Übungsblatt 4
Grundkurs IIIa für Physiker

Othmar Marti, (othmar.marti@physik.uni-ulm.de)

3. 6. 2002

1 Aufgaben für die Übungsstunden

Reflexion[1], Brechung[2], Fermatsches Prinzip[3], Polarisation[4], Fresnelsche Formeln[5], Geometrische Optik[6], PDF-Datei[7]

1. Ein Lichtstrahl entlang der optischen Achse (hier die x-Achse) kann an jedem x-Punkt durch den Abstand r von der x-Achse und seine Steigung in dem Punkt charakterisiert werden.
   Wir haben also

   $$X(x) = \begin{pmatrix} r(x) \\ \frac{dr(x)}{dx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(x) \\ a(x) \end{pmatrix}$$

   Wenn wir die Position des Lichtstrahls an einem Punkt x' betrachten wollen, dann können wir schreiben:

   $$X(x') = \begin{pmatrix} 1 & x' - x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X(x) = TX(x)$$

   Die Matrix T nennen wir die Transformationsmatrix.

   (a) Berechnen sie die Transformationsmatrix für einen ebenen metallischen Spiegel, der senkrecht zur optischen Achse steht.

[1] ../../node10.html
[2] ../../node11.html
[3] ../../node12.html
[4] ../../node13.html
[5] ../../node14.html
[6] ../../node15.html
[7] Uebungsblatt4.pdf

(b) Berechnen sie die Transformationsmatrix für Reflexion einer ebenen, senkrecht zur optischen Achse stehenden dielektrischen Platte mit dem Brechungsindex n.

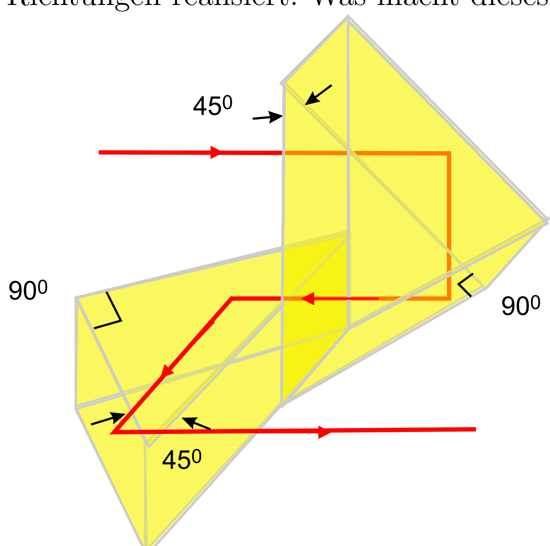
(c) Berechnen sie die Transformationsmatrix für Transmission einer ebenen, senkrecht zur optischen Achse stehenden dielektrischen Platte mit dem Brechungsindex n und der Dicke d.

(d) Berechnen Sie die Transformationsmatrix für einen konkaven sphärischen Spiegel in paraxialer Näherung.

(e) Berechnen Sie die Transformationsmatrix für einen konvexen sphärischen Spiegel in paraxialer Näherung.

2. Zeichnen Sie das Bild eines Objektes AB, das durch zwei Spiegel M_1 und M_2 erzeugt wird, die im Winkel von 90^0 zueinander stehen. Untersuchen Sie einmal den Fall, in dem AB senkrecht zu der gemeinsamen Kante ist, und einmal den Fall, in dem AB parallel zu dieser Kante ist.

3. Das Prisma von Porro ist ein System aus zwei totalreflektierenden Prismen, das die unter 1. beschriebene Abbildung über zwei zueinander senkrechte Richtungen realisiert. Was macht dieses System interessant?



4. Der sphärische Spiegel als Autorückspiegel. Welches sind die Eigenschaften eines sphärischen Spiegels, der von einem $10m$ vom Scheitelpunkt entfernten Objekt ein aufrechtes, 10-fach verkleinertes Bild erzeugt? Veranschaulichen Sie das Problem geometrisch!

2 Hausaufgabe

5. Untersuchung des sphärischen Spiegels auf der Grundlage des Fermatschen Prinzips. Geben Sie einen Ausdruck für die optische Weglänge $L(A_G A_B)$ zwischen zwei konjugierten Punkten A_G (Gegenstand) und A_B (Bild) nach Reflexion an einem sphärischen Spiegel mit Radius R an. Leiten Sie die Abbildungsgleichung mit Ursprung im Scheitelpunkt ab!

6. Gesichtsfeld eines Autorückspiegels

   Ein Rückspiegel besteht aus einem konvexen Spiegel, der durch einen Rand mit 4 cm Radius begrenzt ist. Seine Brennweite hat den Absolutwert 50 cm. Das Auge befindet sich auf der optischen Achse in l m Entfernung vom Spiegel.

   Berechnen Sie den Radius r des kreisförmigen sichtbaren Teils der Ebene, die senkrecht zu der optischen Achse und 100 m vom Spiegel entfernt ist. Vergleichen Sie dieses Gesichtsfeld mit dem eines ebenen Spiegels mit gleichem Radius!

3 Lösungen Aufgaben für die Übungsstunde

1. (a) Ein Metallspiegel ändert die Steigung, aber nicht den Abstand von der Achse

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   (b) Die Amplitude bei der Reflexion an einer dielektrischen Schicht muss mit den Fresnelschen Formeln berechnet werden. Für die Transformationsmatrix gibt es jedoch keine Auswirkungen. Also ist

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   (c) Bei der Transmission muss das Snelliussche Gesetz in der Matrixschreibweise angegeben werden.
   Es ist $n_1 \sin\alpha_1 = n_2 \sin\alpha_2$.
   Die Steigung ist $r' = dr/dx = \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$
   Aufgelöst nach $\sin\alpha$ bekommt man $\sin\alpha = \frac{r'}{\sqrt{1+r'^2}}$
   Also $n_1 \frac{r'_1}{\sqrt{1+r'^2_1}} = n_2 \frac{r'_2}{\sqrt{1+r'^2_2}}$
   Wenn $r'_1 \ll 1$ und $r'_2 \ll 1$ dann gilt: $n_1 r'_1 = n_2 r'_2$
   Die Matrix ist

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n_1/n_2 \end{pmatrix}$$

   Insgesamt bekommt man mit $n_1 = 1$

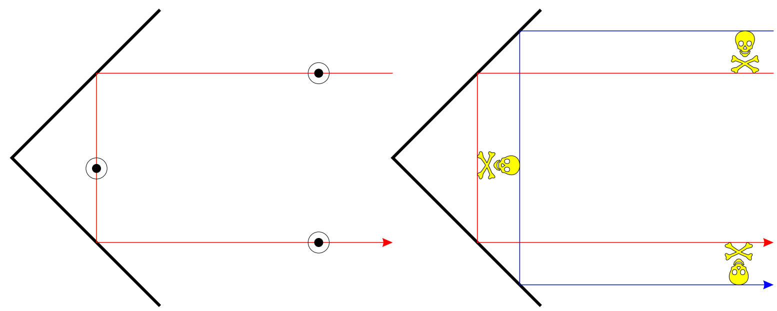
$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/n_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & d/n_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   (d) Das Abbildungsgesetz ist $1/f = 2/R = 1/g + 1/b$
   Die Steigung ist $r'_1 = r/g$ und $r'_2 = r/b$
   Eingesetzt bekommt man $r'_1/r + r'_2/r = 1/f$ oder $r'_1 + r'_2 = r/f$
   Damit auch $r'_2 = r/f - r'_1$
   Die Matrix wird

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/f & -1 \end{pmatrix}$$

   (e) Das Resultat ist das gleiche wie bei der vorherigen Aufgabe, aber **Vorzeichen beachten**.

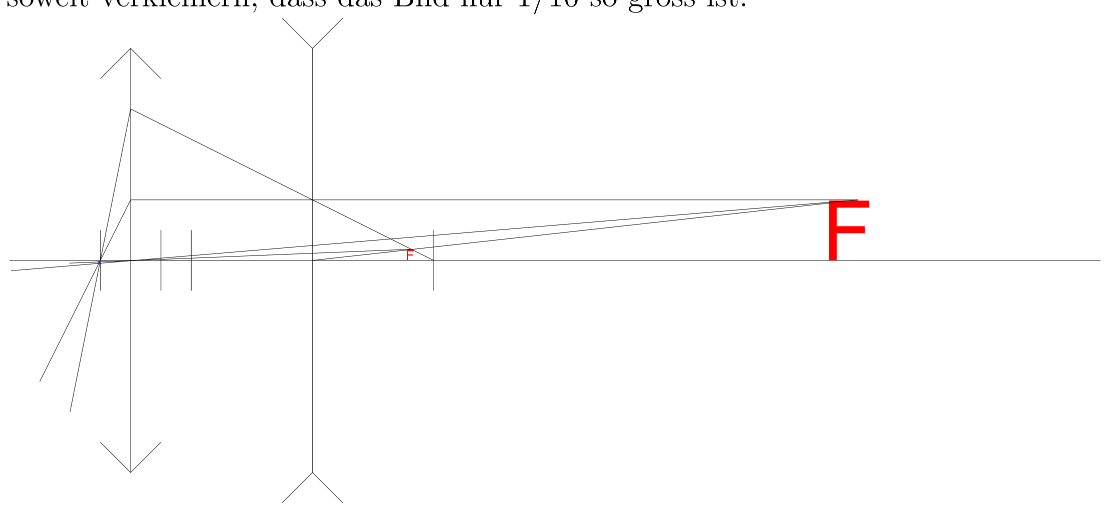
2. • Die beiden Aufgaben sind in der Zeichnung gelöst:

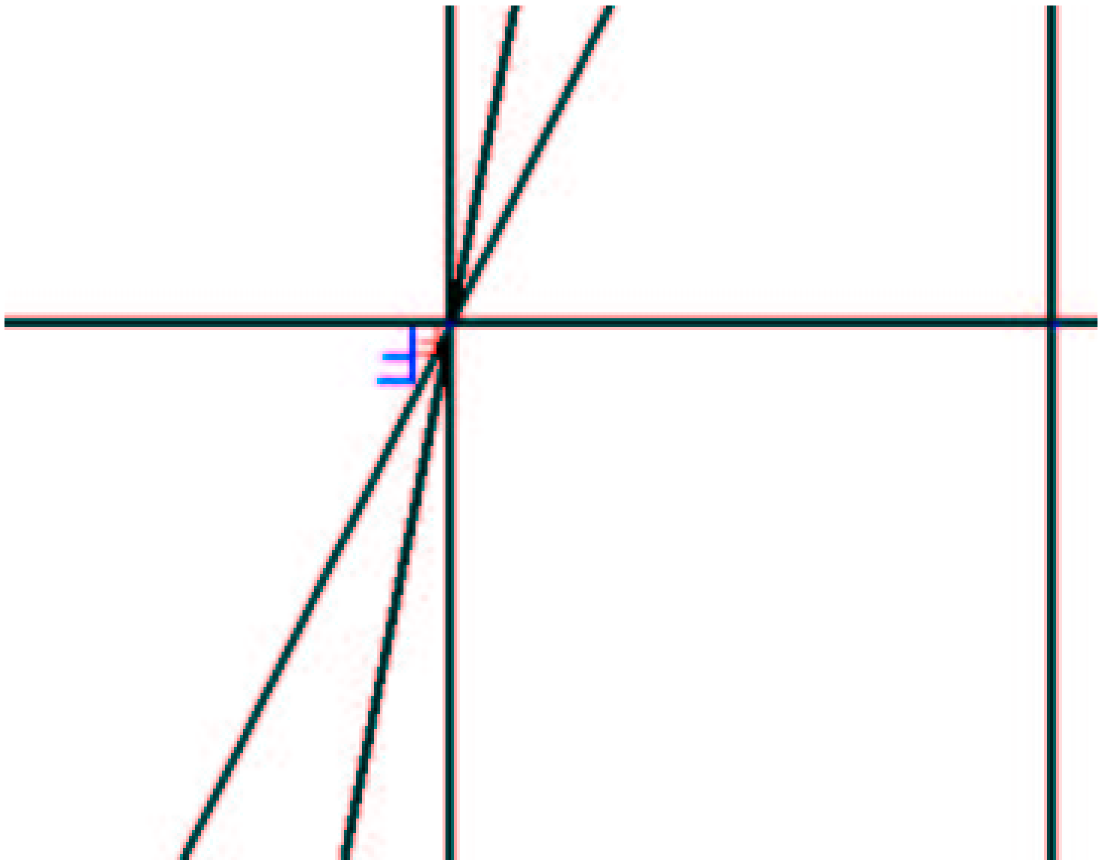


-
- Links ist die Orientierung parallel zur Kante gezeigt. Diese Orientierung ändert sich nicht.
- Rechts ist das Objekt senkrecht zur Kante orientiert. Nach der Reflexion ist das Objekt von oben nach unten gespiegelt.
- In beiden Fällen ist das resultierende Objekt parallel zum ursprünglichen.

3. Das Porro-Prisma besteht aus zwei Spiegeln nach der Aufgabe 2. Die gemeinsame Kante der Spiegel steht senkrecht aufeinander. Deshalb werden alle Objekte um π gedreht. Zusammen mit einem Galilei-Fernrohr erhält man ein aufrechtes Bild. Zudem wird die optische Achse verschoben.
   Anwendung: Ferngläser.

4. Wir betrachten das Problem auf einer optischen Achse.
   Die Abbildungsgleichung lautet $1/f = 1/b + 1/g$
   Der Abbildungsmassstab ist $V = -b/g = -f/(g - f)$
   Der konvexe Spiegel muss den Gegenstand näher an das Auge bringen und soweit verkleinern, dass das Bild nur 1/10 so gross ist.





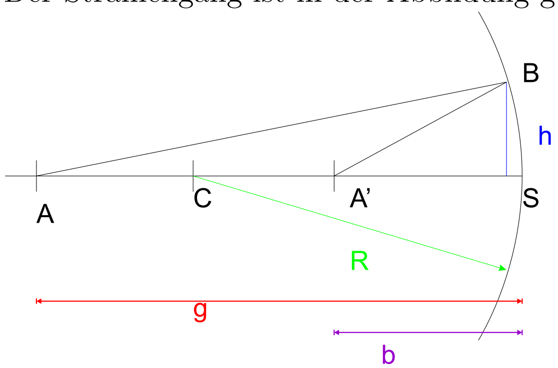
Wenn d der Abstand vom Spiegel zum Auge ist, f_1 die Brennweite des Auges, f_2 die Brennweite des Konvexspiegels, $g = 10m$ die Gegenstandsweite. Ohne Spiegel ist die Vergrösserung $V_o = -\frac{f_1}{d+g-f_1}$
Mit Spiegel ist das Bild (= 2. Objekt) bei $b_1 = f_2 g/(f_2 + g)$ und seine Vergrösserung. $V_k = -\frac{f_2}{g-f_2}$. Dieses Bild ist für das Auge der Gegenstand, mit einer Gegenstandsweite $d - b_1$. Also ist die Vergrösserung $V_A = -\frac{f_1}{d-b_1-f_1}$
Die Gesamtvergrösserung mit Spiegel ist $V_s = V_k V_A = \frac{f_2}{g-f_2}\frac{f_1}{d-b_1-f_1}$ $(f_2 < 0!)$
Wir setzen $A < 1$ als den Vergrösserungsfaktor. Die Brennweite f_2 ist dann

$$f_2 = -\frac{g(d-f)}{(g+d-f)(1/A-1)}$$

Wir erhalten mit $d = 1m$ und $f_1 = 5mm$ $f_2 = -100.5507554$.

4 Lösungen Hausaufgabe

5. • Der Strahlengang ist in der Abbildung gezeichnet.



- Es ist $\overline{CX} = \sqrt{R^2 - h^2}$
- $\overline{AX} = g - R + \sqrt{R^2 - h^2}$
- $\overline{AB} = \sqrt{h^2 + \overline{AX}^2} = \sqrt{h^2 + \left(g - R + \sqrt{R^2 - h^2}\right)^2}$
- $\overline{A'X} = b - R + \sqrt{R^2 - h^2}$
- $\overline{A'B} = \sqrt{h^2 + \overline{A'X}^2} = \sqrt{h^2 + \left(b - R + \sqrt{R^2 - h^2}\right)^2}$
- die gesamte Pfadlänge ist

$$s(h) = \sqrt{h^2 + \left(g - R + \sqrt{R^2 - h^2}\right)^2} + \sqrt{h^2 + \left(b - R + \sqrt{R^2 - h^2}\right)^2}$$

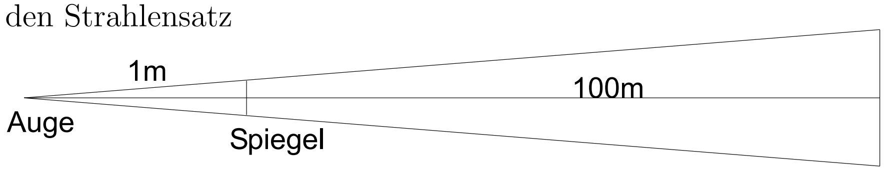
- wir linearisieren (paraxiale Näherung, $h \ll R$)
- $\sqrt{R^2 - h^2} = R\sqrt{1 - (h/R)^2} \approx R\left(1 - \frac{h^2}{2R^2}\right)$
- $\left(b - R + \sqrt{R^2 - h^2}\right) \approx \left(b - R + R - \frac{h^2}{2R}\right) = \left(b - \frac{h^2}{2R}\right)$
- $\left(g - R + \sqrt{R^2 - h^2}\right) \approx \left(g - R + R - \frac{h^2}{2R}\right) = \left(g - \frac{h^2}{2R}\right)$
- $\left(b - \frac{h^2}{2R}\right)^2 \approx b^2 - b\frac{h^2}{R}$
- $\left(g - \frac{h^2}{2R}\right)^2 \approx g^2 - g\frac{h^2}{R}$
- $\sqrt{h^2 + \left(b - R + \sqrt{R^2 - h^2}\right)^2} = \sqrt{h^2 + b^2 - \frac{b}{R}h^2} = \sqrt{b^2 + h^2\left(1 - \frac{b}{R}\right)}$
  $= b\sqrt{1 + h^2\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{bR}\right)} \approx b\left(1 + \frac{h^2}{2}\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{bR}\right)\right)$
- $\sqrt{h^2 + \left(g - R + \sqrt{R^2 - h^2}\right)^2} = \sqrt{h^2 + g^2 - \frac{g}{R}h^2} = \sqrt{g^2 + h^2\left(1 - \frac{g}{R}\right)}$
  $= g\sqrt{1 + h^2\left(\frac{1}{g^2} - \frac{1}{gR}\right)} \approx g\left(1 + \frac{h^2}{2}\left(\frac{1}{g^2} - \frac{1}{gR}\right)\right)$
- $s(h) \approx g\left(1 + \frac{h^2}{2}\left(\frac{1}{g^2} - \frac{1}{gR}\right)\right) + b\left(1 + \frac{h^2}{2}\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{bR}\right)\right)$

- Es muss $\frac{ds(h)}{dh} = 0$ sein
- $0 = hg\left(\frac{1}{g^2} - \frac{1}{gR}\right) + hb\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{bR}\right) = h\left[\frac{1}{g} - \frac{1}{R} + \frac{1}{b} - \frac{1}{R}\right] = h\left[\frac{1}{g} + \frac{1}{b} - \frac{2}{R}\right]$
- Wir haben die triviale Lösung: $h = 0$ oder

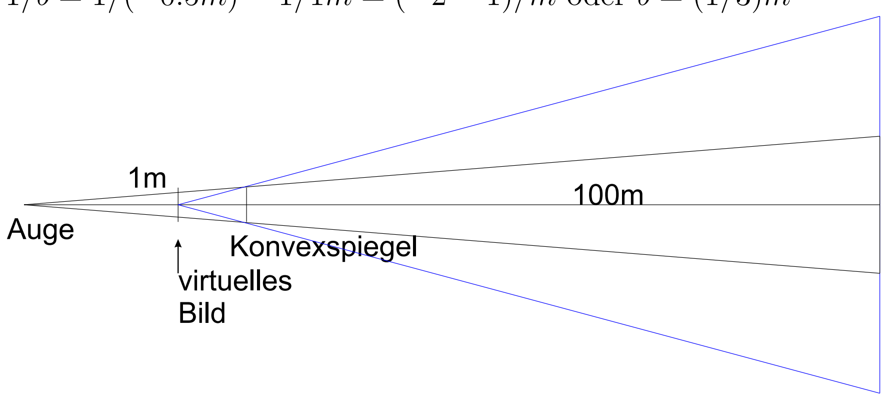
$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} - \frac{2}{R} = 0$$

  Das Abbildungsgesetz

6. - Für den ebenen Spiegel mit dem Durchmesser $d = 4cm$ benützen wir den Strahlensatz



- $\frac{d}{1m} = \frac{d(100m)}{101m}$, also $d(101m) = 101m\frac{d}{1m} = 4.04m$
- Beim Konvexspiegel scheinen alle Strahlen vom Bildpunkt auszugehen.
- Mit $1/f = 1/g + 1/b$ und $f = -0.5m$ und $g = 1m$ erhalten wir $1/b = 1/(-0.5m) - 1/1m = (-2-1)/m$ oder $b = (1/3)m$



- Wir wenden den Strahlensatz an und erhalten $\frac{d}{(1/3)m} = \frac{d(100m)}{(100+1/3)m}$, also $d(100m+(1/3)m) = 100.333m\frac{d}{0.333m} = 12.04m$

