

Übungsblatt 6

Grundkurs IIIa für Physiker

Othmar Marti, (othmar.marti@physik.uni-ulm.de)

8. 7. 2002

1 Aufgaben für die Übungsstunden

Interferenz und Beugung¹, PDF-Datei²

1. Im zentralen Beugungsmaximum eines Doppelspaltmusters seien bei einer bestimmten Wellenlänge 17 Beugungsstreifen zu sehen. Wieviele Interferenzstreifen sind im ersten Nebenmaximum des Beugungsmusters enthalten?
2. Das Jaminische Interferometer dient zur Messung oder zum Vergleich der Brechzahlen von fluiden Medien. Ein Strahl aus monochromatischem Licht wird in zwei Teilstrahlen aufgespalten. Die beiden Teilstrahlen werden getrennt entlang der Achsen zweier zylindrischer Röhren geführt. Nach dem Durchgang durch die Röhren werden die beiden Strahlen wieder zu einem Strahl vereint, der durch ein Teleskop betrachtet wird. Nehmen Sie an, daß jede Röhre 0.4m lang ist und Natriumlicht der Wellenlänge 589 nm verwendet wird. Beide Röhren seien anfangs evakuiert, und im Mittelpunkt des Betrachtungsfeldes beobachtet man konstruktive Interferenz beider Strahlen. Flutet man eine der beiden Röhren langsam mit Luft, so wechselt der Mittelpunkt des Betrachtungsfeldes 198-mal von hell nach dunkel und zurück,
 - (a) Wie groß ist die Brechzahl der Luft?
 - (b) Angenommen, die Streifen lassen sich auf ± 0.25 Streifen genau zählen (ein Streifen entspricht einer vollen Periode der Intensitätsänderung). Wie genau läßt sich dann die Brechzahl der Luft mit diesem Experiment bestimmen?

¹.././node27.html

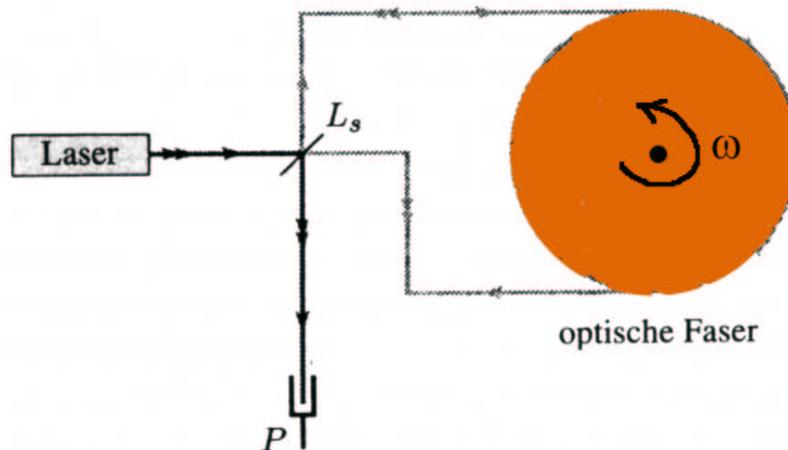
²Uebungsblatt6.pdf

3. Sagnacsches Glasfaserinterferometer

1913 konstruierte der französische Physiker H. Sagnac ein Interferometer mit Hilfe von 4 Spiegeln, die er in den Ecken eines Quadrates anordnete, und bewirkte damit die Interferenz zweier entgegengesetzt laufender Wellen. Heute wird das Spiegelsystem durch eine Glasfaser der Länge ℓ , die auf einen Zylinder aufgerollt wird, ersetzt. In beide Enden der Faser wird mittels eines halbdurchlässigen Spiegels Licht eines Lasers eingeführt (Siehe Abbildung).

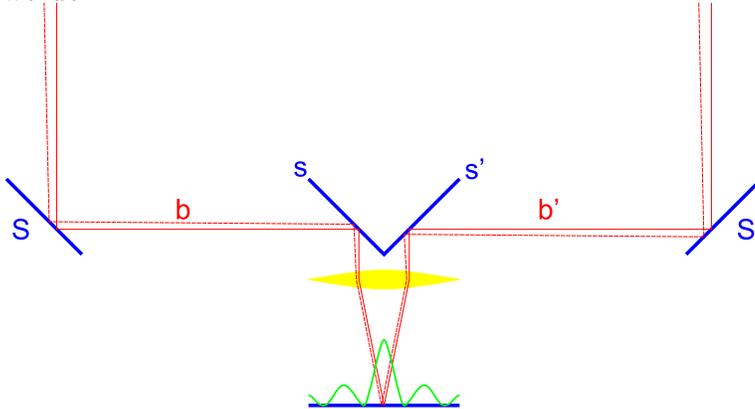
Durch eine geringe Asymmetrie in der Faser werden auf dem Detektor Interferenzerscheinungen der beiden Wellen registriert. Ein solches System (Faser, Laser und Detektor), das auf einen Körper S montiert wird, der gleichförmig um eine Achse rotiert, die senkrecht zu der Faserebene ist, erlaubt die Messung der Winkelgeschwindigkeit ω von S .

- Berechnen Sie im Rahmen der Newtonschen Näherung der Addition von Geschwindigkeiten die Zeiten t_+ und t_- , die das Licht für einen vollständigen Durchlauf der Faser in und entgegen der Rotationsrichtung von S benötigt. Leiten Sie daraus den Unterschied in der optischen Weglänge \overline{AL} als Funktion des Radius des Zylinders und von ω ab, der aufgrund der Rotation auftritt.
- Man hat in einem Sagnacschen Interferometer eine Verschiebung der Interferenzstreifen um ein Zehntel des Streifenabstandes gemessen. Die Länge betrug hier $\ell = 250m$, der Radius $R = 10cm$, und der Laser erzeugte ein Bündel infraroten Lichtes der Vakuumwellenlänge $\lambda = 830nm$. Bestimmen Sie die Winkelgeschwindigkeit ω .



- Mit dem Michelsonschen Sterninterferometer können die Durchmesser von Sternen oder der Abstand von Doppelsternen gemessen werden. Wir be-

trachten ein Doppelsternsystem, dessen Komponenten im Winkel α gesehen werden.



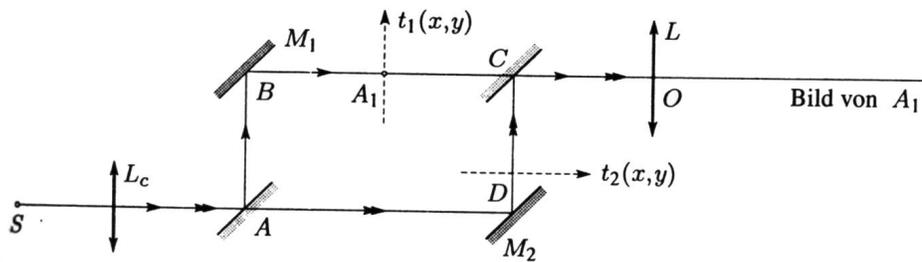
Berechnen Sie die Interferenzstreifen für die erste Komponente für eine bestimmte Wellenlänge. Berechnen Sie dann die Interferenzstreifen für die zweite Komponente. Wie liegen diese gegeneinander?

2 Hausaufgabe

5. Mach-Zehnder-Interferometer

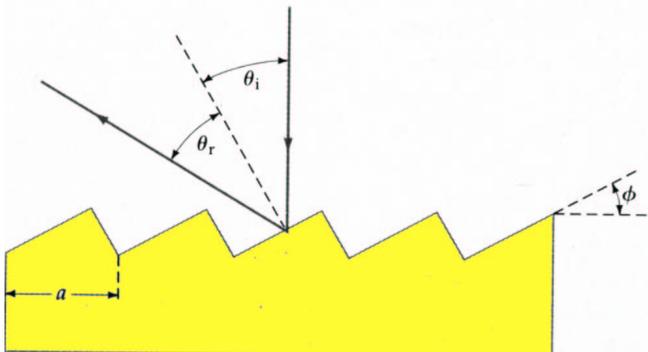
Das Mach-Zehnder-Interferometer ist in der Abbildung unten dargestellt: Die Spiegel M_1 und M_2 sind totalreflektierend, und A und C sind halbdurchlässige Strahlteiler. Es gilt $\overline{AB} = \overline{CD} = 3\ell/2$ und $\overline{BC} = \overline{AD} = 2\ell$. Das Interferometer wird von einer Punktquelle, die sich im objektseitigen Brennpunkt einer dünnen konvergenten Linse L_c befindetet, mit monochromatischem Licht der Wellenlänge $\lambda = 0,5\mu\text{m}$ beleuchtet.

- In der Mitte der Strecke \overline{BC} wird eine Blende D_1 mit der Durchlässigkeit $t_1(x, y)$ und in einem Abstand ℓ zum Strahlteiler C eine Blende D_2 der Durchlässigkeit $t_2(x, y)$ in die Strecke \overline{CD} eingeführt. Im Abstand ℓ hinter C ist eine weitere Linse der bildseitigen Brennweite $f = \ell$ platziert. Zeigen Sie, daß dann in einer Ebene, die sich im Abstand 2ℓ hinter der Linse befindet, eine Intensitätsverteilung $t_1 + t_2$ zu beobachten ist!
- Wie dick muß eine planparallele Platte mit Brechungsindex 1.5 sein, die senkrecht in den Arm \overline{AD} geschoben wird, um eine Intensitätsverteilung $t_1 - t_2$ zu erhalten?



6. Bei einem Beugungsgitter, bei dem alle Flächen senkrecht auf der einfallenden Strahlung stehen, wird der Hauptteil der Energie in die 0. Ordnung gebeugt. Für spektroskopische Zwecke ist das sinnlos, da die Wellenzerlegung bei Ordnungen größer als null auftritt. Deshalb haben moderne Gitter eine bestimmte Oberflächenform ("blaze"), wie in der Abbildung gezeigt. Dadurch wird die Reflexion, die die meiste Energie enthält, zu höheren Ordnungen verschoben,

- Berechnen Sie den Blazewinkel (ϕ) als Funktion von a (Abstand der Rillen), λ und der Ordnung m .
- Berechnen Sie den Blazewinkel für die Reflexion in die 2. Ordnung für Licht der Wellenlänge 450nm , das auf ein Gitter mit 10000 Linien pro Zentimeter fällt.



3 Lösungen Aufgaben für die Übungsstunde

1. (a) Die 17 Streifen im zentralen Beugungsmaximum entsprechen 8 Streifen auf jeder Seite und einem Streifen in der Mitte. Also ist $d/a = 9$. Das erste Beugungsminimum tritt bei $\Theta_1 = \lambda/a$ auf, das zweite bei $(\Theta_2 = 2\lambda/a$, so daß das Nebenmaximum der Beugung zwischen den Winkeln Θ_1 und Θ_2 liegt.
Andererseits liegen die Interferenzmaxima bei den Winkeln $\Theta = m\lambda/d = m\lambda/(9a)$. Daher liegt das Maximum mit $m = 9$ bei Θ_1 , und das Maximum mit $m = 18$ liegt bei Θ_2 . Diese Maxima sind nicht zu beobachten, weil das Beugungsmuster hier die Intensität null hat. Jedoch sind die Streifen für $m = 10$ bis $m = 17$ im Nebenmaximum der Beugung sichtbar. Somit sind dort 8 helle Streifen zu sehen.
2.
 - Aus den gegebenen Angaben schliessen wir, dass das Einleiten von Luft in die Röhre der Länge ℓ die Anzahl der Wellenlängen in dieser Distanz um 198 ändert. Ist vor dem Einleiten von Luft $\ell = N\lambda$, so gilt nach dem Belüften $\ell = (N + 198)\lambda/n$.
Daraus folgt $n = \frac{N+198}{\ell}\lambda = (\ell/\lambda + 198)\lambda/\ell = 1 + 198\lambda/\ell = 1.000292$
 - Wenn die Genauigkeit ± 0.25 Streifen beträgt, liegt die Brechzahl zwischen 1.00029192 und 1.00029119. Der Fehler ist also $7.29 \cdot 10^{-5}\%$.
3. (a) Da die Geschwindigkeiten v_+ und v_- im Rahmen der Newtonschen Theorie $v_+ = c + R\omega$ und $v_- = c - R\omega$ sind, erhalten wir

$$t_+ = \frac{\ell}{c+R\omega} \text{ und } t_- = \frac{\ell}{c-R\omega}.$$
 Daraus folgt:

$$\Delta L = c(t_- - t_+) = c\ell \left(\frac{2R\omega}{c^2 - R^2\omega^2} \right) \approx \frac{2\omega\ell R}{c} \text{ und } \frac{\Delta L}{\lambda} = \frac{2\omega\ell R}{c\lambda}$$
- (b) Die vorhergehende Gleichung gibt mit $\Delta\tilde{L} = \alpha\Delta L = 0.1 \cdot \Delta L = 0.1 \cdot \lambda$:

$$\omega = \alpha \frac{c\Delta L}{2\ell R} = 0.1 \cdot \frac{3 \cdot 10^8 \cdot 830 \cdot 10^{-9}}{2 \cdot 0.1 \cdot 250} = 0.5 \text{ rad/s}$$
4. Dieser Lösungsweg folgt: A. Sommerfeld, Theoretische Physik IV, Optik, Seiten 262-264, Verlag Harri Deutsch.
 - Für einen einzelnen Stern ergibt sich das Beugungsmuster aus der Beugung an der Linse mit dem Durchmesser $2a$ oder den Spiegeln S oder s . Wenn die dominierende Länge ℓ ist, ist das Beugungsmuster durch $\hat{P}(r) = \frac{D\lambda d_b}{2r} J_1 \left(\frac{\pi r D}{\lambda d_b} \right)$
Das gleiche gilt für das Licht, das über den Weg S' und s' die Bildebene erreicht. Da das Licht aus der selben Quelle wie bei der vorherigen Betrachtung stammt, verdoppelt sich die Amplituden, wenn die Spiegelanordnung vollkommen symmetrisch wäre. Es tritt aber noch ein System von geradlinigen äquidistanten Interferenzstreifen hinzu von derselben Art, wie sie vom MICHELSON-Versuch her bekannt sind

(Streifen gleichen Gangunterschiedes). Sie entstehen, weil die beiden Spiegel S, S' niemals genau symmetrisch zur Fernrohrachse und auch nie genau unter $\pi/4$ gegen sie geneigt sind. Deshalb ist in der Abbildung der Abstand $\overline{S's'}$ mit b' bezeichnet, zum Unterschied von $\overline{Ss} = b$. Die Lage des Streifensystems hängt dann, wie wir kurz sagen können, von der Größe $(b - b')/\lambda$ ab.

Je nachdem dieses Verhältnis (für ein gegebenes λ und für eine gewisse Stelle des Parallelstrahlenbündels zwischen S, s und S', s') ganz- oder halbzahlig ist, haben wir einen hellen oder dunklen Streifen.

- Betrachten wir jetzt die Komponente 2 des Doppelsternes. Auch diese liefert auf beiden Lichtwegen Beugungsbilder derselben Art wie die Komponente 1, bestehend aus einem Zentralfleck, Beugungsringen und Interferenzstreifen. Erstere haben dieselbe Lage wie bei der Komponente 1, da ja der Querschnitt der Strahlenbündel bzw. der Objektivdurchmesser $2a$ zur Auflösung des Doppelsternes nicht ausreichen sollte. Zentralfleck und Beugungsringe überlagern sich mit denen von 1 (natürlich der Intensität nach, wegen der Verschiedenheit der Lichtquellen). Aber das Streifensystem hat hier eine andere Lage wie bei der Komponente 1. Der Gangunterschied rührt nämlich jetzt nicht nur von der Spiegelstellung, sondern auch von der verschiedenen Einfallsrichtung des Sternenlichtes 2 her. Durch letztere entsteht ein Gangunterschied von der Größe

$$\frac{b + b'}{\lambda} \delta \sin \alpha_0$$

- Die beiden Streifensysteme fallen also im allgemeinen nicht zusammen. Sie sind um den oben angegebenen Betrag gegeneinander verschoben.
- Die Spiegel S, S' sind auf einem festen Stativ montiert und können auf diesem parallel zu sich gegeneinander verschoben werden, wobei die Abstandssumme $B = b + b'$ und daher auch der Streifenabstand geändert wird. Bei einem gewissen Werte $B = B_n$ mögen die beiden Streifensysteme sich decken, was einem Gangunterschied von n Wellenlängen entsprechen möge. Wir haben dann

$$\frac{B_n}{\lambda} \delta \sin \alpha_0 = n$$

- Werden die Spiegel weiter verschoben, dann möge die nächste Streifenkoinzidenz für $B = B_{n+1}$ eintreten; dann wird

$$\frac{B_{n+1}}{\lambda} \delta \sin \alpha_0 = n + 1$$

- Durch Subtraktion beider Gleichungen mit $\Delta B = B_{n+1}B$ erhält man

$$\frac{\Delta B}{\lambda} \delta \sin \alpha_0 = 1$$

- oder

$$\delta \sin \alpha_0 = \frac{\lambda}{\Delta B}$$

- ΔB lässt sich genau messen; für λ , muß man natürlich eine mittlere Wellenlänge einsetzen. Dank dem vergrößerten Maßstabe B des Interferenzphänomens läßt sich das Vorhandensein eines Doppelsternes auch bei ungenügendem Auflösungsvermögen des Beobachtungsfernrohres konstatieren und der Winkelunterschied seiner beiden Komponenten messen.
- Dasselbe Verfahren überträgt sich nun aber auch auf einen einzelnen Fixstern ungewöhnlicher Ausdehnung, der ja in der Spiegelapparatur nicht mehr punktförmig, sondern als kleines Scheibchen wirkt. In Betracht kommen hier die sogenannten roten Riesen (niedrige Temperatur, daher rote Farbe, trotzdem große Helligkeit wegen ungeheurer Leuchtfläche), vgl. die unten folgenden Beispiele. Wir können uns ja ein solches Scheibchen in ein rechtes, ein linkes und ein mittleres Drittel geteilt denken und können die beiden äußeren Drittel mit unserem Doppelstern vergleichen; das Licht des mittleren Drittels wird zwar die Kontraste der zum rechten und linken Drittel gehörenden Interferenzstreifen abschwächen, aber nicht auslöschen. Das Studium der Streifenkoinzidenzen im Sinne der letzten Gleichung führt zu einer Abschätzung des Winkelabstandes der beiden Randpartien. MICHELSON fand hierfür in Gradmaß

Beteigeuze	0.047''
Antares	0.040''
Arcturnus	0.022''

- Da die Entfernung dieser Sterne vom Sonnensystem (ihre Parallaxe) anderweitig bekannt ist, kann man hieraus ihren Durchmesser im Längenmaß berechnen. Er ergibt sich von der Ordnung 10^8 km, d. h. etwa hundertmal größer als der Durchmesser unserer Sonne, ungefähr gleich dem Durchmesser unserer Erdbahn!

4 Lösungen Hausaufgabe

5. Mach-Zehnder-Interferometer

- (a) Da die Wege entlang $SABC$ bzw. $SADC$ in Abwesenheit der Blende gleich lang sind, bleiben die von L_c kommenden ebenen Wellen am Ausgang C in Phase.

Die Linse L erzeugt ein umgekehrtes Bild von \mathcal{D}_1 gleicher Größe, da die Abstände des Objektes bzw. des Bildes zum Zentrum O von L $2f$ betragen. Das gleiche gilt für die Blende \mathcal{D}_2 , deren Bild in der Beobachtungsebene erzeugt wird. Es folgt daraus, daß in dieser Ebene die Intensitätsverteilung proportional zu $t - 1 + t_2$ ist.

- (b) Führt man ein Plättchen in die Strecke AD ein, beträgt die zusätzliche Phasendifferenz $\Delta\Phi = 2\pi(nl)e/\lambda$. Für $\Delta\Phi = \pi$ weisen die beiden Wellen am Ausgang C entgegengesetzte Phasen auf: t_2 wird durch $t_2 \exp(i\pi) = -t_2$ ersetzt. Die Intensitätsverteilung ist nun proportional zu $t_1 - t_2$.

6. (a) Aus der Abbildung geht hervor, dass der reflektierte Strahl mit der einfallrichtung den Winkel 2ϕ bildet. Dieser Winkel soll nun einer bestimmten Ordnung m der Interferenz entsprechen. Also muss gelten: $\sin 2\phi = m\lambda$ beziehungsweise $\Phi = \frac{1}{2} \arcsin(m\lambda/a)$
- (b) Mit den in der Aufgabe gegebenen Werten folgt: $a = (10^{-2}m)/(10000) = 10^{-6}m$ und $\phi = 0.560rad$