Übungsblatt 01
Grundkurs IIIb für Physiker

Othmar Marti, (othmar.marti@physik.uni-ulm.de)

21. 10. 2002 oder 28. 10. 2002

1 Aufgaben für die Übungsstunden

1. Entlang der x-Achse von $x = 0$ bis $x = \ell$ sei die Ladung Q homogen verteilt. Berechnen Sie das elektrische Feld für einen Punkt $P = (\xi; 0; 0)$ auf der x-Achse mit $\xi > \ell$!

2. Berechnen Sie das elektrische Feld entlang der Mittelsenkrechten für die Ladungsverteilung in der Aufgabe 1

3. Berechnen Sie anhand des Resultates von Aufgabe 2 das elektrische Feld in der Nähe einer unendlich ausgedehnten Linienladungsverteilung.

4. Die Ladung q sei auf einem Kreisring mit Radius r homogen verteilt. Die Symmetrieachse des Kreisringes sei die x-Achse. Berechnen Sie auf der x-Achse das elektrische Feld.

5. Die Ladung q sei homogen auf einer Kreisscheibe mit dem Radius r verteilt. berechnen sie das elektrische Feld auf der Symmetrieachse.

6. Berechnen Sie mit dem Gaussschen Gesetz das elektrische Feld innerhalb und ausserhalb einer geladenen, unendlich ausgedehnten Zylinderfläche.

7. Berechnen Sie mit dem Gaussschen Gesetz das elektrische Feld innerhalb und ausserhalb eines homogen geladenen, unendlich ausgedehnten Zylinders.

2 Hausaufgaben

8. Betrachten sie zwei unendlich lange, konzentrische Zylindermantel. Der innere Mantel habe den Radius R_1 und trage die Oberflächenladungsdichte σ_1. der äussere Zylindermantel habe den Radius $R_2 > R_1$ und trage die Oberflächenladungsdichte σ_2.

(a) Verwenden Sie das Gausssche Gesetz, um das elektrische Feld in den Bereichen $r < R_1$, $R_1 < r < R_2$ und $R_2 < r$ zu berechnen.

(b) Wie müssen das Verhältnis σ_1/σ_2 und dessen Vorzeichen sein, damit das elektrische Feld für $r > R_2$ null ist.

(c) Skizieren sie in diesem Falle die elektrischen Feldlinien.

(d) Kennen Sie Bauelemente, die so aufgebaut sind?

9. Für das nach unten weisende elektrische Feld knapp oberhalb der Erdoberfläche wurde $150V/m$ gemessen. Welcher Gesamtladung der Erde entspräche dieser Wert?

10. Zwei gleiche homogene Linienladungen der Länge ℓ befinden sich im Abstand d voneinander auf der x-Achse.

    (a) Welche Kraft üben sie aufeinander aus?

    (b) Zeigen sie, dass für $d \gg \ell$ die oben berechnete Kraft in $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{(\lambda\ell)^2}{d^2}$ übergeht.

3 Lösungen Aufgaben für die Übungsstunde

1. • Ladungsdichte: $\gamma = \frac{Q}{\ell}$

 • Elektrisches Feld bei P: $dE_x(\xi, x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\lambda dx}{(\xi - x)^2}$

 • Integration $E_x(\xi) = \int\limits_0^\ell dE_x(\xi, x) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int\limits_0^\ell \frac{dx}{(\xi - x)^2}$

 • Variablentransformation $z = x - \xi \longrightarrow dz = dx$
 $0 \longrightarrow -\xi$
 $\ell \longrightarrow \ell - \xi$

 • $E_x(\xi) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int\limits_{-\xi}^{\ell-\xi}\frac{dz}{z^2} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\left(-\frac{1}{z}\right)_{-\xi}^{\ell-\xi}$
 $= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\left(-\frac{1}{\ell-\xi} - \left(-\frac{1}{-\xi}\right)\right) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{\ell - \xi - (-\xi)}{-\xi(\ell - \xi)}\right)$

 • $E_x(\xi) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\frac{\ell}{\xi(\xi - \ell)} = \frac{\ell\lambda}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\xi(\xi - \ell)}$

2. • Wir legen das Koordinationssystem so, dass die Ladungsverteilung von -$\frac{\ell}{2}$ bis $\frac{\ell}{2}$ reicht.

 • Aus Sysmmetriegründen existiert auf der Mittelsenkrechten keine Komponente in x-Richtung.

 • Wir betrachten die Komponente entlang y.

 • Am Punkt $P = (0; y; 0)$ ist $dE_y(y) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda dx}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}y$

 • Also $E_y(y) = \int\limits_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}}\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\frac{y}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}dx = \frac{\lambda y}{4\pi\epsilon_0}\int\limits_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}}\frac{dx}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$

 • Nach Bronstein ist $\int\frac{dx}{X^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{a^2\sqrt{X}}$ mit $X = x^2 + a^2$

 • also $E_y(y) = \frac{\lambda y}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{x}{y^2\sqrt{x^2 + y^2}}\right)_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 y}\left(\frac{\ell}{2\sqrt{\frac{\ell^2}{4} + y^2}} + \frac{\ell}{2\sqrt{\frac{\ell^2}{4} + y}}\right)$
 $= \frac{\lambda\ell}{4\pi\epsilon_0 y}\frac{1}{\sqrt{y^2 + \frac{\ell^2}{4}}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{y\sqrt{y^2 + \frac{\ell^2}{4}}}$

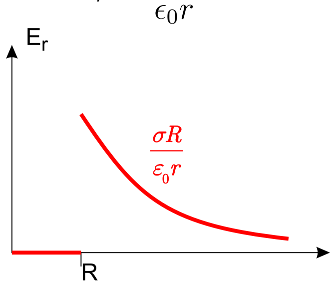
- für $y \gg \ell$ bekommt man $E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda\ell}{y^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 y^2}$

3.
- Wenn die Linienladung "unendlich" ausgedehnt ist, gilt $y \ll \ell$
- Dann ist $E_y \approx \frac{\lambda\ell}{4\pi\epsilon_0 y}\frac{1}{\sqrt{\frac{\ell^2}{4}}} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 y} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 \ell y}$

4.
- Ladungsdichte $\lambda = \frac{q}{2\pi r}$
- Abstand der Ladung vom Kreisring zum Punkt x :
  $d = \sqrt{r^2 + x^2}$
- x-Komponente von $\vec{E}$ (Aus Symmetriegründen sind die y - und z-Komponenten 0)
- $dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda r d\varphi}{\left(r^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}x$
  $$E_x = \frac{\lambda r}{4\pi\epsilon_0}\int\limits_0^{2\pi}\frac{x d\varphi}{\left(r^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2\pi\lambda r x}{4\pi\epsilon_0\left(r^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\lambda r x}{2\epsilon_0\left(r^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{q x}{4\pi\epsilon_0\left(r^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$
- Asymptote: für $x \gg r$ ist $E_x = \frac{\lambda r x}{2\epsilon_0 x^3} = \frac{\lambda r}{2\epsilon_0 x^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x^2}$

5.
- Flächenladungsdichte $\sigma = \frac{g}{\pi r^2}$
- Wie in Aufgabe 4:
  $dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\sigma\hat{r}d\hat{r}d\varphi}{\left(\hat{r}^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}x$
- $E_x = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{r}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\sigma\hat{r}x\ d\hat{r}d\varphi}{\left(\hat{r}^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sigma x}{4\pi\epsilon_0}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{r}\frac{\hat{r}d\hat{r}d\varphi}{\left(\hat{r}^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0}\int\limits_0^{r}\frac{\hat{r}d\hat{r}}{\left(\hat{r}^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$
- Nach Bronstein ist $\int\frac{rdr}{\sqrt{\left(r^2+x^2\right)^3}} = -\frac{1}{\sqrt{r^2+x^2}}$
- Also $E_x = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0}\left(-\frac{1}{\sqrt{\hat{r}^2+x^2}}\right)\Bigg|_0^r = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0}\left(-\frac{1}{\sqrt{r^2+x^2}} + \frac{1}{x}\right)$
  $= -\frac{\sigma x}{2\epsilon_0}\frac{x-\sqrt{r^2+x^2}}{x\sqrt{r^2+x^2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\frac{\sqrt{r^2+x^2}-x}{\sqrt{r^2+x^2}}$
- Für $x \gg r$ ist
  $\sqrt{r^2+x^2} - x = x\left(\sqrt{1+\frac{r^2}{x^2}}\right) - x = x\left(1+\frac{r^2}{2x^2}\right) - x = \frac{r^2}{2x^2}$
- Also ist $E_x = \frac{\sigma}{4\epsilon_0}\frac{r^2}{x^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 x^2}$

6.
- Der Zylindermantel habe den Radius R
- Die Flächenladungsdichte sei σ
- Wir betrachten eine Zylinderfläche koaxial zur geladenen Fläche mit dem Radius $r < R$
- Das $\vec{E}$-Feld ist aus Symmetriegründen radial symmetrisch
- Fluss: $\phi = \int\limits_{\text{Fläche}} E_n d_A = E_r \int\limits_{\text{Fläche}} dA = E_r \cdot 2\pi r\ell = \frac{Q}{\epsilon_0}$
- Da keine Ladung umschlossen wird, ist $E_r = 0$, $r < R$
- Für $r > R$ gilt $E_r \cdot 2\pi r\ell = \frac{\sigma \cdot 2\pi R\ell}{\epsilon_0}$
- oder $E_r = \frac{\sigma R}{\epsilon_0 r}$



7.
- Ladungsdichte ρ
- Ladung innerhalb Zylinder mit $r < R$
  $Q_{ges} = \rho \cdot \ell \cdot \pi r^2$
- Also $\quad E_r \cdot 2\pi r\ell = \frac{\rho \ell \pi r^2}{\epsilon_0}$
- oder $\quad E_r = \frac{\rho r}{2\epsilon_0}$
- Ausserhalb: $\quad E_r \cdot 2\pi r\ell = \frac{\rho \ell \pi R^2}{\epsilon_0}$

  oder $\quad E_{r=} \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r}$

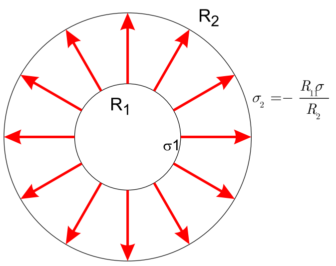
4 Lösungen Hausaufgabe

8. • Nach Aufgabe 6 ist $E_r = \dfrac{\sigma R}{\epsilon_0}$ wenn die Ladung σ auf der Zylinderschale mit $R < r$ aufgebracht ist.

   (a) $r < R_1$: $E_r = 0$
   $R_1 < r < R_2$: $E_r = \frac{\sigma_1 R_1}{\epsilon_0 r}$
   $r > R_2$: $E_r = \frac{\sigma_1 R_1}{\epsilon_0 r} + \frac{\sigma_2 R_2}{\epsilon_0 r} = \frac{\sigma_1 R_1 + \sigma_2 R_2}{\epsilon_0 r}$
   (wir haben die Additivität der elektrischen Felder benutzt).

   (b) Wenn für $r > R_2$ $E_r = 0$ sein soll, muss
   $\sigma_1 R_1 + \sigma_2 R_2 = 0 \Longrightarrow \dfrac{\sigma_1}{\sigma_2} = -\dfrac{R_2}{R_1}$ sein

   (c)



   (d) Koaxialkabel

9. • Es gilt: $E_r = \dfrac{Q_{erde}}{4\pi_{\epsilon_0} R_{erde}^2}$

   • Also $Q_{erde} = 4\pi\epsilon_0 \ R_{erde}^2 \cdot E_r$
   $Q_{erde} = 4\pi \cdot 8,8544x10^{-12} \dfrac{C^2}{Nm^2} \cdot \left(6230 \cdot 10^3\right)^2 m^2 \cdot \left(-150 \dfrac{V}{m}\right)$
   $= \ -648 \ kC$
   (da $\dfrac{V}{m} \triangleq \dfrac{N}{C}$)

10. • Die beiden Linienladungen sind auf einer Achse.
    Das elektrische Feld der ersten Linienladung am Ort ξ der zweiten Linienladung ist:
    $E\left(\xi\right) = \dfrac{\ell\lambda}{4\pi\epsilon_0} \qquad \dfrac{1}{\xi\left(\xi - \ell\right)}$

    • Die Kraft auf ein Längenelement $d\xi$ ist
    $dF\left(\xi, d\right) = E\left(\xi\right) \cdot \lambda d\xi$

    • Die Kraft ist dann
    $$F(d) = \int\limits_{\ell+d}^{2\ell+d} E\left(\xi\right) \lambda d\xi = \int\limits_{\ell+d}^{2\ell+d} \frac{\ell\lambda}{4\pi\epsilon_0} \quad \frac{\lambda d\xi}{\xi\left(\xi - \ell\right)}$$

$$= \frac{\ell\lambda^2}{4\pi\epsilon_0} \int\limits_{\ell+d}^{2\ell+d} \frac{d\xi}{\xi\,(\xi-\ell)}$$

- Nach Bronstein ist
  $\int \frac{dx}{x^2 - bx} = -\frac{2}{b}\mathrm{Artanh}\frac{2x-b}{b}$
- Also $F(d) = \frac{\ell\lambda^2}{4\pi\epsilon_0}\left(-\frac{2}{\ell}\mathrm{Artanh}\frac{2\xi-\ell}{\ell}\right)_{\ell+d}^{2\ell+d}$
  $= \frac{-\lambda^2}{4\pi\epsilon_0}\left(\mathrm{Artanh}\frac{4\ell+2d-\ell}{\ell} - \mathrm{Artanh}\frac{2\ell+2d-\ell}{\ell}\right)$
  $= -\frac{\lambda^2}{4\pi\epsilon_0}\left(\mathrm{Artanh}\frac{3\ell+2d}{\ell} - \mathrm{Artanh}\frac{\ell+2d}{l}\right)$

