# Lösungen

**Lösung zu 23.** Die Differentialgleichung ist vom Typ $\ddot{z} + \Gamma\dot{z} = K$ mit $\Gamma = \frac{\gamma}{m}$ und $K = \frac{F_a - mg}{m}$ mit $F_A$ als Auftrieb.

1. homogene DGL: $\ddot{z} + \Gamma\dot{z} = 0$

Ansatz ist hier $z = Ae^{\lambda t} \quad \rightarrow \lambda^2 + \Gamma\lambda = 0 \quad \rightarrow \lambda(\lambda + \Gamma) = 0$

Lösungen: $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = -\Gamma$. Es gibt also zwei Fundamentallösungen: $z(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} = A_1 + A_2 e^{-\Gamma t}$

2. inhomogene DGL: $\ddot{z} + \Gamma\dot{z} = K$

Spezielle Lösung ist $\Gamma\dot{z} = K$ woraus folgt $z = \frac{K}{\Gamma}t$. Hier wurde $z(0) = 0$ berücksichtigt.

3. Allgemeine Lösung: $z(t) = A_1 + A_2 e^{-\Gamma t} + \frac{K}{\Gamma}t$

4. Anfangsbedingungen: $z(0) = 0 = A_1 + A_2 \quad \rightarrow A_2 = -A_1$ also $z(t) = A_1(1 - e^{-\Gamma t}) + \frac{K}{\gamma}t$

$\dot{z}(0) = 0 = A_1\Gamma + \frac{K}{\Gamma} \quad \rightarrow A_1 = -\frac{K}{\Gamma^2} \quad \rightarrow z(t) = -\frac{K}{\Gamma^2}(1 - e^{-\Gamma t}) + \frac{K}{\Gamma}t$

Jetzt $K$ und $\Gamma$ wieder einsetzen:

$$z(t) = m\frac{mg - F_A}{\gamma^2}(1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t}) + \frac{F_A - mg}{\gamma} \cdot t$$

**Lösung zu 24.** Für physikalische Pendel wurde diese Aufgabe schon einmal in einem früheren Jahr gelöst. Passen Sie Ihre Lösung an. Lösung für das physikalische Pendel siehe hinten.

**Lösung zu 25.** Die Schwingungen $A_1$ und $A_2$ schreibt man komplex:

$$\begin{aligned} z_1 &= A_0 e^{i(\omega t + \pi/4)} \\ z_2 &= 2A_0 e^{i(3\omega t + \pi/3)} \end{aligned}$$

Der resultierende Zeiger ist dann:

$$z(t) = A_0 e^{i(\omega t + \pi/4)} \left(1 + 2e^{i(\omega t + \pi/12)}\right)$$

Zum Beispiel mit Maple kann man dies dann plotten:

```
with(plots):

complexplot(cos(t+1/4*Pi)+I*sin(t+1/4*Pi)+
+ 2*(cos(3*t+1/3*Pi)+I*sin(3*t+1/3*Pi)), t=-Pi..Pi);
```

Das Resultat ist in Abbildung 1 für $\omega = 1$ und $A_0 = 1$ dargestellt.

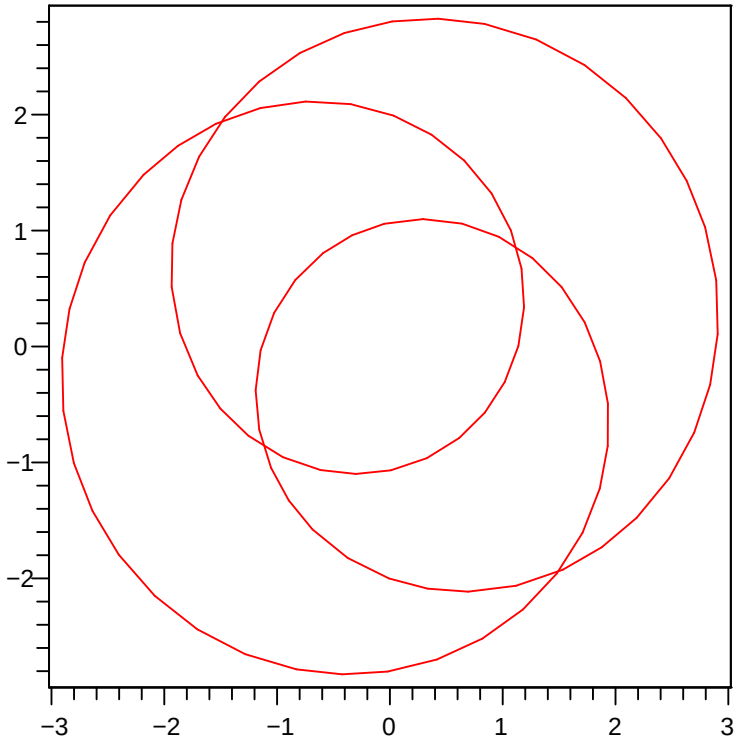


Abbildung 1: Zeigerdiagramm der überlagerten Schwingungen.

**Lösung zu 26.** Die Lösung dieser Aufgabe beschränkt sich aufs Ausrechnen.

$$1. \qquad a_0 = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} \sin^2(\omega t)dt = \frac{2}{T}\left[\frac{1}{2}t - \frac{1}{4\omega}\sin(2\omega t)\right]_0^{T/2} = \frac{1}{2}.$$

Hierbei beachte man, dass $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ist.

$$2. \qquad a_1 = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} \sin^2(\omega t)\cos(\omega t)dt = \frac{2}{T}\int_0^{0} \frac{x^2}{\omega}dx = 0$$

mit der Substitution $x = \sin\omega t$ und $dx = \omega\cos\omega t dt$. Hierbei muss man beachten, dass die Substition bijektiv sein muss und man daher eigentlich das Integral aufteilen müsste in zwei Stücke $\int_0^{T/4}$ und $\int_{T/4}^{T/2}$.

$$\begin{aligned} 3. \qquad a_2 &= \frac{2}{T}\int_0^{T/2} \sin^2(\omega t)\cos(2\omega t)dt = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} \sin^2(\omega t)\left(\cos^2(\omega t) - \sin^2(\omega t)\right)dt \\ &= \frac{2}{T}\int_0^{T/2} sin^2(\omega t)\left(1 - 2\sin^2(\omega t)\right)dt = \frac{1}{2} - \frac{2}{T}\int_0^{T/2} 2sin^4(\omega t)dt \\ &= \frac{1}{2} - \frac{4}{T}\left[\frac{3}{8}t - \frac{1}{4\omega}\sin(2\omega t) + \frac{1}{32\omega}\sin(4\omega t)\right]_0^{T/2} = \frac{1}{2} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. \qquad b_1 &= \frac{2}{T}\int_0^{T/2} \sin^2(\omega t)\sin(\omega t)dt = \frac{2}{T}\left[-\frac{1}{\omega}\cos(\omega t) + \frac{1}{3\omega}\cos(3\omega t)\right]_0^{T/2} \\ &= \frac{2}{T}\left[\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{6\pi} + \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{6\pi}\right] \\ &= \frac{2}{\pi} - \frac{2}{3\pi} = \frac{4}{3\pi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5. \qquad b_2 &= \frac{2}{T}\int_0^{T/2} \sin^2(\omega t)\sin(2\omega t)dt = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} \sin^2(\omega t)\cdot 2\sin(\omega t)\cos(\omega t)dt \\ &= \frac{4}{T}\int_0^{0} \frac{x^3}{\omega}dx = 0 \end{aligned}$$

mit der Substitution $x = \sin \omega t$ und $dx = \omega \cos \omega t dt$.

Die ersten Terme der Fourierreihe lauten also:

$$F(t) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cos 2\omega t + \frac{4}{3\pi} \sin(\omega t)$$

**Lösung zu 27.** Im Prinzip genau wie in der Aufgabe zuvor.

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \kappa t \cos\left(\frac{2\pi}{T} nt\right) dt = 0$$

da $f(t)$ ungerade und $\cos$ gerade Funktion ist.

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{T/2}^{T/2} \kappa t \underbrace{\cos\left(\frac{2\pi}{T} 0 \cdot t\right)}_{=1} dt = 0$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T} \int_0^{T/2} \kappa t \sin\left(\frac{2\pi}{T} nt\right) dt = -\frac{\kappa T}{\pi^2 n^2} \left( -\sin(\pi n) + \pi n \underbrace{\cos(\pi n)}_{=(-1)^n} \right) = \\ &= -\frac{\kappa T}{\pi^2 n^2} ((-1)^n \pi n) = \frac{\kappa T}{\pi n} (-1)^{n+1} \end{aligned}$$

Das läßt sich nur mit einer Integraltafel oder einem Rechenprogramm ausrechnen!

Die Fourierreihe lauten also:

$$F(t) = \sum_{n=1} \frac{\kappa T}{\pi n} (-1)^{n+1} \sin\left(\frac{2\pi}{T} nt\right)$$

**Lösung zu 28.** Der mathematische Hinweis ergibt sich aus:

$$\begin{aligned} e^{i\alpha} &= \cos \alpha + i \sin \alpha \\ e^{i\beta} &= \cos \beta + i \sin \beta \end{aligned}$$

Die Überlagerung der beiden Wellen ergibt dann:

$$\begin{aligned} y &= y_1 + y_2 \\ &= y_0 e^{i(\vec{k}_1\vec{r}-\omega t)} + y_0 e^{i(\vec{k}_2\vec{r}-\omega t)} \\ &= 2y_0 \cos\left(\frac{(\vec{k}_1-\vec{k}_2)\vec{r}}{2}\right) e^{i\left(\frac{\vec{k}_1+\vec{k}_2)\vec{r}}{2}-\omega t\right)} \end{aligned}$$

Also ist die Gesamtamplitude räumlich moduliert. Die Amplitude verschwindet unabhängig vom e-Faktor bei

$$(\vec{k}_1 - \vec{k}_2)\cdot\vec{r} = (2m+1)\pi$$

mit $m$ aus den ganzen Zahlen. Durch $(\vec{k}_1-\vec{k}_2)\cdot\vec{r} = \pi$ wird eine Ebene beschrieben, die senkrecht auf $(\vec{k}_1 - \vec{k}_2)$ steht. Da beide Wellen die gleiche Frequenz haben, ist auch für isotrope Medien ($c = \omega/k$ gleich für alle Raumrichtungen) der Betrag der $\vec{k}$-Vektoren gleich. Die übrigen Knotenebenen mit $m \neq 0$ liegen parallel dazu im Abstand $\frac{2\pi}{|(\vec{k}_1-\vec{k}_2)|}$.

Zwischen diesen Ebenen kann sich die Welle mit der Fequenz $\omega$ ausbreiten. Der Ausbreitungsvektor ist aber gegeben durch $\frac{(\vec{k}_1+\vec{k}_2)}{2}$ (e-Faktor) parallel zu den Knotenebenen. Die Wellenlänge der Gesamtwelle ist nun eine andere als die der Einzelwellen $\lambda = \frac{2\pi}{k}$:

$$\lambda_G = \frac{2\pi}{\frac{|\vec{k}_1+\vec{k}_2|}{2}} = \frac{4\pi}{|\ \vec{k}_1 + \vec{k}_2\ |}$$

Daraus folgt natürlich, dass auch die Ausbreitungsgeschwindigkeit $c$ nicht die der Einzelwellen ist: $c_G = \lambda_G\nu > c = \lambda\nu$. Also laufen ëingeklemmte"Wellen in Knotenebenen schneller als im freien Zustand. Als Anmerkung sei hier erwähnt, dass für unterschiedliche Amplituden der beiden Wellen, diese sich in der Knotenebene nicht mehr auslöschen.

**Lösung zu 29.** (a) Die Geschwindigkeit der resultierenden Welle in Abhängigkeit von $x$ und $t$ ist:

$$v = \frac{\partial y_r}{\partial t} = -A_1\omega_1 \sin(\omega_1 t)\sin(k_1 x) - A_2\omega_2 \sin(\omega_2 t)\sin(k_2 x)$$

(b) Das Element $dx$ der Saite hat die kinetische Energie

$$\begin{aligned} dE_{kin} &= \frac{1}{2}\mu v^2 dx \\ &= \frac{1}{2}\mu(A_1^2\omega_1^2\sin^2(\omega_1 t)\sin^2(k_1 x) + A_2^2\omega_2^2\sin^2(\omega_2 t)\sin^2(k_2 x) + \\ &\quad 2A_1A_2\omega_1\omega_2\sin(\omega_1 t)\sin(\omega_2 t)\sin(k_1 x)\sin(k_2 x))dx \end{aligned}$$

(c) Die gesamte kinetische Energie der Saite ist

$$E_{kin} = \frac{1}{2}\mu \int_0^l v^2 dx$$

$v^2$ wurde in Teil (b) ermittelt. Zum Berechnen der kinetischen Energie braucht man jetzt folgende Integrale:

$$\int_0^l \sin^2(k_1 x)dx = \int_0^l \sin^2(k_2 x)dx = \frac{l}{2}$$

mit $k_1 = n_1\pi/l$ und $k_2 = n_2\pi/l$. Weiterhin

$$\int_0^l \sin(k_1 x)\sin(k_2 x) = 0$$

für $n_1 \neq n_2$. Aufsummieren der Einzelresultate ergibt

$$E_{kin} = \frac{1}{4}\mu l \left((\omega_1 A_1)^2 + (\omega_2 A_2)^2\right)$$

**Lösung zu 30.** (a) läßt sich direkt hinschreiben als zwei Wellen mit entgegengesetzter Ausbreitungsrichtung.

$$\begin{aligned} y_1 &= 0.01 \sin\left(\frac{\pi x}{2} - 40\pi t\right) \\ y_2 &= 0.01 \sin\left(\frac{\pi x}{2} + 40\pi t\right) \end{aligned}$$

(b) Knoten treten immer an den Stellen auf, bei denen $\sin(\pi x/2) = 0$ gilt. Dies ist bei $\pi x/2 = n\pi$ mit $n = 0, 1, 2, \ldots$ der Fall. Also sind die Knoten bei $x = 0, 2, 4, \ldots$. Daher beträgt der Abstand zwischen zwei Knoten $2m$.

(c) An der Stelle $x = 1m$ ist $\sin(\pi x/2) = 1$. Daraus folgt $v = \partial y/\partial t = -2.51m/s \cdot \sin(40\pi t)$.

(d) Bei $x = 1m$ ist $a = \partial^2 y/\partial t^2 = -316m/s^2 \cdot \cos(40\pi t)$.

5. Nach Skript S. 212:

Für $N = 3$

DGL für die Pendel:

$$I\ddot{\phi}_1 = -Lmg\phi_1 - kl^2\left(\phi_1 - \phi_2\right)$$

$$\begin{aligned} I\ddot{\phi}_2 &= -Lmg\phi_2 - kl^2\left(\phi_2 - \phi_3\right) + kl^2\left(\phi_1 - \phi_2\right) \\ &= -Lmg\phi_2 + kl^2\phi_1 - 2kl^2\phi_2 + kl^2\phi_3 \end{aligned}$$

$$I\ddot{\phi}_3 = -Lmg\phi_3 + kl^2\left(\phi_2 - \phi_3\right)$$

d.h. an Pendel 1 zieht Pendel 2 mit $\phi_2$

an Pendel 3 zieht Pendel 2 mit $\phi_2$

an Pendel 2 ziehen Pendel 1&3 mit $\phi_1$ & $\phi_3$

positive Richtung für alle gleich, z.B. nach rechts

mit $I := mL^2$

$\omega_0^2 := \frac{g}{L}$ $\qquad$ $L$ : Bahn der Pendelmassen

$\kappa := \frac{kl^2}{mL^2}$ $\qquad$ $l$ : Abstand:Aufhängung-Pendelmasse

$$\begin{pmatrix} \ddot{\phi}_1 \\ \ddot{\phi}_2 \\ \ddot{\phi}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega_0^2 - \kappa & \kappa & 0 \\ \kappa & -\omega_0^2 - 2\kappa & \kappa \\ 0 & \kappa & -\omega_0^2 - \kappa \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix}$$

mit $\phi_\nu = \hat{\phi}_\nu e^{i\omega t}$ folgt:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega^2 - \omega_0^2 - \kappa & \kappa & 0 \\ \kappa & \omega^2 - \omega_0^2 - 2\kappa & \kappa \\ 0 & \kappa & \omega^2 - \omega_0^2 - \kappa \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\phi}_1 \\ \hat{\phi}_2 \\ \hat{\phi}_3 \end{pmatrix}$$

Jetzt Det(...) $\stackrel{!}{=} 0$

$$\begin{vmatrix} \omega^2 - \omega_0^2 - \kappa & \kappa & 0 \\ \kappa & \omega^2 - \omega_0^2 - 2\kappa & \kappa \\ 0 & \kappa & \omega^2 - \omega_0^2 - \kappa \end{vmatrix} \stackrel{!}{=} 0$$

mit $\omega = \omega_0$ (Grundmode ohne Federstauchung)

$$\begin{vmatrix} -\kappa & \kappa & 0 \\ \kappa & -2\kappa & \kappa \\ 0 & \kappa & -\kappa \end{vmatrix} = 0 \text{ OKAY}$$

$$\begin{aligned} &\left(\omega^2 - \omega_0^2 - \kappa\right) \cdot \left[\left(\omega^2 - \omega_0^2 - 2\kappa\right)\left(\omega^2 - \omega_0^2 - \kappa\right) - \kappa^2\right] \\ &- \kappa \cdot \left[\kappa \cdot \left(\omega^2 - \omega_0^2 - \kappa\right) - 0\right] \\ &+ 0 \cdot [] \\ &= \left(\omega^2 - \omega_0^2 - \kappa\right)^2 \left(\omega^2 - \omega_0^2 - 2\kappa\right) - 2\kappa^2 \left(\omega^2 - \omega_0^2 - \kappa\right) \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}$$

Wenn alle drei Pendel in Phase sind, hat die Federkopplung keinen Einfluss. Das Quadrat der Kreisfrequenz ist dann

$$\omega_1^2 = \omega_0^2$$

Eingesetzt ergibt

$$\left(\omega_0^2 - \omega_0^2 - \kappa\right)^2 \left(\omega_0^2 - \omega_0^2 - 2\kappa\right) - 2\kappa^2 \left(\omega_0^2 - \omega_0^2 - \kappa\right) = \kappa^2 \cdot (-2\kappa) - 2\kappa^2 \cdot (-\kappa) = 0$$

Wir können also durch $(\omega^2 - \omega_0^2)$ teilen. Dazu setzen wir zuerst $\omega^2 - \omega_0^2 = A$ und multiplizieren wir die Gleichung aus

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\omega^2 - \omega_0^2 - \kappa\right)^2 \left(\omega^2 - \omega_0^2 - 2\kappa\right) - 2\kappa^2 \left(\omega^2 - \omega_0^2 - \kappa\right) \\ &= (A - \kappa)^2 (A - 2\kappa) - 2\kappa^2 (A - \kappa) \\ &= \left(A^2 - 2A\kappa + \kappa^2\right)(A - 2\kappa) - 2A\kappa^2 + 2\kappa^3 \\ &= A^3 - 4A^2\kappa + 5A\kappa^2 - 2\kappa^3 - 2A\kappa^2 + 2\kappa^3 \\ &= A^3 - 4A^2\kappa + 3A\kappa^2 \\ &= \omega^6 - 3\omega^4\omega_0^2 + 3\omega^2\omega_0^4 - \omega_0^6 - 4\omega^4\kappa + 8\omega^2\omega_0^2\kappa - 4\omega_0^4\kappa + 3\omega^2\kappa^2 - 3\omega_0^2\kappa^2 \\ &= \omega^6 - \omega^4\left(3\omega_0^2 + 4\kappa\right) + \omega^2\left(3\omega_0^4 + 8\omega_0^2\kappa + 3\kappa^2\right) - \omega_0^6 - 3\omega_0^2\kappa^2 - 4\omega_0^4\kappa \end{aligned}$$

Die Division ergibt

$$0 = (\omega^2 - \omega_0^2)\left[\omega^4 - \omega^2\left(2\omega_0^2 + 4\kappa\right) + \left(\omega_0^4 + 4\omega_0^2\kappa + 3\kappa^2\right)\right]$$

Der zweite Term ist eine quadratische Gleichung, die wir lösen können.

$$\begin{aligned}
\left(\omega^2\right)_{2,3} &= \frac{1}{2}\left[\left(2\omega_0^2 + 4\kappa\right) \pm \sqrt{\left(2\omega_0^2 + 4\kappa\right)^2 - 4\left(\omega_0^4 + 4\omega_0^2\kappa + 3\kappa^2\right)}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\left(2\omega_0^2 + 4\kappa\right) \pm \sqrt{4\omega_0^4 + 16\omega_0^2\kappa + 16\kappa^2 - 4\omega_0^4 - 16\omega_0^2\kappa - 12\kappa^2}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\left(2\omega_0^2 + 4\kappa\right) \pm \sqrt{4\kappa^2}\right] \\
&= \omega_0^2 + 2\kappa \pm \kappa
\end{aligned}$$

Die anderen Lösungen sind dann

$$\begin{aligned}
\omega_2^2 &= \omega_0^2 + \kappa \\
\omega_3^2 &= \omega_0^2 + 3\kappa
\end{aligned}$$

Um $\omega$ zu berechnen muss nun noch die Wurzel gezogen werden (wir brauchen ja zwei Lösungen um die Amplitude und die Geschwindigkeit festlegen zu können). Die Schwingungsfrequenz der Lösungen ist aber gleich. Wir haben also die Eigenfrequenzen

$$\begin{aligned}
\omega_{1\pm} &= \pm\omega_0 \\
\omega_{2\pm} &= \pm\omega_0\sqrt{1 + \frac{\kappa}{\omega_0^2}} \\
\omega_{3\pm} &= \pm\omega_0\sqrt{1 + \frac{3\kappa}{\omega_0^2}}
\end{aligned}$$

Die dazugehörigen Eigenschwingungen erhält man, indem man die Eigenfrequenzen in

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega^2 - \omega_0^2 - \kappa & \kappa & 0 \\ \kappa & \omega^2 - \omega_0^2 - 2\kappa & \kappa \\ 0 & \kappa & \omega^2 - \omega_0^2 - \kappa \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\phi}_1 \\ \hat{\phi}_2 \\ \hat{\phi}_3 \end{pmatrix}$$

einsetzt. Für $\omega_{1\pm}^2 = \omega_0^2$ bekommen wir

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\kappa & \kappa & 0 \\ \kappa & -2\kappa & \kappa \\ 0 & \kappa & -\kappa \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\phi}_{1,1} \\ \hat{\phi}_{2,1} \\ \hat{\phi}_{3,1} \end{pmatrix}$$

oder

$$\begin{aligned}
0 &= -\hat{\phi}_{1,1} + \hat{\phi}_{2,1} \\
0 &= \hat{\phi}_{1,1} - 2\hat{\phi}_{2,1} + \hat{\phi}_{3,1} \\
0 &= \hat{\phi}_{2,1} - \hat{\phi}_{3,1}
\end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem ist überbestimmt (die Determinante ist ja null). Wir nehmen $\hat{\phi}_{1,1}$ an und berechnen, dass

$$\hat{\phi}_{1,1} = \hat{\phi}_{2,1} = \hat{\phi}_{3,1}$$

ist. Für die zweite Eigenfrequenz $\omega_{1\pm}^2 = \omega_0^2 + \kappa$ bekommen wir

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ \kappa & -\kappa & \kappa \\ 0 & \kappa & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\phi}_{1,2} \\ \hat{\phi}_{2,2} \\ \hat{\phi}_{3,2} \end{pmatrix}$$

Damit folgt sofort, dass $\hat{\phi}_{2,2} = 0$ ist. Aus der mittleren Zeile folgt $\hat{\phi}_{3,2} = -\hat{\phi}_{1,2}$. Die Eigenschwingung hat also

$$\begin{aligned}
\hat{\phi}_{2,2} &= 0 \\
\hat{\phi}_{3,2} &= -\hat{\phi}_{1,2}
\end{aligned}$$

Für die dritte Eigenfrequenz $\omega_{1\pm}^2 = \omega_0^2 + 3\kappa$ bekommen wir

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\kappa & \kappa & 0 \\ \kappa & \kappa & \kappa \\ 0 & \kappa & 2\kappa \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\phi}_{1,3} \\ \hat{\phi}_{2,3} \\ \hat{\phi}_{3,3} \end{pmatrix}$$

und damit

$$\begin{aligned}
0 &= 2\hat{\phi}_{1,3} + \hat{\phi}_{2,3} \\
0 &= \hat{\phi}_{1,3} + \hat{\phi}_{2,3} + \hat{\phi}_{3,3} \\
0 &= \hat{\phi}_{2,3} + 2\hat{\phi}_{3,3}
\end{aligned}$$

Das Gleichungssystem ist überbestimmt. Wir setzen $\hat{\phi}_{1,3}$ als bekannt voraus und erhalten

$$\begin{aligned}
\hat{\phi}_{2,3} &= -2\hat{\phi}_{1,3} \\
\hat{\phi}_{3,3} &= \hat{\phi}_{1,3}
\end{aligned}$$

Man kann natürlich auch Maple anwerfen und erhält dann die sechs Lösungen

$$\left.\begin{aligned} \omega_{1/2} &= \pm\sqrt{\omega_0^2+\kappa} \\ \omega_{3/4} &= \pm\omega_0 \\ \omega_{5/6} &= \pm\sqrt{\omega_0^2+3\kappa} \end{aligned}\right\} \text{Eigenwerte}$$

Die Berechnung der Eigenschwingungen ist wie oben.