Grundlagen der Physik 2
Schwingungen und Wärmelehre

23. 04. 2006

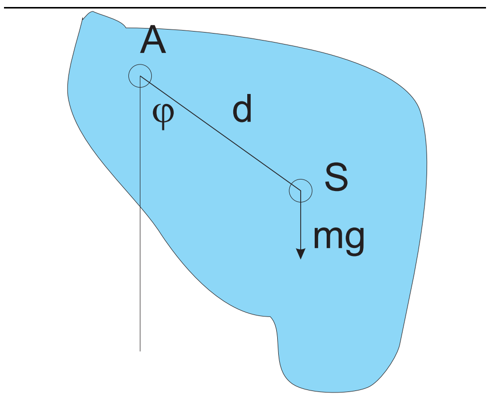
Othmar Marti

othmar.marti@uni-ulm.de

Experimentelle Physik

Universität Ulm

Physikalisches Pendel



Physikalisches Pendel. A ist der Aufhängungs-punkt, S der Massenmittel-punkt.

$$-mgd\sin\phi = I\frac{d^2\phi}{dt^2}$$

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + \omega^2\phi = 0$$

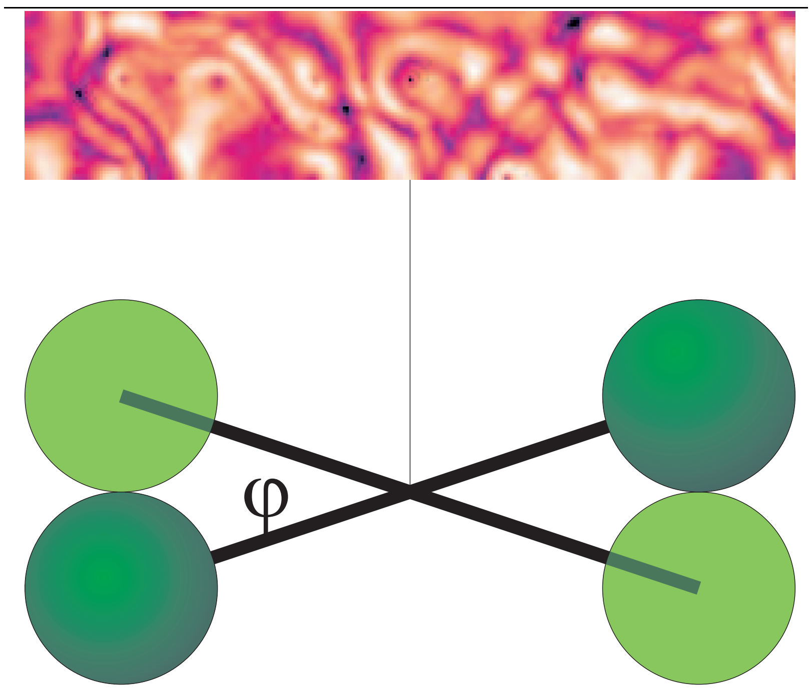
Kleine Amplitude!

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}$$

Bestimmung des Trägheitsmomentes

$$I = \frac{mgdT^2}{4\pi^2}$$

Torsionspendel



Torsionspendel (analog zur Gravitationswaage)

$$M = -D\phi = I\frac{d^2 I}{dt^2}$$

Wieder setzen wir $\omega^2 = \frac{D}{I}$. Die Periodendauer ist

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}}$$

Bewegung in der Nähe einer Gleichgewichtslage

$$E_{pot}(x) = E_{pot}(x_0) + \left.\frac{dE_{pot}(x)}{dx}\right|_{x_0} (x - x_0) + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2 E_{pot}(x)}{dx^2}\right|_{x_0} (x - x_0)^2 + \ldots$$

$$\begin{aligned} 0 &= m\frac{d^2 x}{dt^2} + \left.\frac{d^2 E_{pot}(x)}{dx^2}\right|_{x_0} (x - x_0) \\ 0 &= \left.\frac{dE_{pot}(x)}{dx}\right|_{x_0} \end{aligned}$$

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{m} \cdot \left.\frac{d^2 E_{pot}(x)}{dx^2}\right|_{x_0}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\left.\frac{d^2 E_{pot}(x)}{dx^2}\right|_{x_0}}}$$

Gedämpfte Schwingung

Geschwindigkeitsproportionale Dämpfung

$$\boldsymbol{F_D} = -b\boldsymbol{v}$$

Schwingungsgleichung

$$-kx - bv = m\frac{dv}{dt}$$

Energieverlauf bei gedämpfter Schwingung

$$\frac{dE_{tot}}{dt} = -\frac{b}{m}E_{tot}$$

$$E_{tot}(t) = e^{-(b/m)t+C} = e^{C} \cdot e^{-(b/m)t} = E_0 e^{-(b/m)t}$$

Definition der Güte

Der Energieverlust pro Periode T ist

$$\frac{\Delta E_{tot}}{E_{tot}} = -\frac{b}{m}T$$

$$Q = 2\pi \frac{E_{tot}}{-\Delta E_{tot}}$$

$$Q = 2\pi \frac{E_{tot}}{-\Delta E_{tot}} = 2\pi \frac{m}{bT} = 2\pi \frac{\tau}{T}$$

$$A = A_0 e^{-t/(2\tau)}$$

Lösung der Schwingungsgleichung

$$m\frac{d^2}{dt^2}x(t) + b\frac{d}{dt}x(t) + k\,x(t) = 0$$

Ansatz

$$x(t) = A_0 e^{-i\omega t}$$

$$\begin{aligned} 0 &= -\omega^2 A_0 e^{-i\omega t} - i\omega A_0 e^{-i\omega t} \\ &\quad +\omega_0^2 A_0 e^{-i\omega t} \\ 0 &= \omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\frac{b}{m} \end{aligned}$$

Lösungen

$$\begin{aligned} \omega_{1,2} &= \frac{i\frac{b}{m} \pm \sqrt{-\frac{b^2}{m^2} + 4\omega_0^2}}{-2} \\ &= -i\frac{b}{2m} \mp \sqrt{\omega_0^2 - \frac{b^2}{4m^2}} \end{aligned}$$

Ansatz

$$x(t) = A_0 e^{i\omega t}$$

$$\begin{aligned} 0 &= -\omega^2 A_0 e^{-i\omega t} + i\omega A_0 e^{-i\omega t} \\ &\quad +\omega_0^2 A_0 e^{-i\omega t} \\ 0 &= \omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\frac{b}{m} \end{aligned}$$

Lösungen

$$\begin{aligned} \omega_{1,2} &= \frac{-i\frac{b}{m} \pm \sqrt{-\frac{b^2}{m^2} + 4\omega_0^2}}{-2} \\ &= i\frac{b}{2m} \mp \sqrt{\omega_0^2 - \frac{b^2}{4m^2}} \end{aligned}$$

Lösungen der Schwingungsgleichung II

Es gibt drei Lösungen

für $\omega_0 > \frac{b}{2m}$ (unterkritische Dämpfung)

$$\omega_{1,2} = -i\frac{b}{2m} \mp \sqrt{\omega_0^2 - \frac{b^2}{4m^2}}$$

für $\omega_0 = \frac{b}{2m}$ (kritische Dämpfung)

$$\omega_{1,2} = -i\frac{b}{2m}$$

für $\omega_0 < \frac{b}{2m}$ (überkritische Dämpfung)

$$\omega_{1,2} = -i\left(\frac{b}{2m} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4m^2} - \omega_0^2}\right)$$

Diese Lösung in $x(t) = A_0 \exp\left(-i\omega\, t\right)$ einsetzen!

Es gibt drei Lösungen

für $\omega_0 > \frac{b}{2m}$ (unterkritische Dämpfung)

$$\omega_{1,2} = i\frac{b}{2m} \mp \sqrt{\omega_0^2 - \frac{b^2}{4m^2}}$$

für $\omega_0 = \frac{b}{2m}$ (kritische Dämpfung)

$$\omega_{1,2} = i\frac{b}{2m}$$

für $\omega_0 < \frac{b}{2m}$ (überkritische Dämpfung)

$$\omega_{1,2} = i\left(\frac{b}{2m} \mp \sqrt{\frac{b^2}{4m^2} - \omega_0^2}\right)$$

Diese Lösung in $x(t) = A_0 \exp\left(i\omega\, t\right)$ einsetzen!

Lösungsfunktionen

für $\omega_0 > \frac{b}{2m}$ (unterkritische Dämpfung)

$$x(t) = e^{-\frac{b}{2m}t}\left(A_{0,1}e^{it\sqrt{\omega_0^2-\frac{b^2}{4m^2}}} + A_{0,2}^{-it\sqrt{\omega_0^2-\frac{b^2}{4m^2}}}\right)$$

für $\omega_0 = \frac{b}{2m}$ (kritische Dämpfung)

$x(t) = A_0 e^{-\frac{b}{2m}t}$ Es fehlt eine Lösung!

für $\omega_0 < \frac{b}{2m}$ (überkritische Dämpfung)

$$x(t) = e^{-\frac{b}{2m}t}\left(A_{0,1}e^{-t\sqrt{\frac{b^2}{4m^2}-\omega_0^2}} + A_{0,2}e^{t\sqrt{\frac{b^2}{4m^2}-\omega_0^2}}\right)$$

für $\omega_0 > \frac{b}{2m}$ (unterkritische Dämpfung)

$$x(t) = e^{-\frac{b}{2m}t}\left(A_{0,1}e^{-it\sqrt{\omega_0^2-\frac{b^2}{4m^2}}} + A_{0,2}^{it\sqrt{\omega_0^2-\frac{b^2}{4m^2}}}\right)$$

für $\omega_0 = \frac{b}{2m}$ (kritische Dämpfung)

$x(t) = A_0 e^{-\frac{b}{2m}t}$ Es fehlt eine Lösung!

für $\omega_0 < \frac{b}{2m}$ (überkritische Dämpfung)

$$x(t) = e^{-\frac{b}{2m}t}\left(A_{0,1}e^{-t\sqrt{\frac{b^2}{4m^2}-\omega_0^2}} + A_{0,2}e^{t\sqrt{\frac{b^2}{4m^2}-\omega_0^2}}\right)$$

Fehlende Lösung bei kritischer Dämpfung

Wir haben

$$\frac{b^2}{4m^2} = \omega_0^2$$

Damit

$$\frac{b}{m} = \pm 2\omega_0$$

Ansatz

$$x(t) = (A_{0,1} + A_{0,2}t)\, e^{\mp\omega_0 t}$$

$$\begin{aligned}
0 =& \ddot{x} \pm 2\omega_0 \dot{x} + \omega_0^2 x \\
=& \mp 2\omega_0 A_{0,2} e^{-\omega_0 t} + \omega_0^2 (A_{0,1} + A_{0,2}t)\, e^{\mp\omega_0 t} \\
& \pm 2\omega_0 A_{0,2} e^{\mp\omega_0 t} - 2\omega_0^2 (A_{0,1} + A_{0,2}t)\, e^{\mp\omega_0 t} \\
& + \omega_0^2 (A_{0,1} + A_{0,2}t)\, e^{\mp\omega_0 t} \\
0 =& \mp 2\omega_0 A_{0,2} + \omega_0^2 (A_{0,1} + A_{0,2}t) \pm 2\omega_0 A_{0,2} - 2\omega_0^2 (A_{0,1} + A_{0,2}t) + \omega_0^2 (A_{0,1} + A_{0,2}t) \\
=& \omega_0^2 \left[A_{0,1} + A_{0,2}t - 2(A_{0,1} + A_{0,2}t) + A_{0,1} + A_{0,2}t\right] + \omega_0 \left[\mp 2A_{0,2} \pm 2A_{0,2}\right] \\
=& 0
\end{aligned}$$

Lösungsfunktionen

für $\omega_0 > \frac{b}{2m}$ (unterkritische Dämpfung)

$$x(t) = e^{-\frac{b}{2m}t}\left(A_{0,1}e^{it\sqrt{\omega_0^2-\frac{b^2}{4m^2}}} + A_{0,2}e^{-it\sqrt{\omega_0^2-\frac{b^2}{4m^2}}}\right)$$

für $\omega_0 = \frac{b}{2m}$ (kritische Dämpfung)

$$x(t) = (A_{0,1} + A_{0,2}t)\, e^{-\frac{b}{2m}t}$$

für $\omega_0 < \frac{b}{2m}$ (überkritische Dämpfung)

$$x(t) = e^{-\frac{b}{2m}t}\left(A_{0,1}e^{-t\sqrt{\frac{b^2}{4m^2}-\omega_0^2}} + A_{0,2}e^{t\sqrt{\frac{b^2}{4m^2}-\omega_0^2}}\right)$$

für $\omega_0 > \frac{b}{2m}$ (unterkritische Dämpfung)

$$x(t) = e^{-\frac{b}{2m}t}\left(A_{0,1}e^{-it\sqrt{\omega_0^2-\frac{b^2}{4m^2}}} + A_{0,2}e^{it\sqrt{\omega_0^2-\frac{b^2}{4m^2}}}\right)$$

für $\omega_0 = \frac{b}{2m}$ (kritische Dämpfung)

$$x(t) = (A_{0,1} + A_{0,2}t)\, e^{-\frac{b}{2m}t}$$

für $\omega_0 < \frac{b}{2m}$ (überkritische Dämpfung)

$$x(t) = e^{-\frac{b}{2m}t}\left(A_{0,1}e^{-t\sqrt{\frac{b^2}{4m^2}-\omega_0^2}} + A_{0,2}e^{t\sqrt{\frac{b^2}{4m^2}-\omega_0^2}}\right)$$

Gedämpfter Oszillator

$$F_F(t) = -k\,(x(t) - z(t))$$

Bewegungsgleichung

$$F(t) = -k\,(x(t) - z(t)) - b\dot{x}(t) = m\ddot{x}(t)$$

Wenn wir $z(t) = z_0 \cos \omega t$ einsetzten und umstellen, erhalten wir

$$m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + kx(t) = z_0 k \cos \omega t$$

Wir teilen durch m und kürzen $k/m = \omega_0^2$ ab und erhalten

$$\ddot{x}(t) + \frac{b}{m}\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = z_0 \omega_0^2 \cos \omega t$$

Gedämpfter Oszillator

Die Lösung dieser Gleichung besteht aus zwei Teilen
Einschwingvorgang als Lösung der Gleichung

$$\ddot{x}(t) + \frac{b}{m}\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$$

Stationäre Lösung

$$x(t) = A(\omega)\cos\left(\omega t - \delta(\omega)\right)$$

wobei wir hier ein Minuszeichen vor der Phase setzen, damit diese die Phasendifferenz zur Anregung darstellt.

$$\begin{aligned} & A(\omega)\left[-\omega^2\cos(\omega t - \delta(\omega)) - \frac{b}{m}\omega\sin(\omega t - \delta(\omega)) + \omega_0^2\cos(\omega t - \delta(\omega))\right] \\ = \quad & z_0\omega_0^2\cos\omega t \end{aligned}$$

Gedämpfter Oszillator

Um die Gleichung zu lösen müssen wir die Winkelfunktionen $\sin$ und $\cos$ mit Phasen in reine Winkelfunktionen auflösen. Also setzen wie
$\cos(\omega t - \delta(\omega)) = \cos(\omega t)\cos(\delta(\omega)) + \sin(\omega t)\sin(\delta(\omega))$ und
$\sin(\omega t - \delta(\omega)) = \sin(\omega t)\cos(\delta(\omega)) - \cos(\omega t)\sin(\delta(\omega))$. Wir bekommen dann

$$
\begin{aligned}
z_0\omega_0^2 \cos\omega t \quad &= \quad A(\omega)\left[-\omega^2 \cos(\omega t)\cos(\delta(\omega))\right.\\
&\qquad +\frac{b}{m}\omega\cos(\omega t)\sin(\delta(\omega))\\
&\qquad \left.+\omega_0^2\cos(\omega t)\cos(\delta(\omega))\right]\\
0 \quad &= \quad A(\omega)\left[-\omega^2 \sin(\omega t)\sin(\delta(\omega))\right.\\
&\qquad -\frac{b}{m}\omega\sin(\omega t)\cos(\delta(\omega))\\
&\qquad \left.+\omega_0^2\sin(\omega t)\sin(\delta(\omega))\right]
\end{aligned}
$$

Gedämpfter Oszillator

Diese Gleichungen können vereinfacht werden

$$\begin{aligned} z_0\omega_0^2 &= A(\omega)\left[-\omega^2\cos(\delta(\omega)) + \frac{b}{m}\omega\sin(\delta(\omega)) + \omega_0^2\cos(\delta(\omega))\right] \\ 0 &= -\omega^2\sin(\delta(\omega)) - \frac{b}{m}\omega\cos(\delta(\omega)) + \omega_0^2\sin(\delta(\omega)) \end{aligned}$$

Aus der zweiten Gleichung folgt

$$\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)\sin(\delta(\omega)) = \frac{b}{m}\omega\cos(\delta(\omega))$$

und daraus

$$\tan(\delta(t)) = \frac{b\omega}{m\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)}$$

Gedämpfter Oszillator

Wir verwenden $\cos\phi = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\phi}}$ und $\sin\phi = \cos\phi\cdot\tan\phi = \frac{\tan\phi}{\sqrt{1+\tan^2\phi}}$ und bekommen aus der ersten Gleichung

$$
\begin{aligned}
\frac{z_0\omega_0^2}{A(\omega)} &= \frac{\omega_0^2-\omega^2}{\sqrt{1+\tan^2(\delta(t))}} + \frac{b\omega}{m}\frac{\tan(\delta(t))}{\sqrt{1+\tan^2(\delta(t))}} \\
&= \frac{\omega_0^2-\omega^2+\frac{b^2\omega^2}{m^2\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}}{\sqrt{1+\frac{b^2\omega^2}{m^2\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2}}} \\
&= \frac{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+\frac{b^2\omega^2}{m^2}}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+\frac{b^2\omega^2}{m^2}}} \\
&= \sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+\frac{b^2\omega^2}{m^2}}
\end{aligned}
$$

Gedämpfter Oszillator

Zusammengefasst ist die stationäre Lösung durch die *Amplitude* und Phase

$$\begin{aligned}\delta(\omega) &= \arctan\left(\frac{b\omega}{m\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}\right)\\ A(\omega) &= \frac{z_0\omega_0^2}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+\frac{b^2\omega^2}{m^2}}}\end{aligned}$$

gegeben.
Mit der Definition der Güte sowie mit $\omega_0 = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$ schreiben wir zuerst

$$Q = 2\pi\frac{m}{bT} = \omega_0\frac{m}{b} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{b}{m} = \frac{\omega_0}{Q}$$

Gedämpfter Oszillator

$$\boxed{\begin{aligned}\delta(\omega) &= \arctan\left(\frac{\omega\omega_0}{Q\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}\right)\\ A(\omega) &= \frac{z_0\omega_0^2}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+\frac{\omega^2\omega_0^2}{Q^2}}}\end{aligned}}$$

Gedämpfter Oszillator

Noch kompakter ist die folgende Schreibweise für die *Amplitude*

$$A(\omega) = \frac{z_0}{\sqrt{\left(1-\omega^2/\omega_0^2\right)^2 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2 Q^2}}}$$

Die *Frequenz*, bei der die *Amplitude* maximal wird, also die *Resonanzfrequenz*, erhält man, indem man $\frac{dA(\omega)}{d\omega} = 0$ berechnet.

$$\begin{aligned}\frac{dA(\omega)}{d\omega} &= \frac{d}{d\omega}\frac{z_0}{\sqrt{\left(1-\omega^2/\omega_0^2\right)^2 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2 Q^2}}} \\ &= \frac{z_0}{2}\frac{\left(4\ \left({\omega_0}^2-\omega^2\right)\omega - 2\,\frac{\omega\,{\omega_0}^2}{Q^2}\right)}{\left(\left({\omega_0}^2-\omega^2\right)^2 + \frac{\omega^2{\omega_0}^2}{Q^2}\right)^{3/2}} \qquad = 0\end{aligned}$$

Gedämpfter Oszillator

Damit ist

$$
\begin{aligned}
0 &= 4\,\left({\omega_0}^2 - \omega^2\right)\omega - 2\,\frac{\omega\,{\omega_0}^2}{Q^2} \\
\frac{\omega\,{\omega_0}^2}{Q^2} &= 2\left({\omega_0}^2 - \omega^2\right)\omega \\
\frac{{\omega_0}^2}{Q^2} &= 2\left({\omega_0}^2 - \omega^2\right) \\
\omega^2 &= \omega_0^2\left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right) \\
\omega &= \pm\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}
\end{aligned}
$$

Hier ist nur die positive Lösung physikalisch sinnvoll. Also ist

$$
\omega_R = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{b^2}{2m^2}}
$$

Diese *Resonanzfrequenz*) ist kleiner als die Eigenfrequenz eines ungedämpften Systems.

Bestimmung der Güte aus der Phase

Berechnung der Steigung $d\delta(\omega)/d\omega$:

$$\frac{d\delta(\omega)}{d\omega} = \frac{d}{d\omega}\arctan\left(\frac{\omega_0\omega}{Q\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}\right)$$

$$= \frac{\frac{\omega_0}{Q\left({\omega_0}^2-\omega^2\right)} + 2\,\frac{\omega^2\omega_0}{Q\left({\omega_0}^2-\omega^2\right)^2}}{1+\frac{\omega^2{\omega_0}^2}{Q^2\left({\omega_0}^2-\omega^2\right)^2}}$$

$$= \frac{\omega_0 Q\left({\omega_0}^2-\omega^2\right)+2\,Q\omega^2\omega_0}{Q^2\left({\omega_0}^2-\omega^2\right)^2+\omega^2{\omega_0}^2}$$

An der Stelle $\omega=\omega_0$ ist der Funktionswert

$$\left.\frac{d\delta(\omega)}{d\omega}\right|_{\omega=\omega_0} = \frac{\omega_0 Q\left({\omega_0}^2-{\omega_0}^2\right)+2\,Q{\omega_0}^2\omega_0}{Q^2\left({\omega_0}^2-{\omega_0}^2\right)^2+{\omega_0}^2{\omega_0}^2}$$

$$= \frac{2Q\omega_0^3}{\omega_0^4} = \frac{2Q}{\omega_0}$$

Gedämpfter Oszillator

Bei der *Resonanzfrequenz* $\omega = \omega_0$ des ungedämpften Systems ist die Phase

$$\delta(\omega_0) = \pi/2$$

Die Steigung der Phase $d\delta(\omega)/d\omega$ hat an der Stelle ω_0 den Wert

$$\left.\frac{d\delta(\omega)}{d\omega}\right|_{\omega_0} = 2\frac{Q}{\omega_0}$$

Es ist sehr viel einfacher, ω_0 und Q aus der Phase als aus der *Amplitude* zu bestimmen.