Übungsblatt 06
Grundkurs IIIb für Physiker

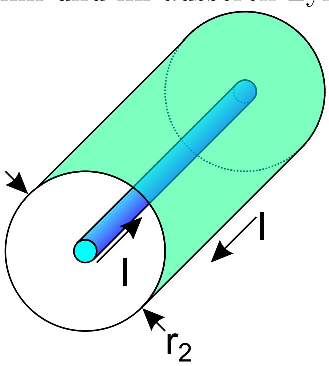
Othmar Marti, (othmar.marti@physik.uni-ulm.de)

20. 1. 2003 oder 27. 1. 2003

1 Aufgaben für die Übungsstunden

Quellenfreiheit[1], Hall-Effekt[2], Lorentztransformation[3], das Faradaysche Induktionsgesetz[4], Energie des Magnetfeldes[5], PDF-Datei[6]

1. Ein Koaxialkabel bestehe aus zwei sehr dünnwandigen Zylindern mit den Radien r_1 (innen) und r_2 (aussen). Der Strom I fliesse im inneren Zylinder hin und im äusseren Zylinder zurück.



   (a) verwenden Sie das Ampèresche Gesetz, um B zu berechnen. Zeigen Sie, dass $B = 0$ ist, ausser zwischen den Leitern.

   (b) Zeigen Sie, dass die magnetische Energiedichte zwischen den Zylindern

$$w_m = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2}$$

[1] ../../node26.html
[2] ../../node27.html
[3] ../../node28.html
[4] ../../node31.html
[5] ../../node32.html
[6] Uebungsblatt06.pdf

ist.

(c) Berechnen Sie die magnetische Energie in einem Zylinderschalen-Volumenelement der Länge ℓ mit dem Volumen $dV = \ell 2\pi r dr$, und zeigen Sie durch Integration, dass die gesamte magnetische Energie im Volumen der Länge ℓ

$$W_m = \frac{\mu_0}{4\pi} I^2 \ell \ln \frac{r_2}{r_1}$$

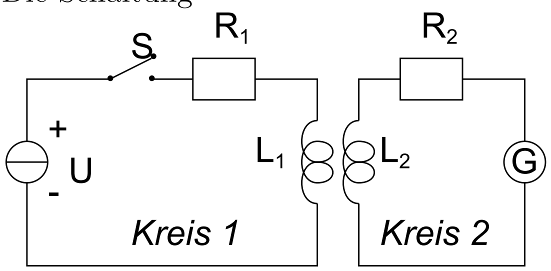
ist.

(d) Verwenden Sie das Resultat von 1c und die Beziehung $W_m = (1/2)LI^2$ um zu zeigen, dass die Selbstinduktivität pro Längeneinheit

$$\frac{L}{\ell} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

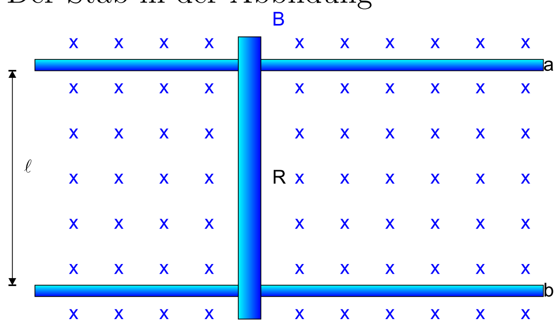
ist.

2. Die Schaltung



habe einen Widerstand von $R_1 = 200\Omega$ sowie $R_2 = 300\Omega$. Wenn der Schalter S im Kreis 1 geschlossen wird, fliesst im Kreis 2 die Gesamtladung $Q = 2 \cdot 10^-4C$ durch das Galvanometer. Nach langer Zeit betrage die Stromstärke im ersten kreis $5A$. Berechnen Sie die Gegeninduktivität der beiden Spulen.

3. Der Stab in der Abbildung



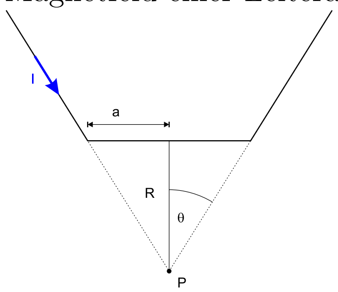
habe den Widerstand R und der Widerstand der Schienen sowie die Kontaktwiderstände seien vernachlässigbar. An die Punkte a und b werde eine Spannungsquelle mit vernachlässigbarem Innenwiderstand so angeschlossen, dass der Strom im Stab nach unten fliesst. Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei der Stab in Ruhe.

(a) Bestimmen Sie die Kraft auf den Stab als Funktion der Geschwindigkeit v und formulieren Sie das zweite Newtonsche Gesetz für den Stab, wenn er die Geschwindigkeit v hat.

(b) Zeigen Sie, dass der Stab eine endliche Endgeschwindigkeit erreicht, und stellen sie für diese eine Beziehung auf.

(c) Wie gross ist die Stromstärke, wenn der Stab seine Endgeschwindigkeit erreicht?

4. Magnetfeld einer Leiteranordnung



(a) Bestimmen Sie das Magnetfeld am Punkt P im Abstand R vom stromdurchflossenen Leiter.

(b) Verwenden Sie das Resultat um die Feldstärke in der Mitte eines Polygons mit N Seiten zu berechnen.

(c) Zeigen Sie, dass für grosse N, die Lösung in diejenige für ein Magnetfeld in der Mitte eines stromdurchflossenen Kreises übergeht.

2 Hausaufgaben

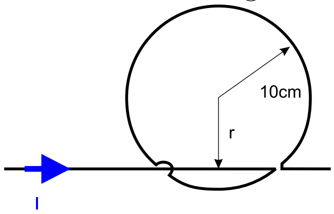
5. In Elektromotoren schaltet man bisweilen einen Widerstand in Reihe zum Rotor, um den Anfangsstrom zu begrenzen, wenn der Motor seine Nenndrehzahl noch nicht erreicht hat. Der Widerstand wird abgeschaltet, wenn der Motor mit normaler Drehzahl läuft.

   (a) Ein Motor habe den Widerstand 0.75Ω und nehme $8A$ bei $230V$ auf. Wie gross muss der Zusatzwiderstand bemessen sein, damit der Anfangsstrom $15A$ nicht überschreitet?

   (b) Wie gross ist die Gegeninduktionsspannung, wenn der Motor seine Nenndrehzahl erreicht hat und der Widerstand abgeschaltet ist?

6. Zeigen Sie: Durch eine Spule mit N Windungen und dem Widerstand R fliesst stets die gesamte Ladung $Q = N(\phi_{B1} - \phi_{B2}$, wenn sich der Fluss von ϕ_{B1} auf ϕ_{B2} ändert, unabhängig davon wie dies geschieht.

7. Ein unendlich langer Draht ist wie



gebogen. Der ringförmige Teil habe den Radius $10cm$ und sei r vom geraden Teil entfernt.

   (a) Wie gross muss r, so dass im Kreismittelpunkt das Magnetfeld verschwindet?

   (b) Wie gross ist der Magnetfeldgradient in die Richtung des eingezeichneten Vektors r am Kreismittelpunkt?

3 Lösungen Aufgaben für die Übungsstunde

1. (a) Für $r < r_1$ ist das magnetische Feld null, weil hier kein Strom fliesst. Für einen Kreis mit dem Radius $r > r_2$ ist der resultierende Strom, der durch die Kontur fliesst, gleich null; damit ist auch B gleich null. Für $r_1 < r < r_2$ ergibt sich aus dem Ampère-Gesetz $B\left(2\pi r\right) = \mu_0 I$ und damit $B = \mu_0 I/\left(2\pi r\right)$.

   (b) Die magnetische Energiedichte ist $w_m = \frac{1}{2}B^2/\mu_0 = \mu_0 I^2/\left(8\pi^2 r^2\right)$.

   (c) Die gesamte magnetische Energie im Volumen zwischen den Zylindern ist
   $$W_m = \int w_m dV = \frac{\mu_0 I^2 \ell}{4\pi}\int_{r1}^{r2}\frac{1}{r}dr = \frac{\mu_0 I^2 \ell}{4\pi}\ln\frac{r_2}{r_1}$$
   .

   (d) Für die magnetische Energie können wir auch schreiben $W_m = \frac{1}{2}LI^2$. Daraus folgt $L/\ell = \left[\mu_0/\left(2\pi\right)\right]\ln r_2/r_1$.

2. Aufgrund der Definition der Gegeninduktivität M können wir für den zweiten Stromkreis schreiben $L_2 dI_2/dt + M dI_1/dt - I_2 R = 0$. Wir integrieren beide Seiten dieser Gleichung über die Zeit. Für den ersten Term ergibt sich
   $$\int_{t_a}^{t_e}\frac{dI_1}{dt}dt = \int_{t_{2a}}^{t_{2e}} dI_2 = I_{2e} - I_{2a} = 0 - 0 = 0$$
   . Entsprechend gilt für den zweiten Term
   $$\int_{t_a}^{t_e}\frac{dI_1}{dt}dt = \int_{t_{1a}}^{t_{1e}} dI_1 = I_{1e} - I_{1a} = I_{1e} - 0 = I_{1e}$$
   Schliesslich erhalten wir für den dritten Term
   $$\int_{t_a}^{t_e} I_2 R dt = R\int_{t_a}^{t_e} I_2 dt = R \bigtriangleup Q$$
   . Daraus folgt $M = R \bigtriangleup Q/I_e = 12mH$.

3. (a) Wir berechnen zunächst den durch den Stab fliessenden Strom. Die Spannungsquelle liefert eine Spannung U, und der Stab induziert aufgrund seiner Bewegung eine Gegenspannung mit dem Betrag $B\ell v$. Also ist die resultierende Spannung $U - B\ell v = IR$. Daraus folgt $I = \left(U - B\ell v\right)/R$. Wegen dieses Stromes im Stab wirkt auf ihn durch das magnetische Feld die Kraft $F = I\ell B = \left(U - B\ell v\right)B\ell/R = ma$.

   (b) Die Endgeschwindigkeit v_e tritt auf, wenn $F = 0$ ist, also wenn gilt $U - B\ell v_e = 0$. Daraus folgt $v_e = U/\left(B\ell\right)$.

(c) Bei der Endgeschwindigkeit ist der Strom im Stab $I = (U - B\ell v_e)/R = 0$.

4. (a) Die unendlich langen geraden Abschnitte tragen zum Feld nichts bei, weil sie auf Geraden verlaufen, die durch den Beobachtungspunkt gehen. Für den kurzen Abschnitt gilt $\sin\theta_1 = \sin\theta_2 = a/\left(a^2+R^2\right)^{1/2}$und damit

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}\frac{a}{\sqrt{a^2+R^2}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}\sin\theta$$

.

(b) Wir stellen uns den kurzen Abschnitt als eine Seite eines regelmässigen N-Ecks vor. Dann ist, vom Mittelpunkt des Vielecks aus gesehen, der Winkel über jedem Abschnitt gleich 2θ. Der gesamte Winkel im Vieleck ist 2π. Für ein N-Eck folgt daraus $N(2\theta) = 2\pi$und $\theta = \pi/N$. Das Feld im Mittelpunkt des N-Ecks ist dann

$$B = N\frac{\mu_0 I}{2\pi R}\sin N$$

. Der erste Faktor N rührt daher, dass jede der N Seiten den gleichen Beitrag zum Feld liefert. Für sehr grosses N ist der Winkel π/N sehr klein; dann gilt $\sin(\pi/N) \approx \pi/N$ und damit $B = \mu_0 I/(2R)$, genau wie im Mittelpunkt einer kreisförmigen Schleife.

4 Lösungen Hausaufgabe

6. (a) Anfangs liegt keine Gegeninduktionsspannung vor, und der Strom ist $I = U/R_{ges}$. Mit $I = 15A$ ist $R_{ges} = 15.33\Omega$. Daher ist der Widerstand, der in Reihe zum Motor zu schalten ist, $R = R_{ges} - 0.75\Omega = 14,58\Omega$.

   (b) Bei normaler Drehzahl ist der Spannungsabfall über dem Motor $U = (8A)\,(0.75\Omega) = 6V$. Weil der Motor mit 230 V betrieben wird, entsteht eine Gegenspannung von 224 V.

7. Wenn sich der Fluss ändert, wird ein Strom induziert, für den gilt $I = U_{ind}/R = -\,(1/R)\,Nd\phi_m/dt$. Wegen $I = dQ/dt$ ist die Ladung, die die Spule passiert, gegeben durch

$$Q = \int dQ = \int_{t_1}^{t_2} I dt = -\frac{N}{R}\int_{t_1}^{t_2}\frac{d\phi_m}{dt}dt = -\frac{N}{R}\int_{\phi_{m1}}^{\phi_{m2}} d\phi_m = \frac{N}{R}\left(\phi_{m1} - \phi_{m2}\right)$$

. Dies gilt unabhängig davon, wie sich der Fluss von einem Wert zum anderen ändert.

8. (a) Das gesamte Feld in diesem System entsteht durch Überlagerung der Felder eines geraden Leiters und einer Schleife. Das Feld des geraden Leiters hat den Betrag $\mu_0 I/\,(2\pi r)$ und weist aus der Papier-Ebene heraus. Für den kreisförmigen Teil ist das Feld $\mu_0 I/\,(2R)$;es weist in die Papier-Ebene hinein. Hier ist $R = 10$ cm der Radius der Schleife. Damit die Felder einander aufheben, muss gelten $1/R = 1/\,(\pi r)$bzw. $r = R/\pi = 3,18$ cm.

   (b) Das Feld des Kreises mit dem Radius R für einen Punkt ausserhalb des Zentrums ist

$$I(x) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint\frac{d\vec{\ell}\times\vec{\rho}}{\rho^3}$$

   Wir parametrisieren den Kreis mit

$$R_k(\alpha) = R(\cos\alpha; \sin\alpha; 0)$$

   und setzen das neue Zentrum zu

$$P(x) = (x; 0; 0)$$

   Dann ist

$$\rho(\alpha) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint(R\cos\alpha - x; R\sin\alpha; 0)$$

   und

$$d\vec{\ell} = (-R\sin\alpha; R\cos\alpha; 0)d\alpha$$

Der vom Kreis herrührende Strom erzeugt das Magnetfeld

$$B(x) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{-R^2 + Rx\cos(\alpha)}{\left(-2\,R\cos(\alpha)\,x + x^2 + R^2\right)^{3/2}} d\alpha$$

Das gesamte Magnetfeld ist dann

$$B_{tot}(x) = \frac{\mu_0 I}{2\pi(R-x)} - \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{-R^2 + Rx\cos(\alpha)}{\left(-2\,R\cos(\alpha)\,x + x^2 + r^2\right)^{3/2}} d\alpha$$

oder

$$\begin{aligned} B_{tot}(x) &= \frac{\mu_0 I}{2\pi(r-x)} - \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \\ &\quad 2\left[x\left\{\mathit{EllipticE}\left(A(x)\right) - \mathit{EllipticK}\left(A(x)\right)\right\} + \right. \\ &\quad \left. r\left\{\mathit{EllipticE}\left(A(x)\right) + \mathit{EllipticK}\left(A(x)\right)\right\}\right] \\ &\quad \sqrt{\frac{-2\,Rx + x^2 + R^2}{(x+R)^2}} \frac{1}{(x-R)\sqrt{(x-R)^2}} \end{aligned}$$

mit $A(x) = 2\sqrt{\frac{Rx}{(x+R)^2}}$ und mit

Elliptisches Integral erster Art

$$\mathit{EllipticK}(k) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-k^2t^2}} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

Elliptisches Integral zweiter Art

$$\mathit{EllipticE}(k) = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-k^2t^2}}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

Wir leiten nach x ab und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_{tot}(x)}{\partial x} &= \frac{\mu_0 I}{2\pi(r-x)^2} - \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \\ &\quad 2\sqrt{\frac{-2\,Rx + x^2 + R^2}{(x+R)^2}} \cdot \\ &\quad \left[\left(x^2 + R^2\right)\left\{\mathit{EllipticK}\left(A(x)\right) - \mathit{EllipticE}\left(A(x)\right)\right\} - \right. \\ &\quad \left. 2Rx\ \mathit{EllipticK}\left(A(x)\right) + \right] \cdot \\ &\quad \frac{1}{x\left((x-R)^2\right)^{3/2}} \end{aligned}$$

