

Grundkurs IIIa für Physiker

Othmar Marti
Experimentelle Physik
Universität Ulm

Othmar.Marti@Physik.Uni-Ulm.de

Vorlesung nach Tipler, Gerthsen, Hecht

Skript: <http://wwwex.physik.uni-ulm.de/Lehre/gk3a-2002>

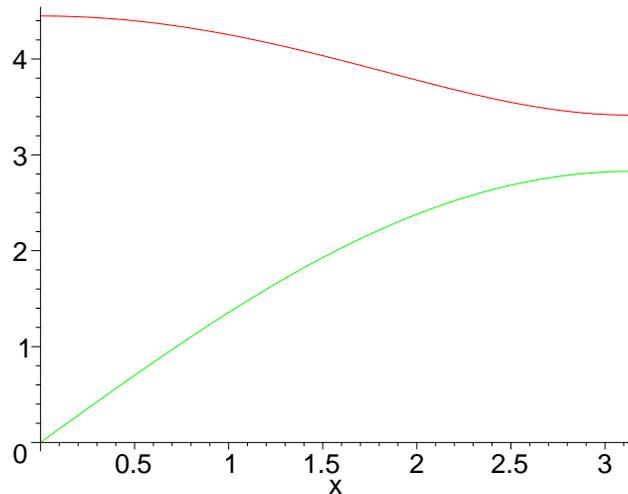
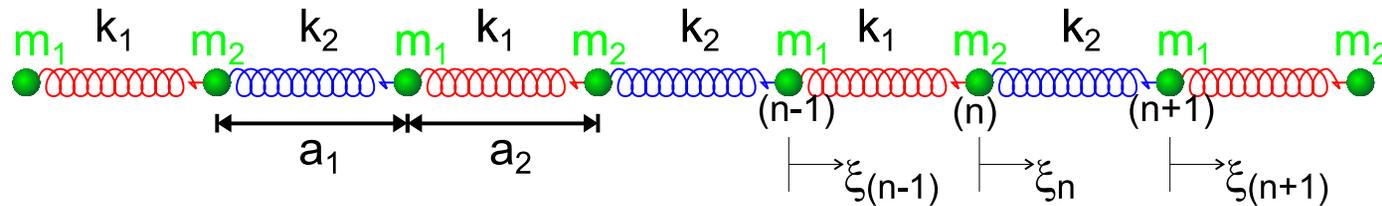
Übungsblätter und Lösungen: <http://wwwex.physik.uni-ulm.de/Lehre/gk3a-2002/Ueb/ue#>

15. Mai 2002



Universität Ulm, Experimentelle Physik

Federmodell für Dispersion V



Wenn eine Federkette mit einer regelmässigen Anordnung zweier ungleicher Massen gebildet wird, tritt zum von den vorherigen Ausführungen bekannten **akustischen Zweig** ein optischer Zweig. Zusätzlich gibt es Frequenzen, für die es keinen reellen \vec{k} -Vektor gibt. Diese Frequenzen (oder über $E = \hbar\omega$ auch diese Energien) sind keine propagierenden Wellen möglich. Gibt es neben longitudinalen auch transversale Wellen, zeigt die Dispersionsrelation nicht einen sondern drei Zweige akustischer Phononen.



Dispersion: Wasserwellen

Schwerewellen im tiefen Wasser haben die Dispersionsbeziehung

$$c^2 = \frac{g}{k} = \frac{1}{2\pi}g\lambda \quad (1)$$

Eine Konsequenz ist, dass sehr schnelle Wellen sehr lange Wellenlängen haben, oder umgekehrt. (Bsp: Tsunamis, Flutwellen von Erdbeben)

- $c = 300m/s$
- Dann ist $\lambda = 2\pi c^2/g \approx 2 * 3 * 300 * 300/10 = 54000m$



Dispersion: Kommunikation

Ein Puls oder eine Wellengruppe besteht aus Wellen benachbarter Frequenz. Analog zur Modulation¹ besteht ein Puls aus einer Einhüllenden sowie einer Phase, die für sich aber keine Information trägt. Eine längere Rechnung[?] ergibt, dass die resultierende Wellenfunktion aus harmonischen Welle $e^{i(k_0x - \omega t)}$ sowie der Modulation $G\left(x - \frac{d\omega}{dk}\Big|_{k_0} t\right)$. Die resultierende Welle ist

$$\xi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i(k_0x - \omega t)} G\left(x - \frac{d\omega}{dk}\Big|_{k_0} t\right) \quad (2)$$

¹Dabei muss ωt durch $kx - \omega t$ ersetzt werden.



Gruppengeschwindigkeit und Dispersion

Die Gruppengeschwindigkeit

$$v_G = \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0} \quad (3)$$

Bei unserem Feder-Masse-System ist $v_G = 0$ wenn $\lambda = 2a$ ist. Das heisst, der Puls, der die Information trägt, ist **ortsfest**. Wenn v_G nicht konstant ist, bewegt sich die Form des Pulses, da die verschiedenen Frequenzanteile sich unterschiedlich schnell ausbreiten.



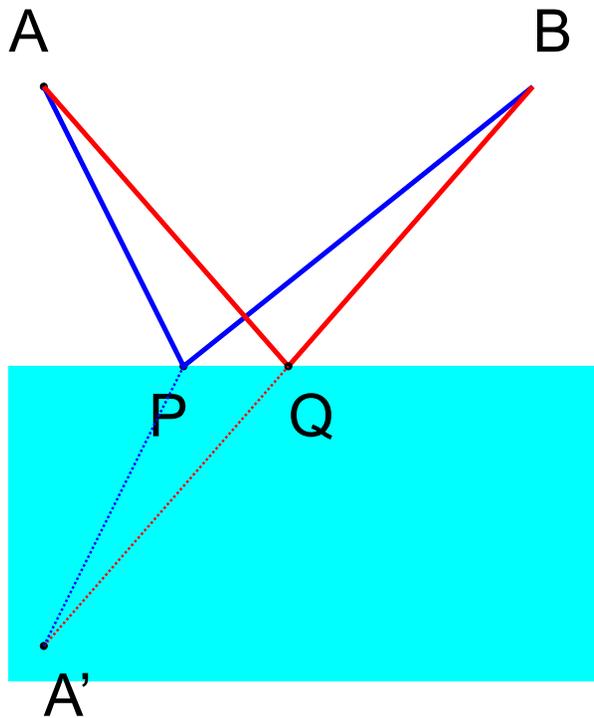
Dispersion und Kommunikation

Lösungsmöglichkeiten

- Dispersionskompensation. Sie ist aufwendig und wird hauptsächlich bei Kurzpuls-Lasersystemen angewandt.
- Betrieb des Systems bei einer Wellenlänge, bei der die Dispersion minimal, also v_G möglichst konstant ist. Dies wird bei der optischen Kommunikation angewandt (Wellenlängen 1300 nm und 1500 nm).
- Man setzt die Datenrate auf niedrigere Werte, verbreitert also die Pulse und minimiert so die Fehler durch die Dispersion. Bis zu einer Verringerung der übertragenen Datenrate um den Faktor 2 kann der Geschwindigkeitsverlust meist durch die Anwendung von Kompressionsalgorithmen minimiert werden.



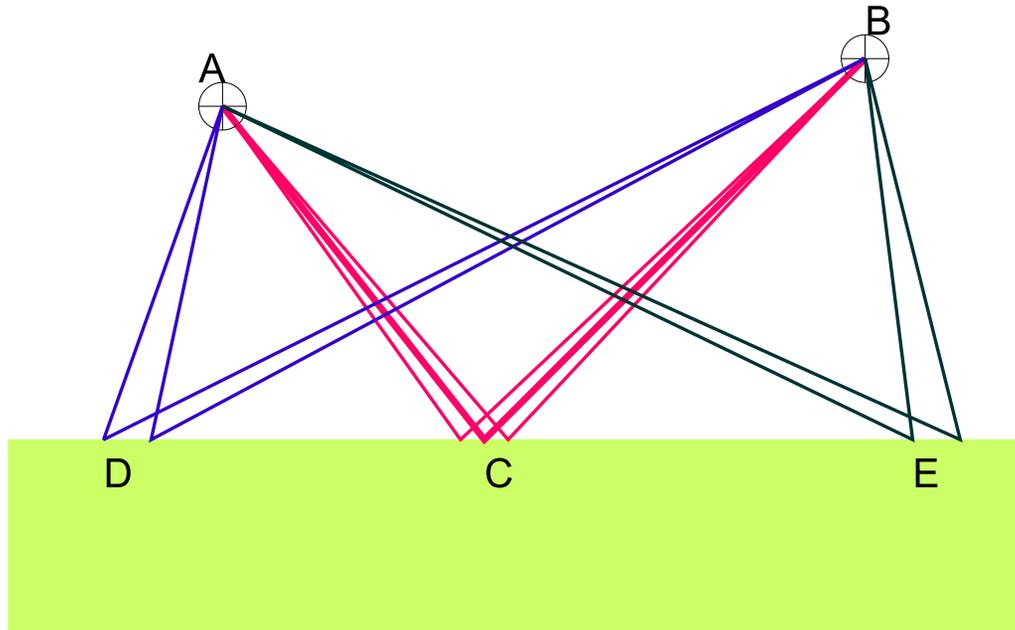
Fermatsches Prinzip: Reflexion



Der Weg, den das Licht nimmt, um von einem Punkt zu einem anderen zu gelangen, ist stets so, dass die benötigte Zeit minimal ist.

Der Weg, den das Licht nimmt, um von einem Punkt zu einem anderen zu gelangen, ist stets so, dass die Zeit, die das Licht benötigt, invariant gegen kleine Änderungen des Weges ist.

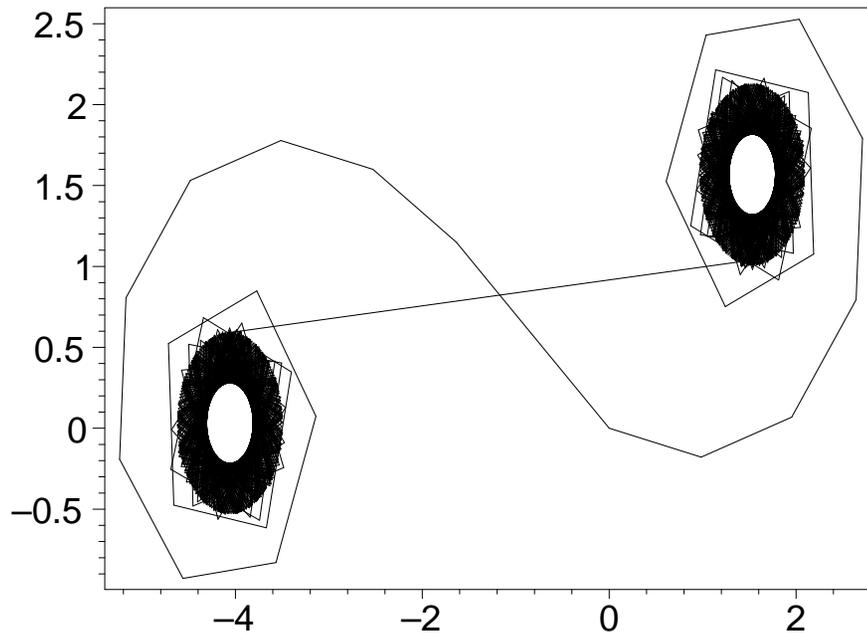
Fermatsches Prinzip und Interferenz



Der kürzeste Weg \overline{ACB} und nahe benachbarte Wege haben fast gleiche Längen. Im Gegensatz dazu sind ändert sich bei den längeren Wegen \overline{ADB} und \overline{AEB} die Länge schnell.



Fermatsches Prinzip und Interferenz



- Die Intensität an einem Punkt ist das Resultat der **Interferenz aller möglichen Lichtstrahlen**.
- Lichtstrahlen auf Wegen die weit weg vom kürzesten Weg sind interferieren destruktiv.
- Licht in der Nähe des kürzesten Lichtweges (Distanz ändert sich nicht) interferieren konstruktiv.
- **Analogie zur Quantenphysik, zu Feynmanschen Pfadintegralen.**



Fata Morgana I



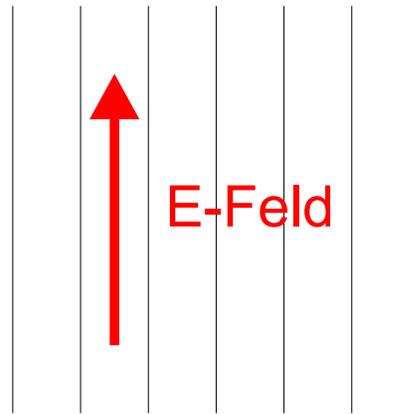
Fata Morgana II



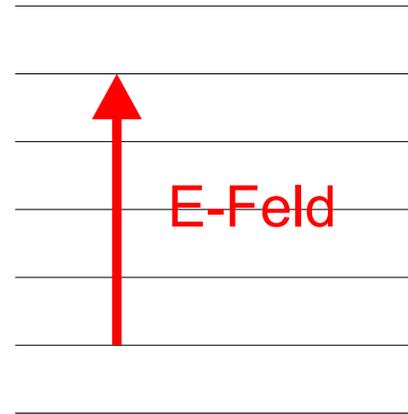
Fata Morgana III



Polarisation I



Absorption

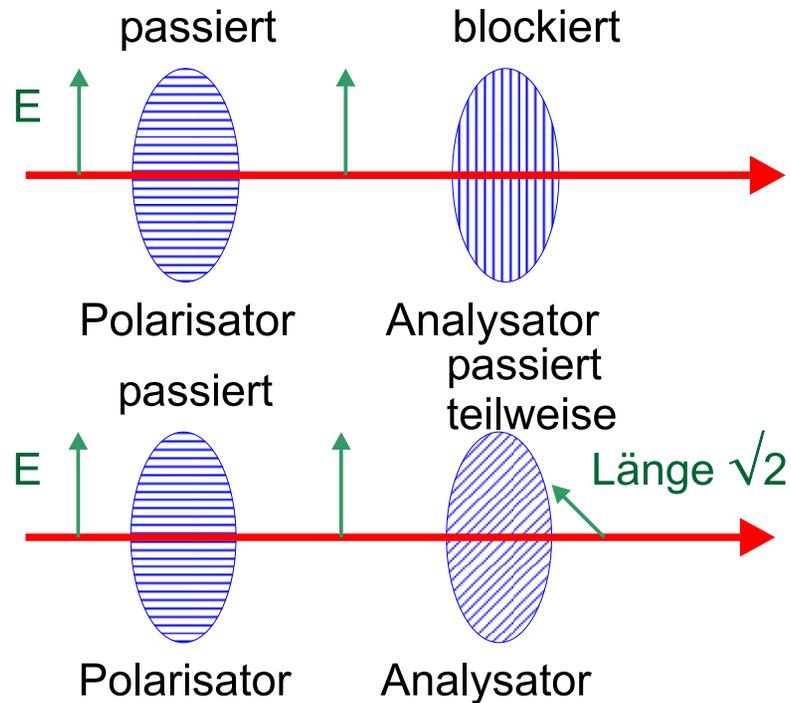


keine Absorption

Polarisation durch Absorption



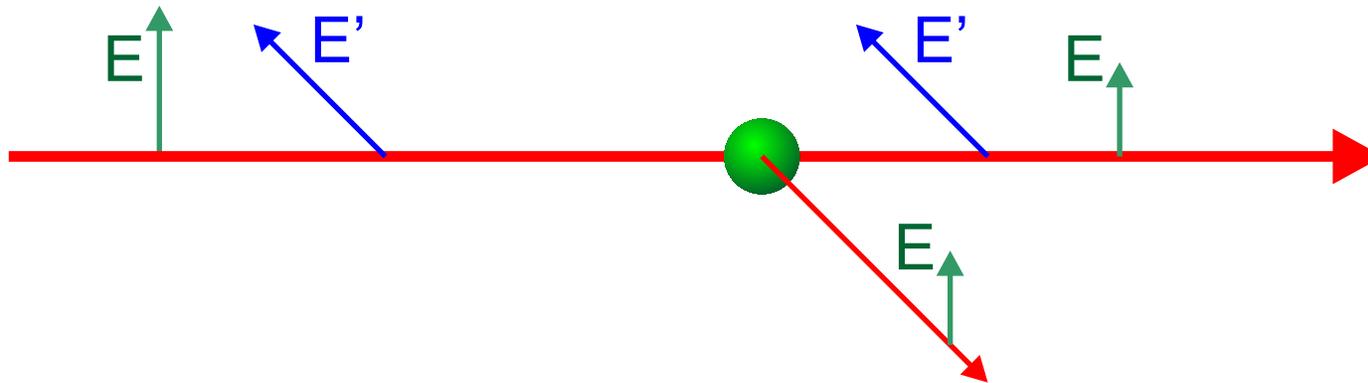
Polarisation II



Licht durch einen Polarisator und einen Analysator mit gekreuzten Polarisationsrichtungen. Darunter die gleiche Anordnung, aber der Analysator ist nun um $\pi/4$ gedreht.



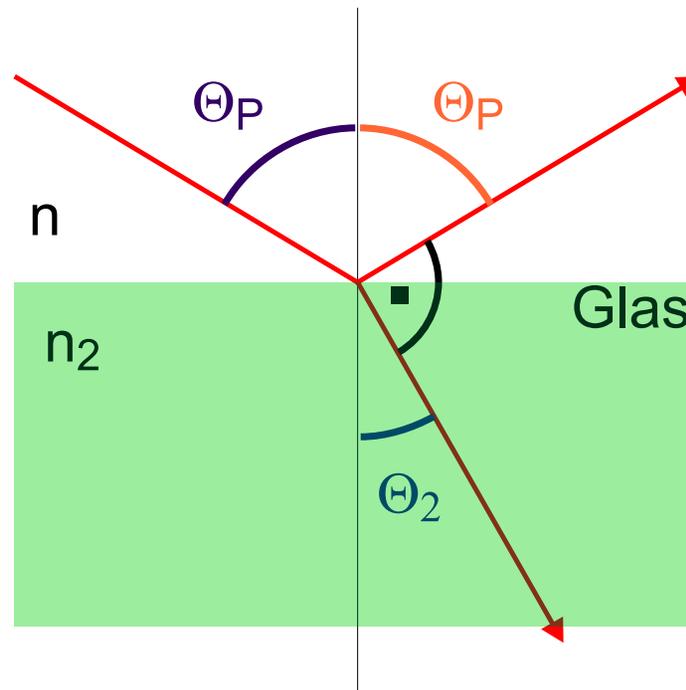
Polarisation III



Polarisation durch Streuung

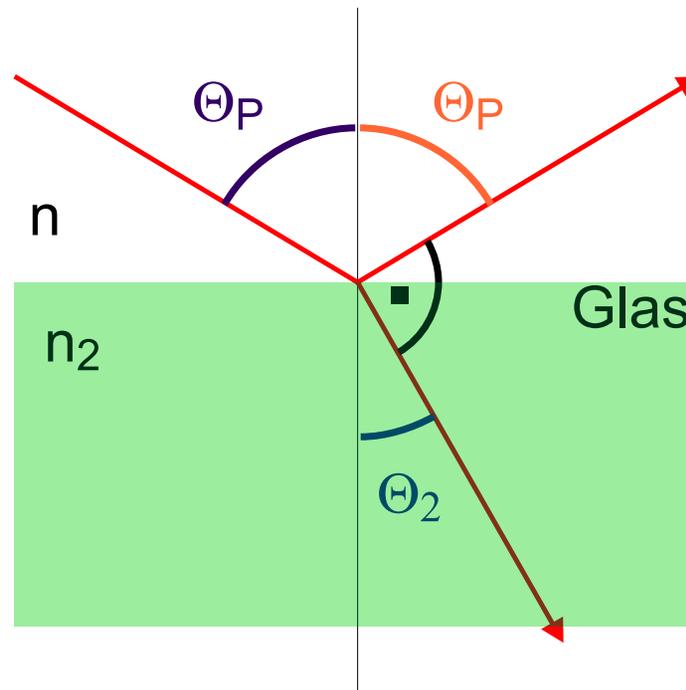


Polarisation IV



Winkel bei der Reflexion unter dem Brewster-Winkel.

Polarisation IV



Winkel bei der Reflexion unter dem Brewster-Winkel.

Polarisation V

- Einfallswinkel = Ausfallswinkel (Impulserhaltung für die zur Grenzfläche tangentielle Komponenten des Lichtes)
- Das Gesetz von Snellius $n \sin \theta_P = n_2 \sin \theta_2$

Wenn nun der Winkel zwischen dem gebrochenen Licht und dem reflektierten Licht $\pi/2$ ist, kann im reflektierten Licht keine Lichtwelle angeregt werden, deren Polarisationsrichtung (\vec{E} !) in der durch den einfallenden und gebrochenen Lichtstrahl definierten Einfallsebene liegt. Der reflektierte Strahl ist vollkommen polarisiert mit der Polarisationssebene senkrecht zur Einfallsebene. Eine Betrachtung der Winkel in der Abbildung ergibt, dass $\theta_P + \theta_2 = \pi/2$ ist. Damit wird der Brewster-Winkel

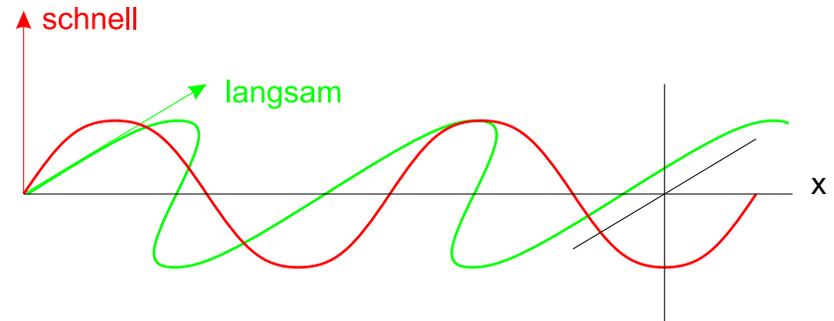
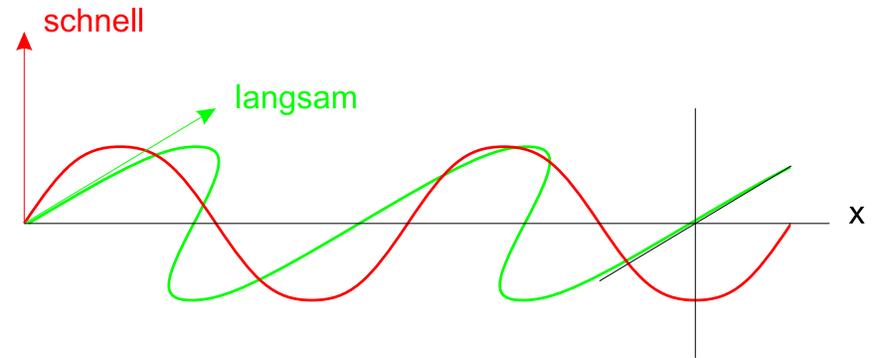
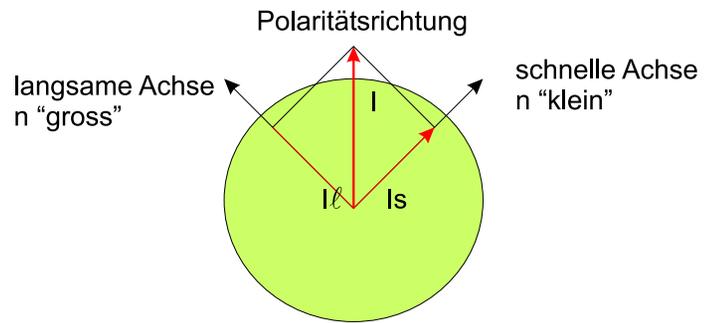
$$n \sin \theta_P = n_2 \sin \theta_2 = n_2 \sin(\pi/2 - \theta_P) = n_2 \cos \theta_P \quad (4)$$

und damit

$$\tan \theta_P = \frac{n_2}{n} \quad (5)$$



Polarisation VI



λ/n -Plättchen

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \vec{E}_0 e^{j(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t) - \phi} \quad (6)$$

wobei $\vec{E}_0 \cdot \vec{k} = 0$ ist (Transversalität) und \vec{E}_0 die Polarisationsrichtung angibt. ϕ ist die Phase, die die Anfangsbedingung am Ort 0 und zur Zeit 0 angibt.

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir $\vec{k} = (k; 0; 0)$ setzen. Dann ist $\vec{E}_0 = (0; E_y; E_z)$ die möglichen Polarisationsrichtungen. Unser dichroitische Plättchen habe die schnelle Achse (Brechungsindex n_1) entlang y' und die langsame Achse (Brechungsindex n_2) entlang z' und die Dicke ℓ . Die x -Achse sollen übereinstimmen. Das gestrichene Koordinatensystem sei um den Winkel α gegen das ungestrichene verdreht. Dann ist

$$\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= y \cos(\alpha) - z \sin(\alpha) \\ z' &= y \sin(\alpha) + z \cos(\alpha) \end{aligned} \quad (7)$$



λ/n -Plättchen II

Für Licht mit einer beliebigen Polarisation und einer Ausbreitung entlang der x -Achse muss das elektrische Feld auf das gestrichene Koordinatensystem projiziert werden. Am Anfang des Plättchens sei zudem die Phase $\phi = 0$. Wir bekommen dann

$$\begin{aligned} E_{y'} &= E_y \cos \alpha - E_z \sin \alpha \\ E_{z'} &= E_y \sin \alpha + E_z \cos \alpha \end{aligned} \quad (8)$$

Die Feldkomponente mit der Polarisation $E_{y'}$ breitet sich mit der Geschwindigkeit $c_1 = c/n_1$ aus, die Polarisation $E_{z'}$ mit der Geschwindigkeit $c_2 = c/n_2$. Damit sind die Wellenlängen der Polarisation entlang y' $\lambda_1 = \lambda/n_1 = \frac{2\pi}{kn_1} = \frac{2\pi}{k_1}$ und entlang z' $\lambda_2 = \lambda/n_2 = \frac{2\pi}{kn_2} = \frac{2\pi}{k_2}$.



λ/n -Plättchen III

Für die \vec{k} gilt dann

$$\begin{aligned}k_1 &= n_1 k \\k_2 &= n_2 k\end{aligned}\tag{9}$$

Die Laufzeit durch ein Plättchen der Dicke ℓ ist dann $t_1 = \ell/c_1 = \ell n_1/c$ und $t_2 = \ell/c_2 = \ell n_2/c$. Wir betrachten zu einer feststehenden Zeit (praktischerweise $t = 0$) das Wellenmuster. Am Ausgang des Plättchens haben wir

$$\begin{aligned}E_{y'}(\ell, 0) &= E_{y'} e^{jk_1 \ell} = E_{y'} e^{jn_1 k \ell} \\E_{z'}(\ell, 0) &= E_{z'} e^{jk_2 \ell} = E_{z'} e^{jn_2 k \ell}\end{aligned}\tag{10}$$



λ/n -Plättchen IV

Der Phasenunterschied der beiden Wellen ist die Differenz der Argumente der Exponentialfunktion, also $\phi(\ell)(n_2 - n_1)k\ell$. Wir können also auch schreiben

$$\begin{aligned} E_{y'}(\ell, 0) &= E_{y'} e^{jn_1 k\ell} \\ E_{z'}(\ell, 0) &= E_{z'} e^{jn_1 k\ell} e^{j\phi(\ell)} \end{aligned} \quad (11)$$

Wenn wir den gemeinsamen Faktor abspalten, dann wird die z' -Komponente gegen der y' -Komponente um $\phi(\ell)$ phasenverschoben. Diese neuen Polarisationen müssen wir auf das x, y, z -Koordinatensystem mit



λ/n -Plättchen V

$$\begin{aligned}x &= x' \\y &= y' \cos(\alpha) + z' \sin(\alpha) \\z &= -y' \sin(\alpha) + z' \cos(\alpha)\end{aligned}\tag{12}$$



λ/n -Plättchen VI

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} E_y(\ell) \\ E_z(\ell) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{y'}(\ell) \\ E_{z'}(\ell) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{y'} \\ E_{z'} e^{j\phi(\ell)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{j\phi(\ell)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{y'} \\ E_{z'} \end{pmatrix} \tag{13} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{j\phi(\ell)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_y \\ E_z \end{pmatrix} \end{aligned}$$



λ/n -Plättchen VII

$$\begin{pmatrix} E_y(\ell) \\ E_z(\ell) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2 \alpha + e^{j\phi(\ell)} \sin^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha (e^{j\phi(\ell)} - 1) \\ \sin \alpha \cos \alpha (e^{j\phi(\ell)} - 1) & \sin^2 \alpha + e^{j\phi(\ell)} \cos^2 \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_y \\ E_z \end{pmatrix} \quad (14)$$

oder

$$\begin{pmatrix} E_y(\ell) \\ E_z(\ell) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+\cos 2\alpha}{2} + e^{j\phi(\ell)} \frac{1-\cos 2\alpha}{2} & \frac{\sin \alpha}{2} (e^{j\phi(\ell)} - 1) \\ \frac{\sin \alpha}{2} (e^{j\phi(\ell)} - 1) & \frac{1-\cos 2\alpha}{2} + e^{j\phi(\ell)} \frac{1+\cos 2\alpha}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_y \\ E_z \end{pmatrix} \quad (15)$$



λ/n -Plättchen VIII

Wir klammern $e^{j\phi(\ell)/2}$ aus und erhalten

$$\begin{pmatrix} E_y(\ell) \\ E_z(\ell) \end{pmatrix} = e^{j\phi(\ell)/2} \begin{pmatrix} \frac{1+\cos 2\alpha}{2} e^{-j\phi(\ell)/2} + e^{j\phi(\ell)/2} \frac{1-\cos 2\alpha}{2} & \frac{\sin \alpha}{2} (e^{j\phi(\ell)/2} - e^{-j\phi(\ell)/2}) \\ \frac{\sin \alpha}{2} (e^{j\phi(\ell)/2} - e^{-j\phi(\ell)/2}) & \frac{1-\cos 2\alpha}{2} e^{-j\phi(\ell)/2} + e^{j\phi(\ell)/2} \frac{1+\cos 2\alpha}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_y \\ E_z \end{pmatrix} \quad (16)$$

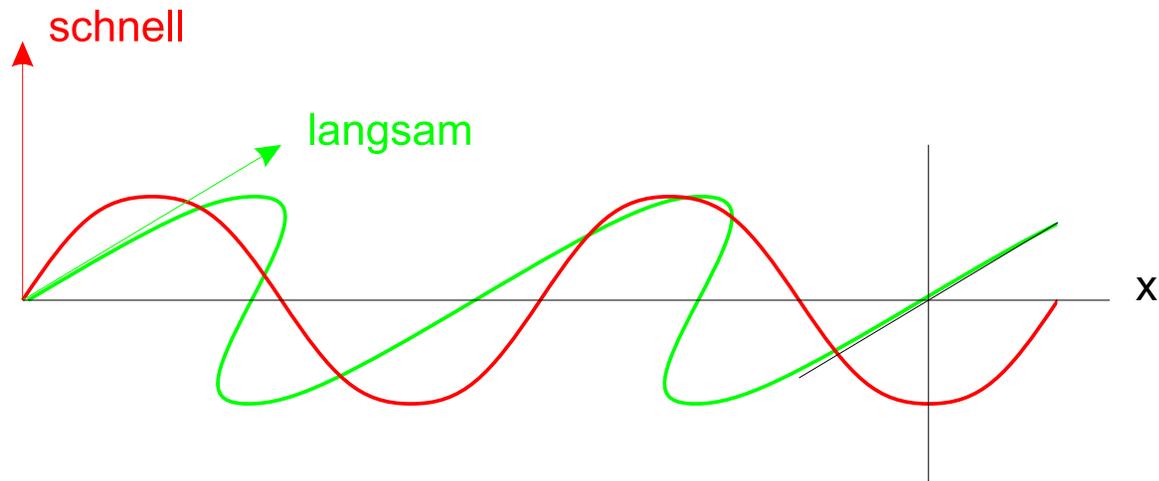


λ/n -Plättchen IX

$$\begin{pmatrix} E_y(\ell) \\ E_z(\ell) \end{pmatrix} = e^{j\phi(\ell)/2} \begin{pmatrix} \cos(\phi(\ell)/2) - j \cos 2\alpha \sin(\phi(\ell)/2) & j \sin 2\alpha \sin(\phi(\ell)/2) \\ j \sin 2\alpha \sin(\phi(\ell)/2) & \cos(\phi(\ell)/2) + j \cos 2\alpha \sin(\phi(\ell)/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_y \\ E_z \end{pmatrix} \quad (17)$$



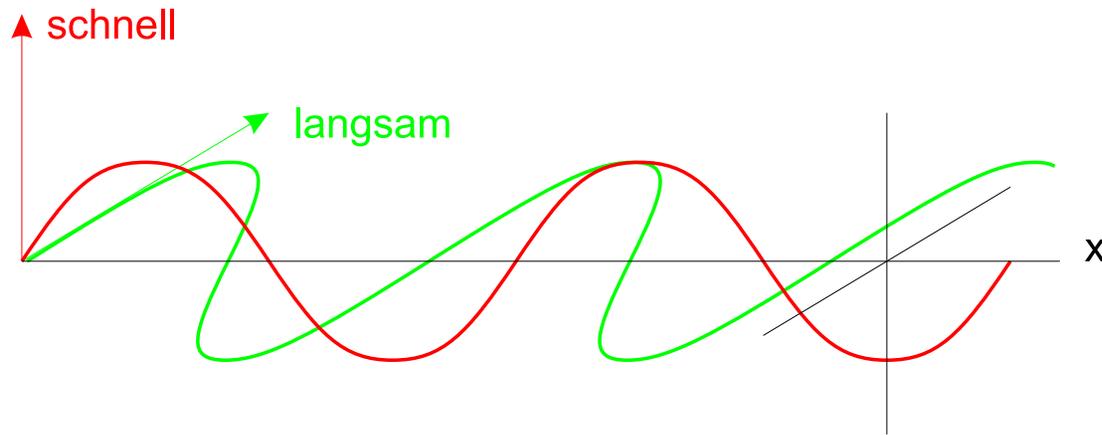
λ/n -Plättchen X



Wellen in einem $\lambda/4$ -Plättchen



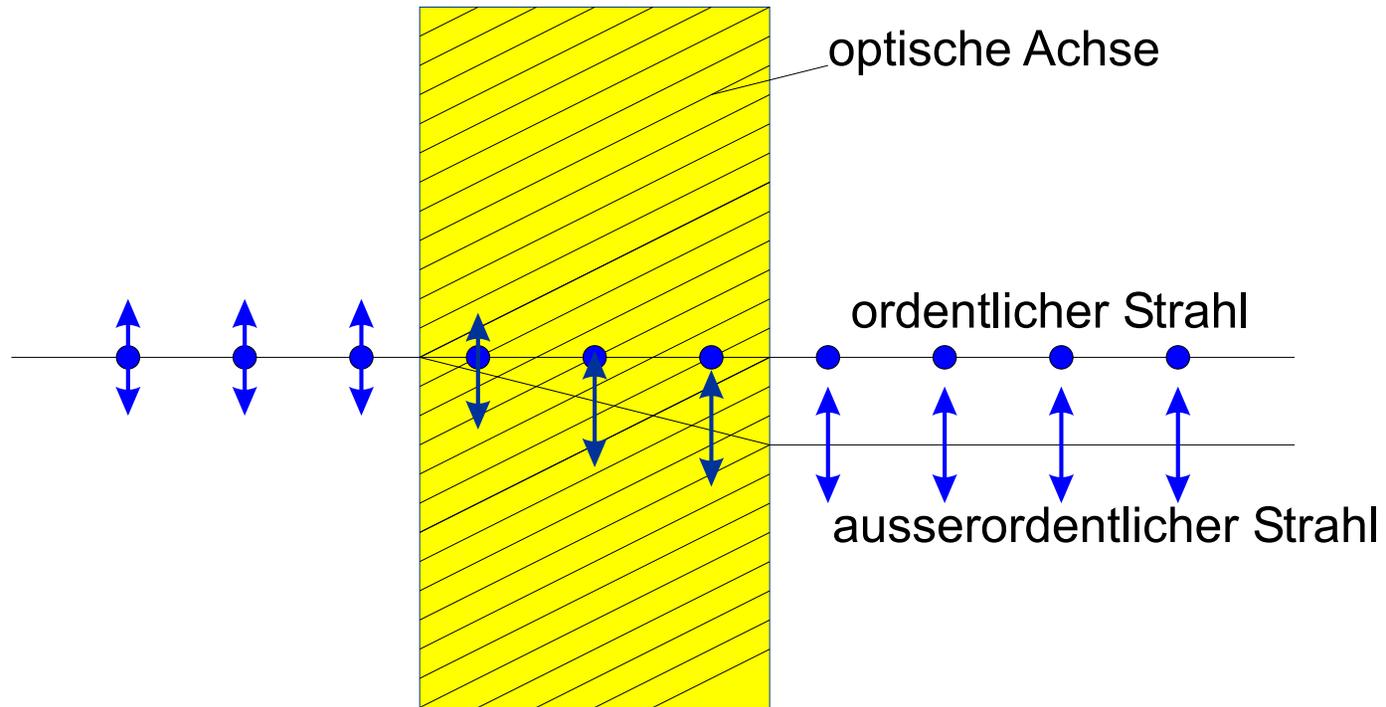
λ/n -Plättchen XI



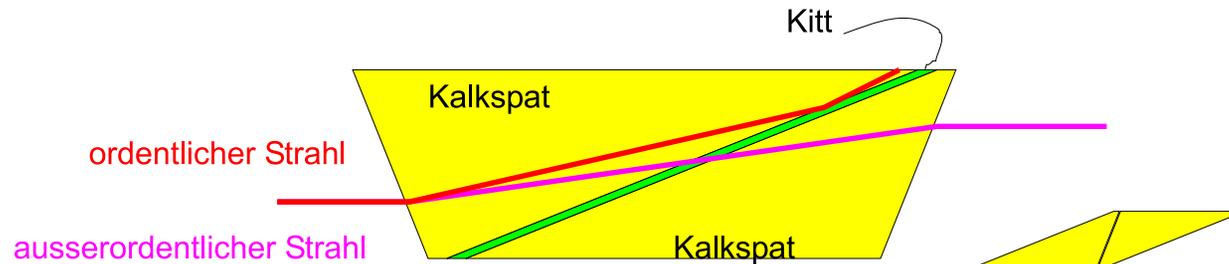
Wellen in einem $\lambda/2$ -Plättchen



Polarisation VII



Polarisation VIII



Das Nicolsche Prisma, kurz Nicol, ist eine Anwendung der Doppelbrechung zur Polartisation. Der spitze Winkel ist 68° , der abgeflachte Winkel genau 90° . Die optische Achse liegt senkrecht zur Längsachse in der Bildebene. Das Nicol-Prisma entsteht aus dem rechts gezeigten länglichen Kalkspatkristall, der diagonal geschnitten wird. Er wird mit einem Kitt, dessen Brechungsindex wie der Brechungsindex des ausserordentlichen Strahls ist, wieder zusammengeklebt. der ausserordentliche Strahl geht dann ohne grössere Ablenkung durch das Nicol-Prisma, während der ordentliche Strahl am Kitt totalreflektiert wird und aus dem Strahlengang verschwindet.

Fresnelsche Formeln

- Der einfallende und der reflektierte Strahl definiert die Einfallsebene. Diese ist senkrecht zur Grenzfläche der beiden Medien.
- Licht, dessen Polarisationssebene senkrecht zur Einfallsebene liegt, heisst **s-polarisiertes Licht**.
- Licht, dessen Polarisationssebene parallel zur Einfallsebene liegt, heisst **p-polarisiertes Licht**.
- Für die Intensität des Lichtes gilt in nichtmagnetischen Medien $I = \sqrt{\epsilon} E^2$, wobei $\epsilon = n^2$ ist.



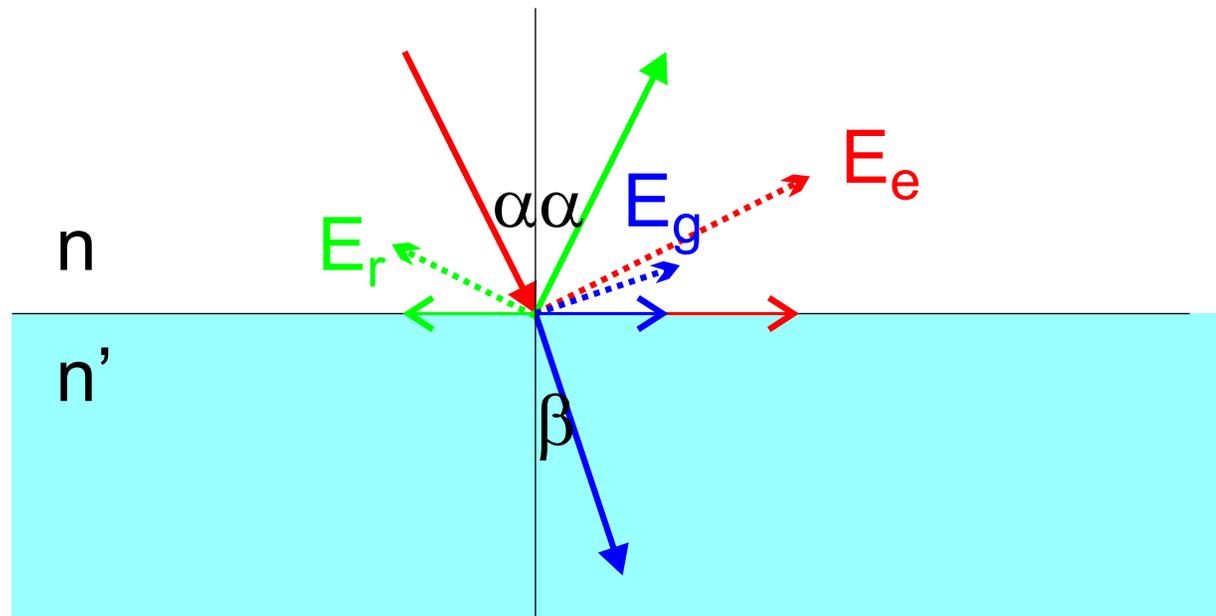
Fresnelsche Formeln II (s-Polarisation)

$$\begin{aligned} E_r &= E_e \frac{\sin \beta \cos \alpha - \sin \alpha \cos \beta}{\sin \beta \cos \alpha + \sin \alpha \cos \beta} = -E_e \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} \\ E_g &= E_e \frac{2 \sin \beta \cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} \end{aligned} \quad (18)$$

- Wenn $\alpha < \beta$, wenn also das Licht aus dem optisch dünneren Medium auf das optisch dichtere Medium trifft, haben E_e und E_r unterschiedliche Vorzeichen: es tritt ein Phasensprung um π bei der Reflexion auf.
- Bei der Reflexion am dünneren Medium $\alpha < \beta$ wechselt $\sin(\alpha - \beta)$. Es gibt keinen Phasensprung bei der Reflexion.
- Die Gesetze für die Intensität bekommt man durch quadrieren.
- Bei fast senkrechtem Einfall bekommt man $E_r = -E_e \frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\sin \alpha + \sin \beta} = -E_e \frac{n' - n}{n' + n}$



Fresnelsche Formeln III (p-Polarisation)



Stetigkeitsbedingungen für Licht mit p-Polarisation. Die dicken Vektoren stellen die \vec{k} -Vektoren dar (rot für das einfallende Licht, grün für das reflektierte und blau für das gebrochene Licht). Die \vec{E} -Vektoren sind gestrichelt gezeichnet, ihre Projektion auf die Grenzfläche dünn.



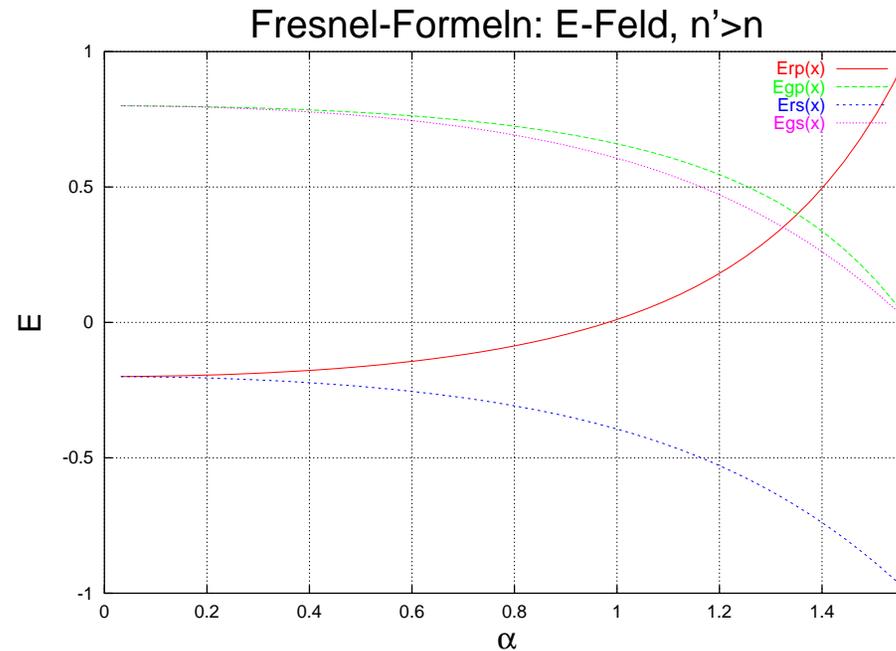
Fresnelsche Formeln IV (p -Polarisation)

Fresnelsche Formeln:

$$\begin{aligned} E_r &= -E_e \frac{\tan[\alpha - \beta(\alpha)]}{\tan[\alpha + \beta(\alpha)]} \\ E_g &= E_e \frac{2 \sin \beta(\alpha) \cos \alpha}{\sin[\alpha + \beta(\alpha)] \cos[\alpha - \beta(\alpha)]} \end{aligned} \quad (19)$$



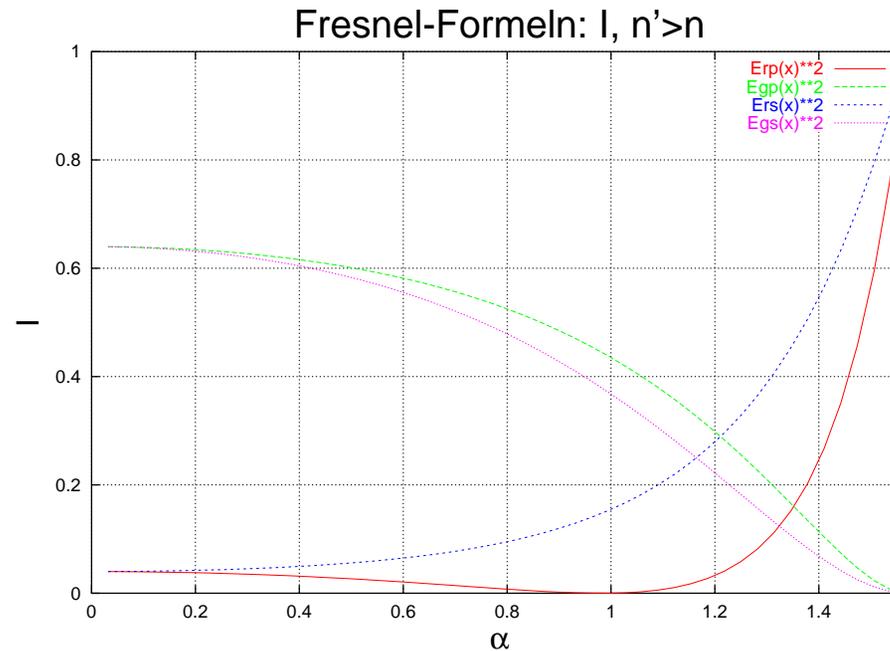
Fresnelsche Formeln V



Verlauf der Amplitude des elektrischen Feldes für p- und s-Polarisation, wenn Licht aus dem dünneren Medium in das dichtere eintritt.



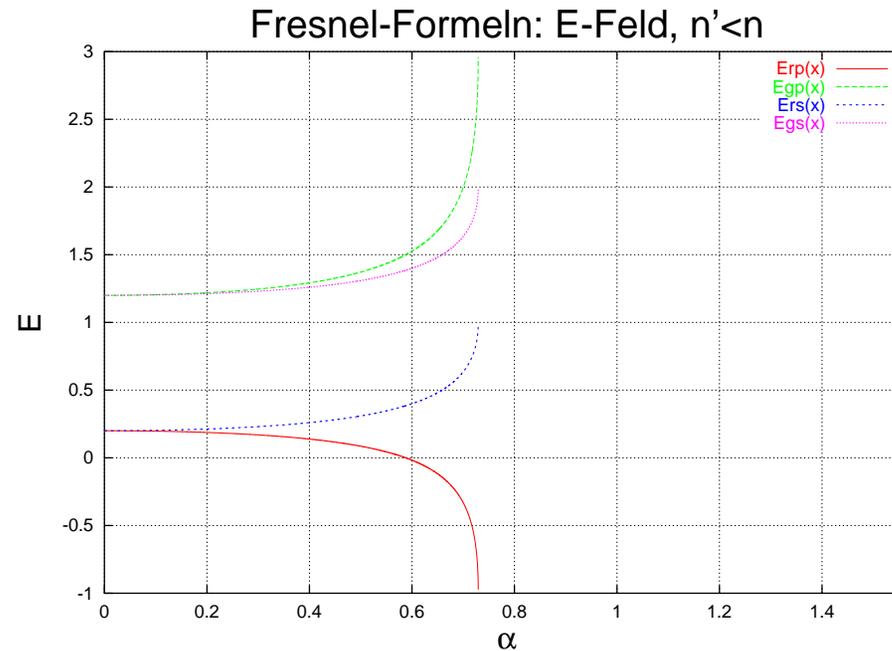
Fresnelsche Formeln VI



Verlauf der Intensität für p- und s-Polarisation, wenn Licht aus dem dünneren Medium in das dichtere eintritt.



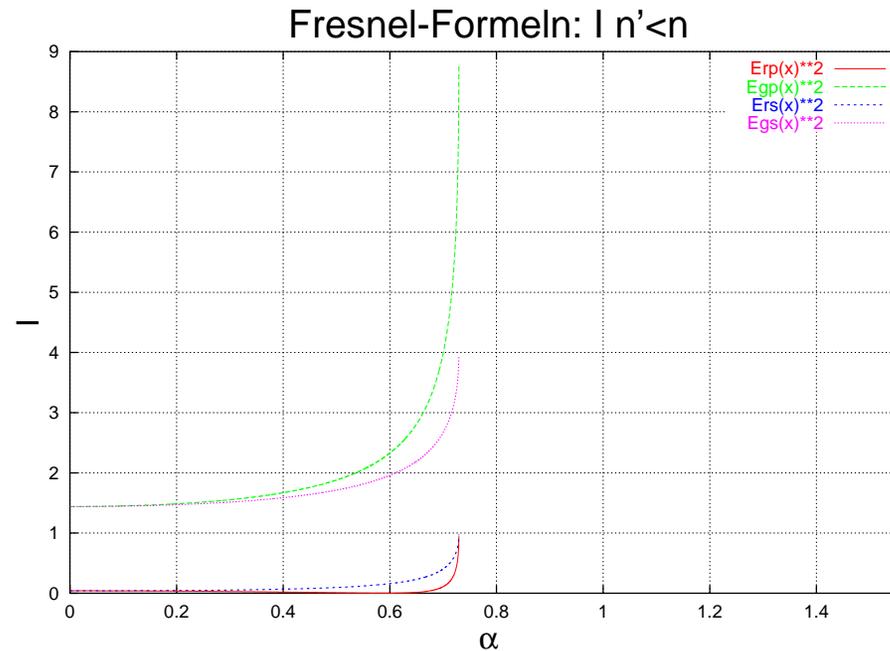
Fresnelsche Formeln VII



Verlauf der Amplitude des elektrischen Feldes für p- und s-Polarisation, wenn Licht aus dem dichteren Medium in das dünnere eintritt.



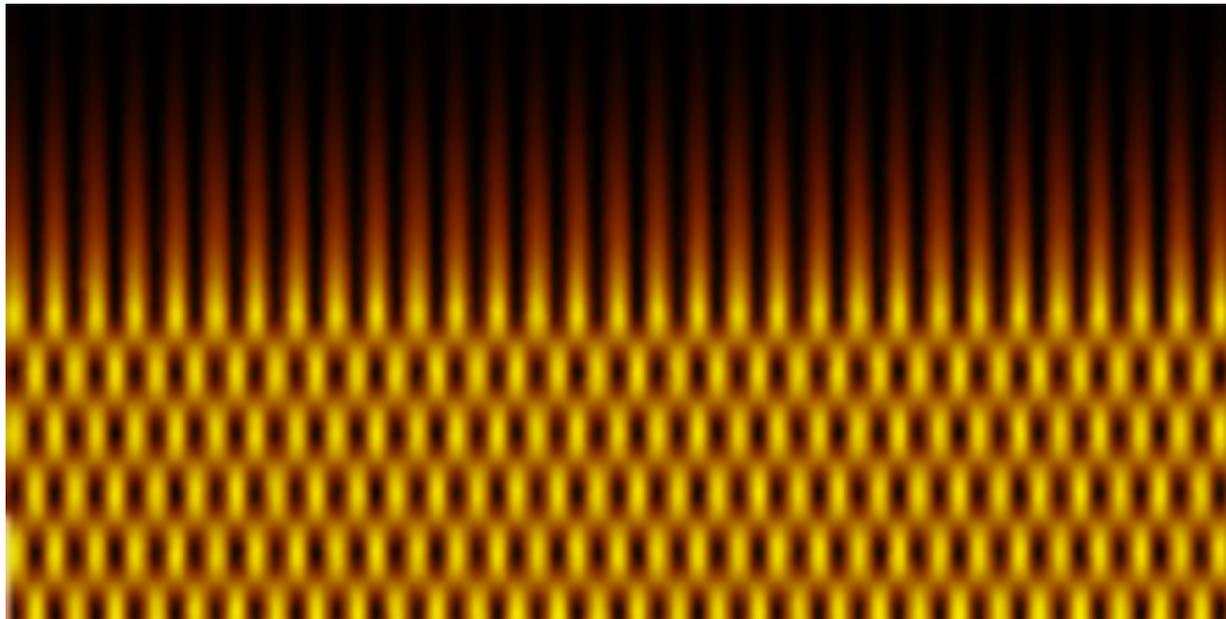
Fresnelsche Formeln VIII



Verlauf der Intensität für p- und s-Polarisation, wenn Licht aus dem dichteren Medium in das dünnere eintritt.

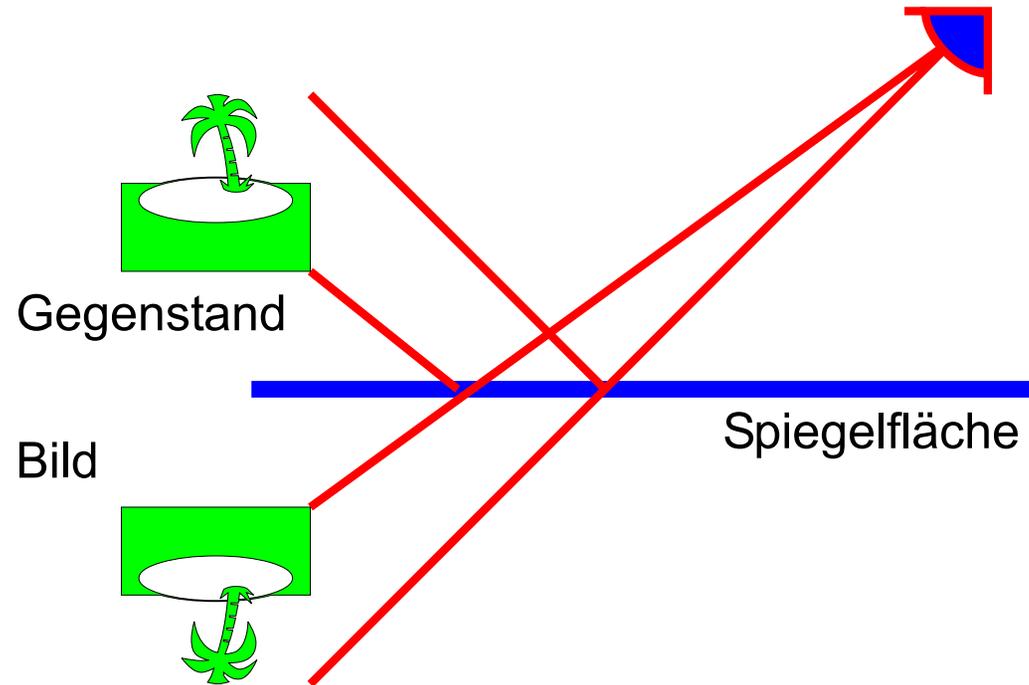


Evaneszente Wellen



Momentaufnahme der Interferenz einer total reflektierten Welle mit sich selber sowie der evaneszenten Wellen

Ebene Spiegel



Ebener Spiegel