tan^2\vartheta^*)$. Somit ist $v_x' = u_1(1+\tan^2\vartheta^*)^{-1/2}$ und $v_y' = u_1\tan\vartheta^*(1+\tan^2\vartheta^*)^{-1/2}$. Also ist

$$\tan\vartheta_d = \frac{v_y}{v_x+u_1} = \frac{u_1\tan\vartheta^*(1+\tan^2\vartheta^*)^{-1/2}}{u_1+u_1(1+\tan^2\vartheta^*)^{-1/2}} = \frac{\tan\vartheta^*}{1+\sqrt{1+\tan^2\vartheta^*}} = \frac{\sin\vartheta^*}{\cos\vartheta^*+\sqrt{\cos^2\vartheta^*+\sin^2\vartheta^*}} = \frac{\sin\vartheta^*}{1+\cos\vartheta^*} = \tan\frac{\vartheta^*}{2}$$

6. Es ist folgende Gleichung zu lösen:

   a)

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit

$$T = \begin{pmatrix} -\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma + \cos\alpha\cos\gamma & -\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma - \cos\alpha\sin\gamma & \sin\alpha\sin\beta \\ \cos\alpha\cos\beta\sin\gamma + \sin\alpha\cos\gamma & \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \sin\alpha\sin\gamma & -\cos\alpha\sin\beta \\ \sin\beta\sin\gamma & \sin\beta\cos\gamma & \cos\beta \end{pmatrix}$$

Also

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma + \cos\alpha\cos\gamma \\ \cos\alpha\cos\beta\sin\gamma + \sin\alpha\cos\gamma \\ \sin\beta\sin\gamma \end{pmatrix}$$

Entweder man rät die 3 Winkel ausgehend von der 3. Gleichung, oder man verwendet Maple, um das Gleichungssystem zu lösen, und erhält die Lösungen:

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \left\{ \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{4} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -\frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{2} \\ -\frac{3\pi}{4} \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

b) Obige Winkel in T eingesetzt liefert:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

7. Diese beiden Transformationen sind einfacher, als in der vorherigen Aufgabe. Es ist daher nicht nötig, jeweils das Gleichungssystem zu lösen. Stattdessen findet man durch überlegen jeweils eine von unendlich vielen Lösungen:

$$T_1 : \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T_2 : \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\pi}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Damit ist

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a)

$$T_1 T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$T_2T_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c) $T_1T_2 \neq T_2T_1$, weil Matrizenmultiplikation i.A. nicht kommutativ ist.

Für die erste Teilaufgabe sind alle Lösungen:

$$T_1 : \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{2},\ \beta \text{ beliebig},\ \gamma = 0 \\ \alpha = -\frac{\pi}{2},\ \beta \text{ beliebig},\ \gamma = \pi \\ \alpha = \frac{\pi}{2} - \gamma,\ \beta = 0,\ \gamma = \text{beliebig} \\ \alpha = \frac{\pi}{2} + \gamma,\ \beta = \pi,\ \gamma = \text{beliebig} \end{cases}$$

und

$$T_2 : \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{cases} \alpha = \text{beliebig},\ \beta = \frac{\pi}{2},\ \gamma = 0 \\ \alpha = \text{beliebig},\ \beta = -\frac{\pi}{2},\ \gamma = \pi \end{cases}$$

