

# PHYS3100 Grundkurs IIb für Physiker

Othmar Marti  
Experimentelle Physik  
Universität Ulm

`Othmar.Marti@Physik.Uni-Ulm.de`

## Vorlesung nach

Leisi, Tipler, Gerthsen, Känzig, Alonso-Finn

Skript: <http://wwwex.physik.uni-ulm.de/Lehre/gk3b-2002-2003>

Übungsblätter und Lösungen:

<http://wwwex.physik.uni-ulm.de/lehre/gk3b-2002-2003/ueb/ue#>

5. Dezember 2002



Universität Ulm, Experimentelle Physik

## Ohmsches Gesetz I

Allgemein gilt für einen Leiter, dass

$$\vec{j}(\vec{E}) = f(\vec{E}) \quad (1)$$

eine beliebige Funktion des angelegten Feldes  $\vec{E}$  ist. Im linearen Fall

$$\vec{j}(\vec{E}) = \sigma \vec{E} \quad (2)$$

spricht man von einem **Ohmschen Leiter**.  $\sigma$  ist die **Leitfähigkeit**. Ihre Einheit ist

$$[\sigma] = \frac{A \cdot m}{m^2 \cdot V} = \frac{A}{V \cdot m} \quad (3)$$

Das obige Gesetz heisst das lokale Ohmsche Gesetz.



## Ohmsches Gesetz II

Indem wir die differentielle Form des Ohmschen Gesetzes integrieren, erhalten wir

$$\int_F \vec{i} d\vec{a} = I = \int_F \sigma \vec{E} d\vec{a} = \int_F \sigma \frac{U}{d} da = \sigma \frac{F}{d} U \quad (4)$$

Dabei haben wir angenommen, dass  $\vec{i}$  und  $\sigma$  konstant über  $F$  sind.



## Ohmsches Gesetz III

Das integrale Ohmsche Gesetz kann auch als

$$I = G \cdot U \quad (5)$$

geschrieben werden.  $G$  ist der Leitwert. Die Einheit ist

$$[G] = \text{Siemens} = \frac{A \cdot m^2}{V \cdot m} = \frac{A}{V}$$

Bekannter ist die Form

$$U = \frac{1}{G} \cdot I = R \cdot I \quad (6)$$



## Ohmsches Gesetz IV

$R = \frac{1}{G}$  ist der Widerstand. Seine Einheit ist das Ohm

$$[R] = \Omega = \frac{1}{S} = \frac{V}{A} = \frac{W}{A^2}$$

Die zu  $R$  gehörende mikroskopische Grösse ist der spezifische Widerstand

$$\rho = \frac{1}{\sigma} \tag{7}$$

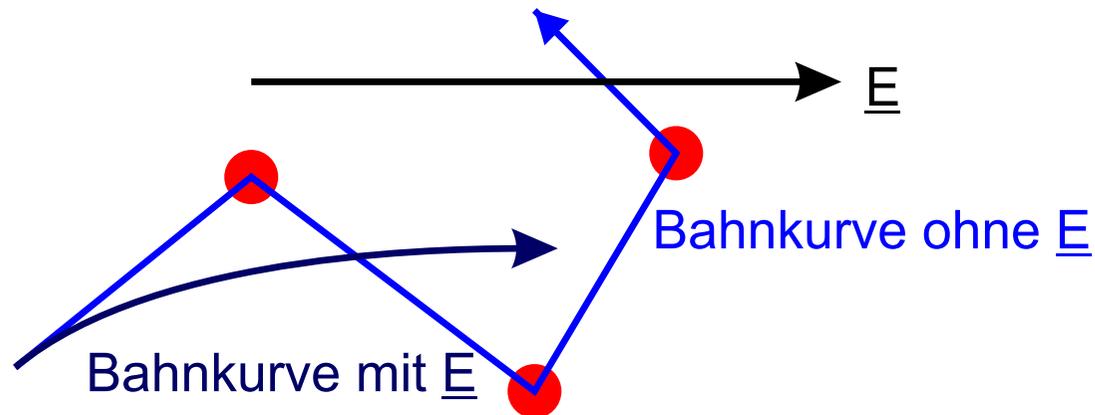
Die Einheit ist

$$[\rho] = \left[ \frac{1}{\sigma} \right] = \frac{Vm}{A} = \Omega m = \frac{m}{S}$$



## Bewegung von Ionen

Wir betrachten die Bewegung von Ionen ( $\langle v \rangle \approx 100 \text{ m/s}$ ) in einer Umgebung von nicht ionisierten Molekülen



*Bahnkurven ohne und mit elektrischem Feld.*

## Bewegung von Ionen II

Die Masse der Ionen sei  $M$ , ihre Ladung  $q$  und die Gesamtzahl  $N$

Die Newtonsche Bewegungsgleichung lautet

$$\vec{F} = q\vec{E} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (8)$$

oder

$$\Delta\vec{p} = q\vec{E}\Delta t \quad (9)$$

wobei  $\Delta t$  die freie Flugzeit ist.



## Bewegung von Ionen III

Der mittlere Impuls ist

$$M \langle \vec{v} \rangle = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left[ M \vec{v}_j^{(k)} + q \vec{E} t_j \right] \quad (10)$$

$\langle \vec{v} \rangle$  ist die mittlere Driftgeschwindigkeit,  $\vec{v}_j^{(k)}$  die Geschwindigkeit nach dem letzten Stoss.

Sind die Geschwindigkeiten  $\vec{v}_j^{(k)}$  isotrop verteilt, mittelt sich der erste Summand zu null.



## Bewegung von Ionen IV

Unter dieser Annahme ist

$$M \langle \vec{v} \rangle = q \vec{E} \frac{1}{N} \sum t_j = q E \langle t \rangle \quad (11)$$

wobei  $\langle t \rangle$  die mittlere Zeit zwischen den Zusammenstößen ist. Also ist

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{q \langle t \rangle}{M} \vec{E} \quad (12)$$

und

$$\vec{i} = n \frac{q^2 \langle t \rangle}{M} \vec{E} \quad (13)$$



## Bewegung von Ionen V

Dabei ist  $n$  die Dichte der **Ladungsträger**.

Somit ist bei einer Mischung verschiedener **Ladungsträger**

$$\sigma = \sum_k n_k \frac{q_k^2 \tau_k}{M_k} \quad (14)$$

Wir haben  $\tau = \langle t \rangle$  gesetzt.

Das Ohmsche Gesetz gilt, wenn  $\tau$  und  $n_k$  unabhängig von  $\vec{E}$  sind,



## Beispiel: Metall

Annahmen:  $m_e \ll m_{kern}$ , isotrope Stöße,  $\langle v_e \rangle = 10^5 m/s$  (kinetische Gastheorie)

$$\frac{1}{\rho_{\text{exp}}} = \sigma = n_e \frac{e^2 \tau}{m_e} \quad (15)$$

bekommen wir

$$\tau = \frac{m_e}{\rho_{\text{exp}} n_e e^2} = 3.3 \cdot 10^{-14} s \quad (16)$$

(mit  $\rho_{\text{exp}} = 4.3 \times 10^{-8} \Omega m$  und  $n_e = 2.5 \cdot 10^{28} \frac{1}{m^3}$  für Na-Metall)

$$\lambda = \langle v_e \rangle \tau = 3.3 nm \quad (17)$$

im Widerspruch zum Ionenabstand von 0.1nm

⇒ Lösung: **Quantenmechanik**



## Homogener Ohmscher Leiter

Bei einem homogenen Ohmschen Leiter mit einer stationären Stromverteilung ist  $\rho = 0$  im Inneren. Dies folgt aus

1. **Ohmsches Gesetz**  $\vec{i}(x, y, z) = \sigma \vec{E}(x, y, z)$

2. **Kontinuitätsgleichung**  $\vec{\nabla} \cdot \vec{i} = 0$ , also  $\vec{\nabla} \cdot (\sigma \vec{E}) = 0$  und damit  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$

3. das **Gaussche Gesetz** sagt  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{el}}{\epsilon_0}$

4. damit folgt die Behauptung, dass  $\rho_{el} = 0$ .



## Homogener Ohmscher Leiter II

Aus der Eigenschaft

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi = -\vec{\nabla}U \quad (18)$$

erhalten wir im Inneren eines Leiters

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\varphi = \Delta\varphi = 0 \quad (19)$$

Dies bedeutet, dass  $\varphi$  im Inneren eines homogenen Ohmschen Leiters ein Potentialfeld ist.



## Homogener Ohmscher Leiter III

Die Lösung von

$$\Delta\varphi = 0 \quad (20)$$

ist durch die Randbedingungen

1.  $U = \text{const}$  an den Elektrodenflächen
2.  $\vec{i}_\perp = 0$  sonst

gegeben<sup>1</sup>

Mit diesen Gleichungen kann man zum Beispiel den Widerstand eines homogenen Leiters berechnen (Übungsaufgabe).

---

<sup>1</sup>Im Gegensatz zum Kondensator ist hier  $\vec{E} \neq 0$  in einem endlichen Gebiet.



## Inhomogener Ohmscher Leiter

Bei inhomogenen Leitern müssen wir das Ohmsche Gesetz in seiner Differentialform verwenden. Aus der Kontinuitätsgleichung für stationäre Stromverteilungen und dem lokalen Ohmschen Gesetz Gleichung (2) bekommen wir

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{i} = \vec{\nabla} \cdot \left[ \sigma(x, y, z) \vec{E}(x, y, z) \right] = 0 \quad (21)$$

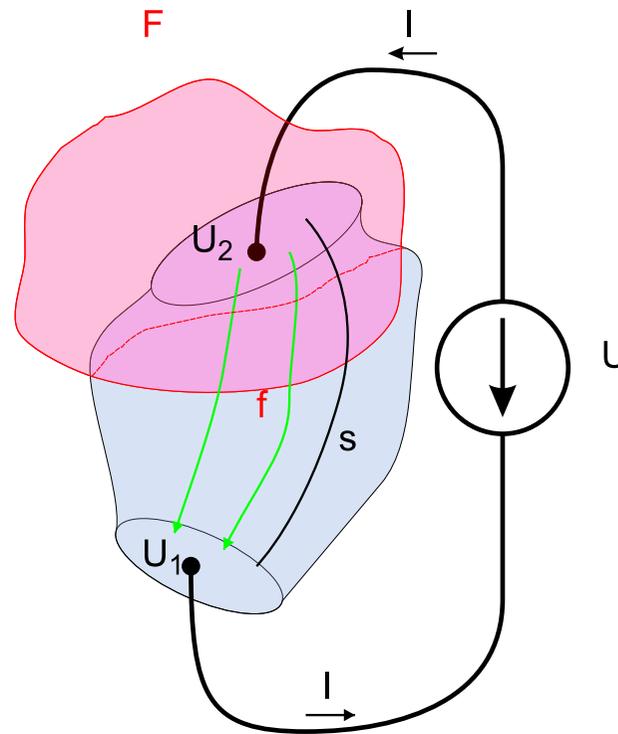
Wir ersetzen nun  $\vec{E}$  und erhalten

$$\vec{\nabla} \cdot \left[ \sigma(x, y, z) \vec{\nabla} U(x, y, z) \right] = 0 \quad (22)$$

Bei einem homogenen Leiter könnte  $\sigma(x, y, z)$  vor die Divergenz gezogen werden.



## Homogener Ohmscher Leiter V



*Berechnung des Widerstandes bei einem inhomogenen Leiter*

## Homogener Ohmscher Leiter VI

Wir wenden die Kontinuitätsgleichung auf die Fläche  $F$  an.

$$\iint_F \sigma \vec{E} \cdot d\vec{a} = \iint_f \sigma \vec{E} \cdot d\vec{a} - I \quad (23)$$

wobei  $f$  die durch  $F$  aus dem Leiter herausgeschnittene Fläche ist. Die Spannungsdifferenz ist

$$U_2 - U_1 = \int_s e \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (24)$$



## Homogener Ohmscher Leiter VII

Wenn nun  $\phi_1(x, y, z)$  eine Lösung von Gleichung (22) ist, dann ist aufgrund der Linearität dieser Gleichung auch

$$U_2(x, y, z) = kU_1(x, y, z) \quad (25)$$

eine Lösung. Dabei kann  $k$  eine beliebige, auch komplexzahlige Zahl sein.

Da  $\vec{E} = -\vec{\nabla}U$  auch eine lineare Gleichung ist, muss also auch

$$\vec{E}_2 = -\vec{\nabla}U_2 = -k\vec{\nabla}U_1 = k\vec{E}_1 \quad (26)$$

eine Lösung sein.



## Homogener Ohmscher Leiter VIII

Nach Gleichung (23) ist dann auch

$$I_2 = \int_f \int \sigma \vec{E}_2 \cdot d\vec{a} = \int_f \int \sigma k \vec{E}_1 \cdot d\vec{a} = k \int_f \int \sigma \vec{E} \cdot d\vec{a} = k I_1 \quad (27)$$

Damit haben wir, dass bei einem beliebigen inhomogenen Leiter

$$\frac{U_2}{I_2} = \frac{U_1}{I_1} = \text{const} = R \quad (28)$$

ist. Die Proportionalitätskonstante ist der Widerstand  $R$ . Um den Widerstand eines beliebigen Leiters zu berechnen, muss man  $\vec{E}(x, y, z)$  im Inneren kennen. Dies kann man erreichen, indem man die Laplacegleichung löst.

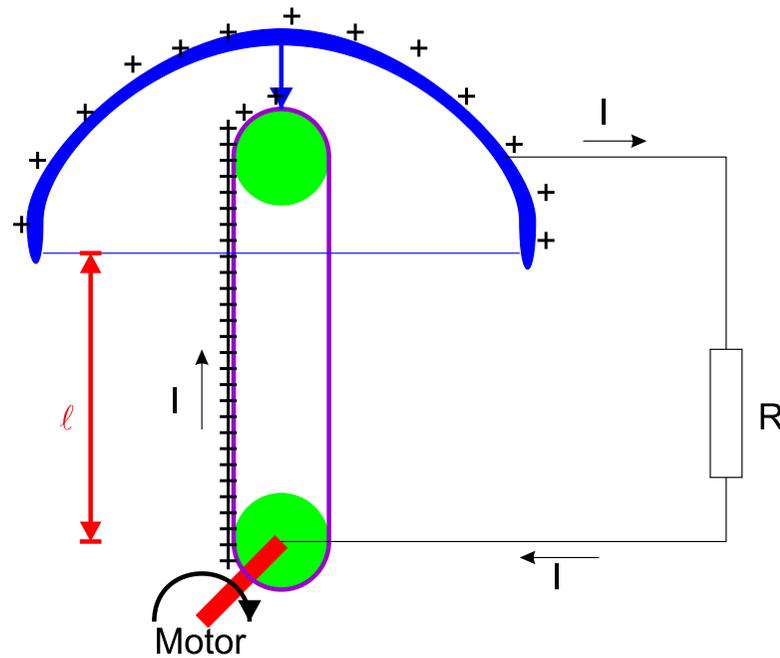


## Homogener Ohmscher Leiter IX

Im statischen Falle ist  $\vec{E}(x, y, z) = 0$  im inneren eines Leiters. Bei einem stromdurchflossenen Leiter liefert die Batterie die notwendige Energie, um das elektrische Feld im Inneren des Leiters aufrecht zu erhalten.



## Elektromotorische Kraft



*Ladungstransport in einem mit einem Widerstand  $R$  kurzgeschlossenen van de Graaff-Generator.*

## Elektromotorische Kraft II

Ein elektrisches Feld im Inneren eines Leiters bewirkt einen Strom. Wird dieses elektrische Feld durch Ladungen erzeugt, bewirkt der resultierende Strom einen Ausgleich dieser Ladung. Durch Influenz werden die Oberflächenladungen so umgeschichtet, dass der Strom abnimmt und schließlich verschwindet.

Nehmen wir an, dass im stationären Betrieb eine Spannung  $U$  zwischen der Kugel und dem Fuss des van-de-Graaff-Generators liegen. Das elektrische Feld entlang des Bandes ist dann, in erster Näherung,

$$E = U/\ell \quad (29)$$



## Elektromotorische Kraft III

Die Arbeit, eine Ladungseinheit  $dQ$  gegen dieses elektrische Feld zur Halbkugel zu bringen, ist<sup>2</sup>

$$dW = dQ \cdot U \quad (30)$$

Die Leistung des Motors, der hier als Spannungsquelle wirkt, ist

$$P_M = \frac{dW}{dt} = \frac{dQ}{dt} U = I \cdot U \quad (31)$$

Das elektrische Feld leistet im Widerstand auf der anderen Seite in der Zeit  $dt$  die Arbeit

$$dA = E \cdot dQ \cdot \ell \quad (32)$$

---

<sup>2</sup>Wir vernachlässigen dabei die Gravitationsarbeit. Frage: Ist dies für das Problem wichtig (prinzipiell und praktisch)?



## Elektromotorische Kraft IV

oder, mit Gleichung (29) ,

$$dA = dQ \cdot U \quad (33)$$

Damit ist die Leistung des  $E$ -Feldes

$$P_E = \frac{dQ}{dt} U = I \cdot U = P_M \quad (34)$$

Die Energie des elektrischen Stromes wird im Widerstand in **Joulsche Wärme** umgesetzt, also ist auch

$$P_J = P_M = P_E = I \cdot U \quad (35)$$



## Elektromotorische Kraft V

Bei einem Ohmschen Leiter erhalten wir

$$P = R \cdot I^2 = \frac{U^2}{R} \quad (36)$$

Wenn wir eine Probeladung  $q_0$  langsam um den Stromkreis herumführen, ist die geleistete Arbeit grösser als null. Diese Arbeit nennen wir **elektromotorische Kraft** der Stromquelle. Wir definieren also

$$U_{EMK} = \frac{1}{q_0} \int \vec{F} \cdot d\vec{s} \quad (37)$$



## Elektromotorische Kraft VI

Diese elektromotorische Kraft<sup>3</sup> ist die Arbeit, die beim Herumführen einer kleinen Ladung  $q_0$  von der Stromquelle geleistet wird. Beim van-de-Graaff-Generator besteht diese Arbeit aus zwei Teilen:

- Auf dem Band wird an jedem Punkt die Kraft des elektrostatischen Feldes durch die Kraft des Motors kompensiert. Auf diesem Zweig ist die Arbeit null.
- Die Arbeit, die im Widerstand in **Joulsche Wärme** umgewandelt wird.

---

<sup>3</sup>Die elektromotorische Kraft ist keine Kraft im Sinne der Mechanik!

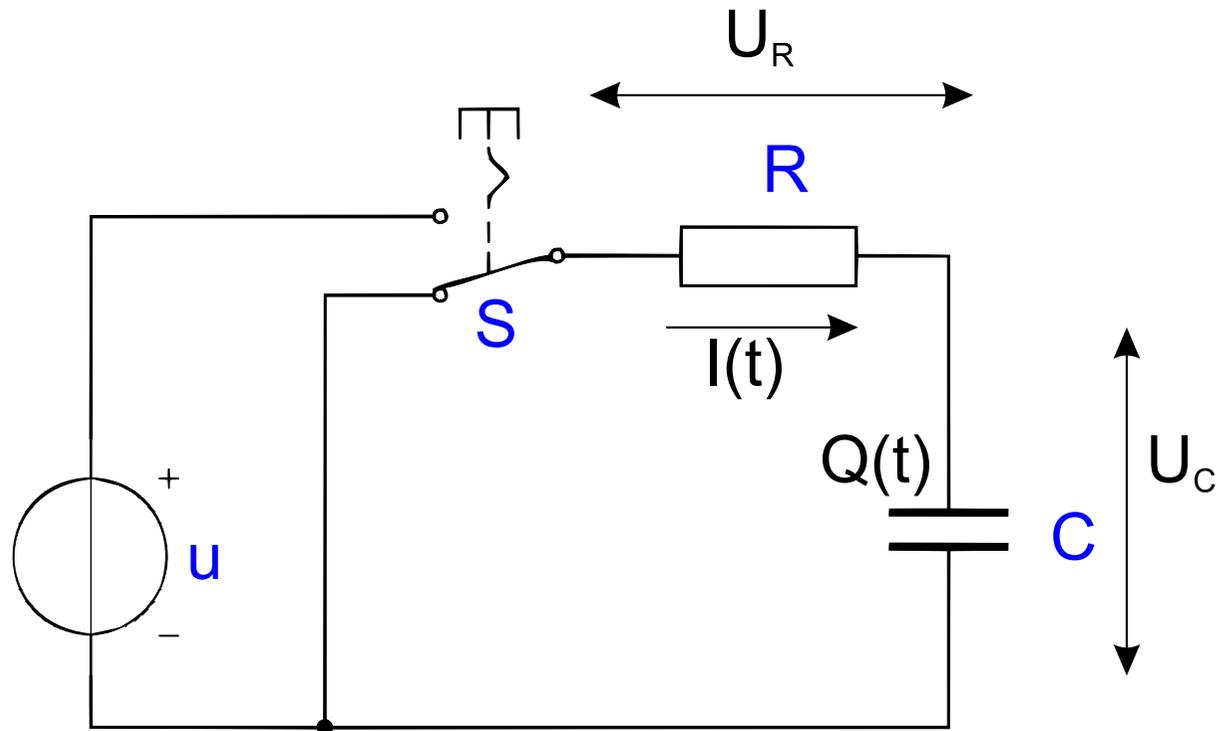


## Elektromotorische Kraft VII

Die elektromotorische Kraft einer Stromquelle ist die Quelle der Energie (Arbeit), die einen konstanten Stromfluss in einem Stromkreis aufrecht erhält. Neben der elektromotorischen Kraft können auch magnetische Kräfte und andere Quellen einen Stromfluss in einem Leiter aufrecht erhalten.



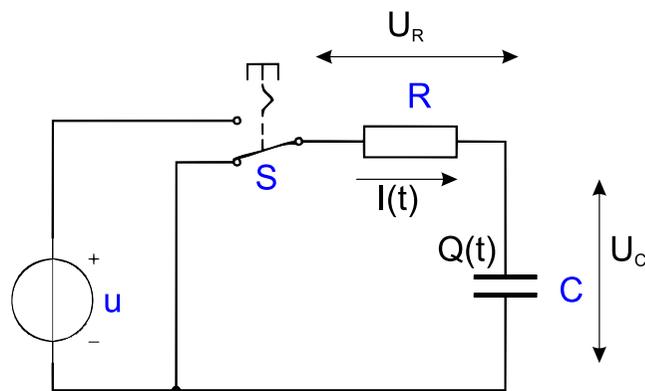
## RC-Stromkreis I



*Aufladen und entladen eines Kondensators über einen Widerstand.*



## RC-Stromkreise II

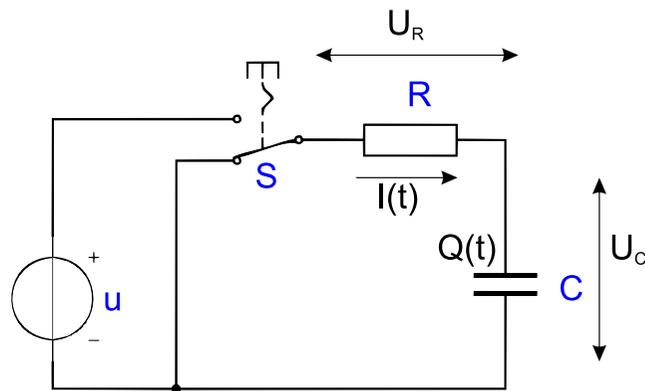


*Aufladen und entladen eines Kondensators über einen Widerstand.*

Ohne ein Verständnis von Stromkreisen sind moderne elektronische Schaltungen nicht verständlich. Wir betrachten deshalb Schaltungen aus Kondensatoren und Widerständen. Zur Erinnerung: die relevanten Gleichungen sind

- $U = R \cdot I = R \cdot \frac{dQ}{dt}$  für Widerstände
- $Q = \int I dt = U \cdot C$  für Kondensatoren

## RC-Stromkreise III



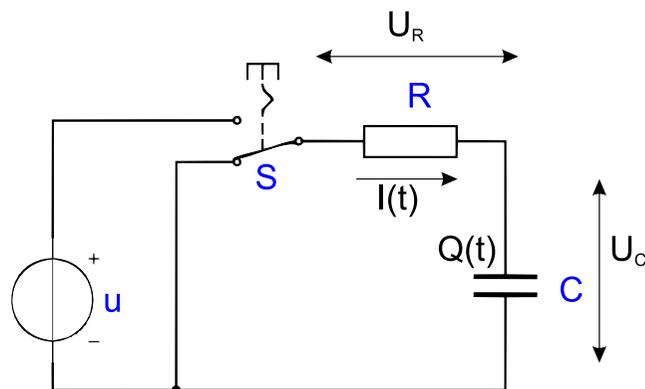
*Aufladen und entladen eines Kondensators über einen Widerstand.*

Für die Zeit  $t < 0$  soll der Schalter  $S$  in der gezeigten Stellung sein. Die Spannung am Kondensator ist  $U_C = 0$ . Damit ist auch  $Q = 0$  und  $I(t) = 0$ . Für  $t \geq 0$  wird der Kondensator  $C$  mit der Spannungsquelle  $U$  verbunden. Da Spannungen im quasistationären Falle sich wie potentielle Energien verhalten, kann man für

$$U_R(t) = U - U_C(t) = I(t) \cdot R \quad (38)$$

schreiben.

## RC-Stromkreise IV



*Aufladen und entladen eines Kondensators über einen Widerstand.*

$$U_C(t) = \frac{Q(t)}{C} = \frac{\int_0^t I(\tau) d\tau}{C} \quad (39)$$

Zusammen erhalten wir die Differentialgleichung

$$Q'(t) \cdot R + \frac{Q(t)}{C} = U \quad (40)$$

oder

$$Q'(t) + \frac{Q(t)}{C \cdot R} = \frac{U}{R} \quad (41)$$

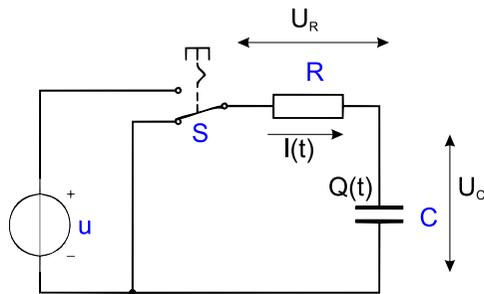
mit der Anfangsbedingung  $U_C(0) = 0 = Q(0)$ .

## RC-Stromkreise V

Die Lösung dieser Differentialgleichung ist

**Partikuläre Lösung**  $Q = C \cdot U$

**Allgemeine Lösung**  $Q(t) = C \cdot U \cdot e^{-t/(RC)}$



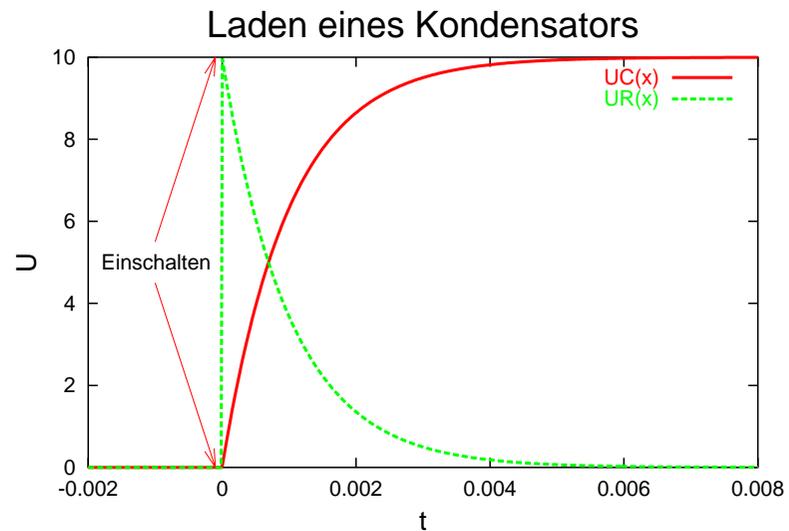
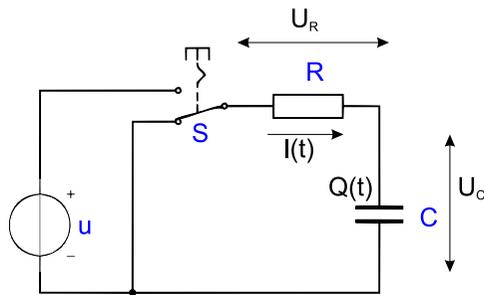
$$Q(t) = U \cdot C \left(1 - e^{-t/(RC)}\right) \quad (42)$$

für  $U_C(t)$  ist also

$$U_C(t) = \frac{Q(t)}{C} = U \left(1 - e^{-t/(RC)}\right) \quad (43)$$

## RC-Stromkreise VI

$$U_R(t) = I(t) \cdot R = \dot{Q}(t) \cdot R = U e^{-t/(RC)} \quad (44)$$

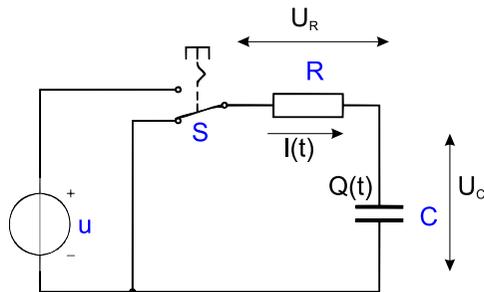


Werte:  $U = 10V$  und  $R \cdot C = 0.001s$ .

## RC-Stromkreise VII

Die Differentialgleichung für das Entladen lautet

$$\dot{Q}(t) \cdot R + \frac{Q(t)}{C} = 0 \quad (45)$$



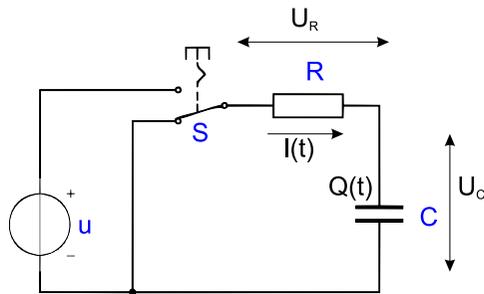
wobei die Anfangsbedingung nun  $U_C(0) = U$  oder  $Q(0) = C \cdot U$  ist. Die Lösung dieser Differentialgleichung ist

**Partikuläre Lösung**  $Q = 0$

**Allgemeine Lösung**  $Q(t) = C \cdot U \cdot e^{-t/(RC)}$

## RC-Stromkreise VIII

Damit erhalten wir

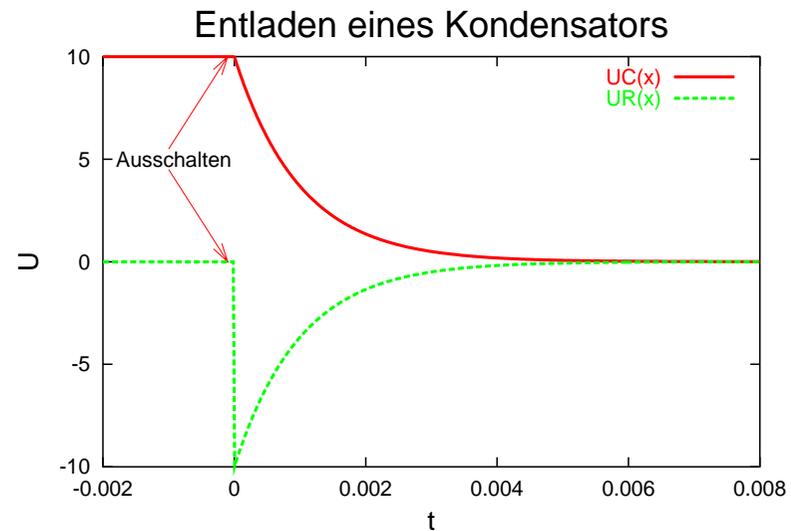
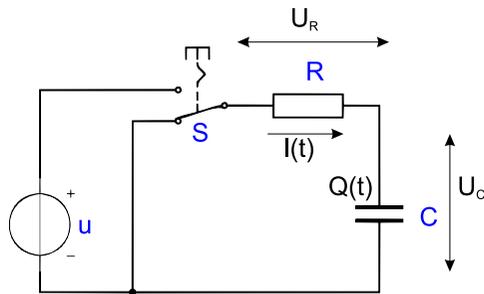


$$U_C(t) = \frac{Q(t)}{C} = U \cdot e^{-t/(RC)} \quad (46)$$

und

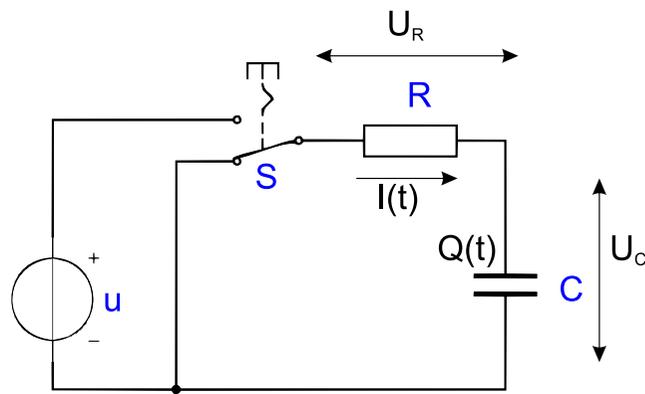
$$U_R(t) = I(t) \cdot R = \dot{Q}(t) \cdot R = -U \cdot e^{-t/(RC)} \quad (47)$$

# RC-Stromkreise IX



*Entladekurven am Kondensator Die verwendeten Werte sind  $U = 10V$  und  $R \cdot C = 0.001s$ .*

## RC-Stromkreise X

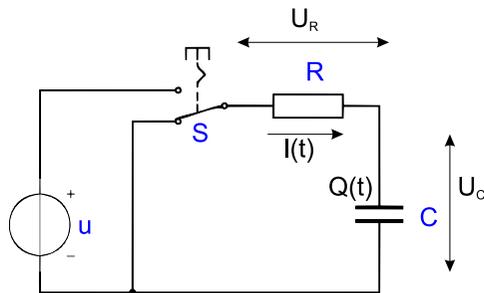


Die Grösse  $\tau = R \cdot C$  ist die Zeitkonstante der Schaltung. In der Zeit  $\tau$  steigt  $U_C$  beim Einschalten von 0 auf 63%. Ebenso fällt beim Ausschalten die Spannung in der Zeit  $\tau$  von 100% auf 37% ab.

## RC-Stromkreise X: Leistungsbetrachtung

$$U \cdot I \cdot = R \cdot I^2 + \frac{d}{dt} \left( \frac{Q^2}{2C} \right) \quad (48)$$

oder

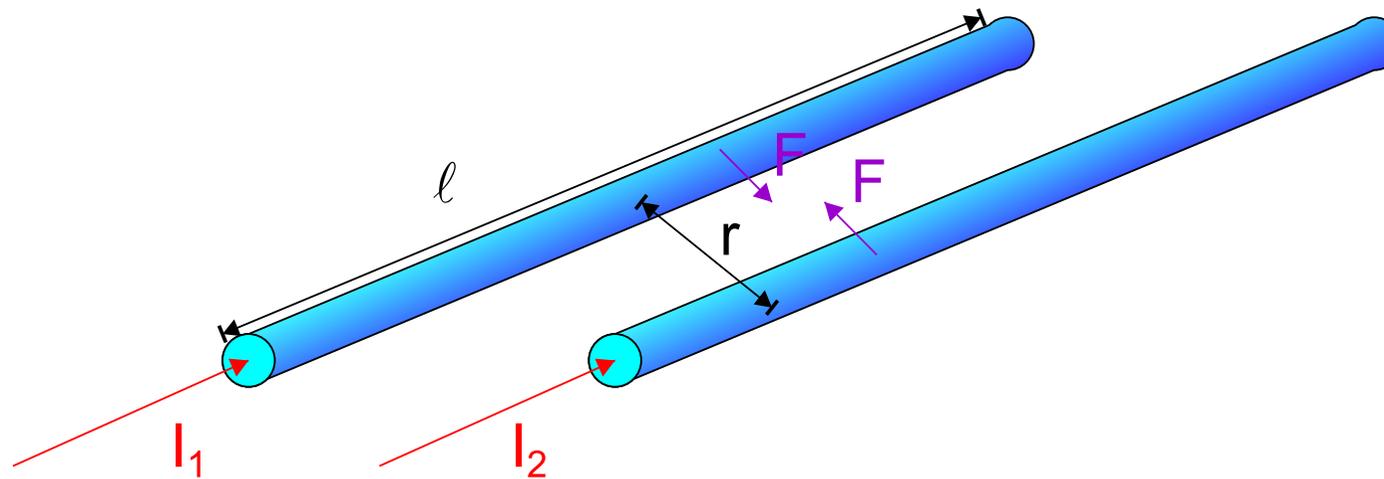


$$U \cdot \frac{dQ}{dt} = R \cdot \left( \frac{dQ}{dt} \right)^2 + \frac{1}{C} \cdot Q \cdot \frac{dQ}{dt} \quad (49)$$

und damit

$$U = R \cdot \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} \cdot Q \quad (50)$$

## Magnetfeld und Lorentzkraft



*Strom in zwei parallelen Leitern. Die Leiter haben die Länge  $\ell$  und sind im Abstand  $r$ . Sie sind von den Strömen  $I_1$  und  $I_2$  durchflossen.*

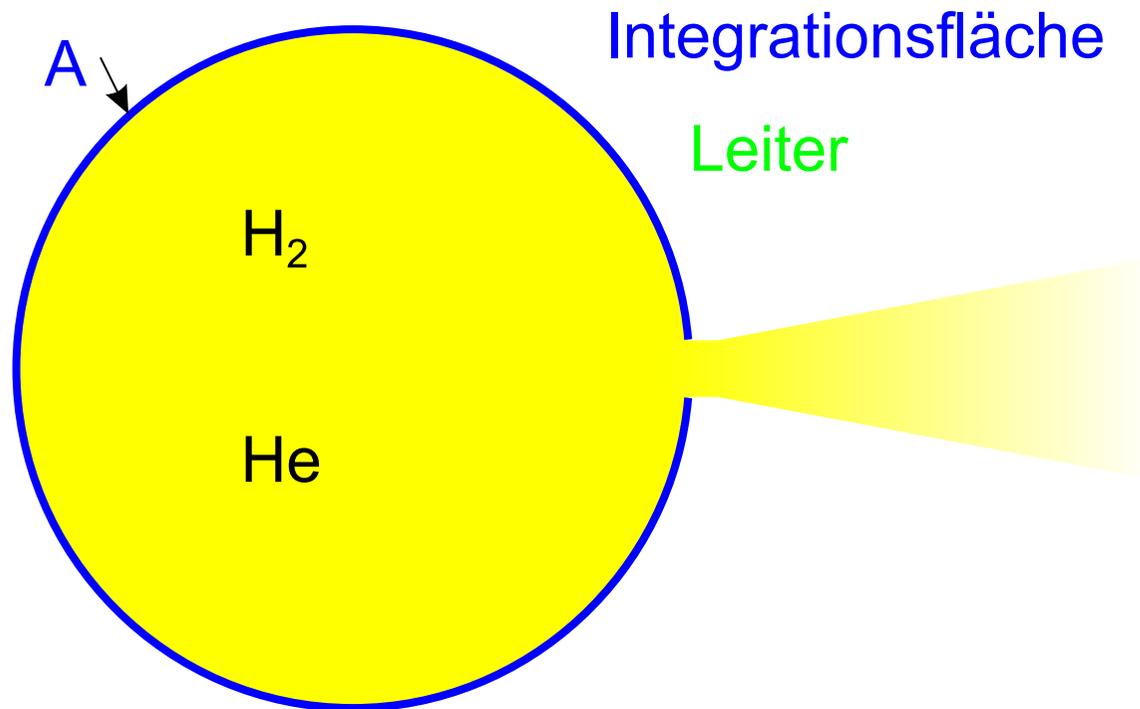
## Magnetfeld und Lorentzkraft II

Die Kraft  $F_M$  ist nicht eine elektrostatische Kraft, da eine geerdete Metallplatte die Kraft, anders als bei der Coulomb-Kraft, nicht abschirmt.

Die Kraft  $F_M$  wirkt auf bewegte Ladungen!

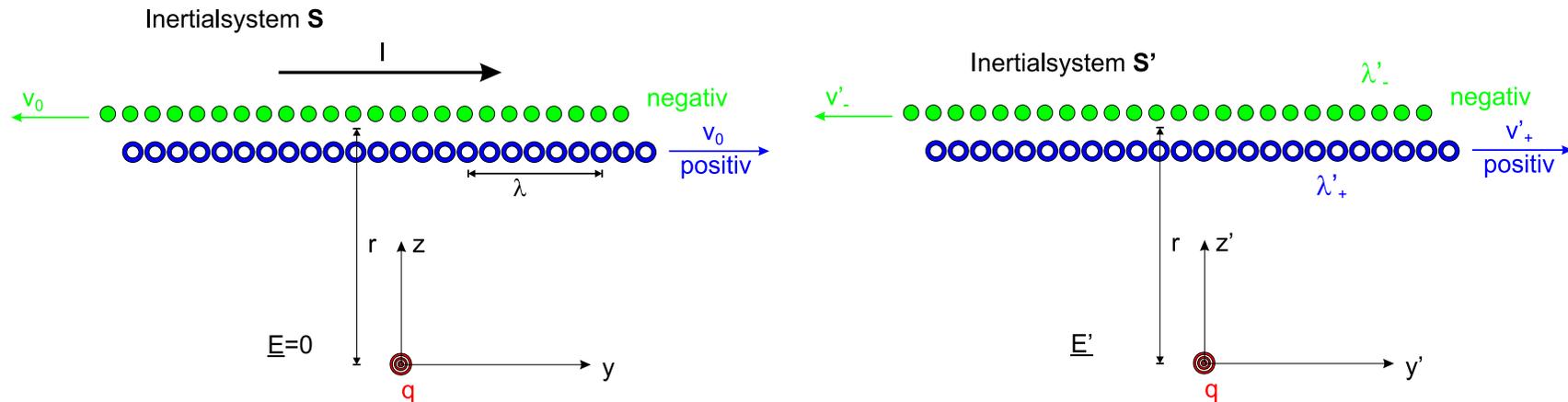


## Ladungsinvarianz bewegter Ladungen



*Metallischer Gastank mit Ausströmöffnung.*

# Relativistische Rechnung



*Berechnung der magnetischen Kraft. Links: im Bezugssystem  $S$  und rechts: im Bezugssystem  $S'$ , in dem  $q$  in Ruhe ist. Beachte: wir wissen zwar nicht, wie gross der Strom  $I$  gemessen im Bezugssystem  $S$  im Bezugssystem  $S'$  ist. Die Ladung ist jedoch **invariant**.*

## Relativistische Rechnung II

Den Strom  $I$  modellieren wir mit zwei Ketten aus Ladungsträgern, je eine positiv und negativ geladen. Ihre Linienladungsdichte soll so sein, dass die beiden Ketten neutral sind. Im Ruhesystem  $S^+$  der positiven Ladungen ist

$$\lambda_0 = \frac{Q}{L_0} \quad (51)$$

Im Inertialsystem  $S$  ist wegen der Ladungsinvarianz

$$\lambda = \frac{Q}{L} \quad (52)$$



## Relativistische Rechnung III

Wegen der Längenkontraktion gilt

$$L = \frac{L_0}{\gamma_0} = L_0 \sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}} \quad (53)$$

Zusammengenommen erhalten wir

$$\lambda_0 = \frac{\lambda}{\gamma_0} \quad (54)$$



## Relativistische Rechnung IV

Die gleiche Beziehung kann für die negativen Ladungen abgeleitet werden. Das heisst, wenn in  $S$  die Linienladungsdichten der positiven und negativen Ladungen gleich sind, dann auch in den jeweiligen Ruhesystemen. In den Ruhesystemen ist die Linienladungsdichte geringer als in bewegten Bezugssystemen. Da die beiden bewegten Ladungsketten die gleiche Linienladungsdichte im System  $S$  haben, ist  $\vec{E} = 0$ .



## Relativistische Rechnung V

Im Ruhesystem  $S'$ , in dem das Teilchen mit der Ladung  $q$  in Ruhe ist, sieht die Situation anders aus. Die Geschwindigkeit der positiven und der negativen Ladungsketten ist unterschiedlich. deshalb sind sie zusammen nicht mehr elektrisch neutral. Auf die Ladung  $q$  wirkt eine elektrostatische Kraft. Da die Relativgeschwindigkeit der positiven Ladungen zu  $q$  kleiner ist als die der negativen Ladungen, liegen in  $S'$  die positiven Ladungen weniger dicht als die negativen<sup>4</sup>. Die beiden Ladungsketten sind insgesamt **negativ** geladen. Deshalb wird  $q$  angezogen, wenn  $q > 0$  ist. Das  $\vec{E}'$ -Feld in die  $z'$ -Richtung erzeugt in  $S'$  die Kraft

$$F'_z = q \cdot E' \quad (55)$$

---

<sup>4</sup>In  $S$  sind die Ladungsdichten der positiven und negativen Ladungen.



## Relativistische Felder

Das  $\vec{E}$ -Feld hängt vom Bezugssystem ab, ist also nicht relativistisch invariant!



## Relativistische Rechnung II

Das elektrische Feld einer Linienladung im Abstand  $r$  ist

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 \cdot r} \quad (56)$$

Um das elektrische Feld  $\vec{E}'$  berechnen wir die Geschwindigkeiten  $v'_+$  und  $v'_-$  in  $S'$ .

$$\begin{aligned} v'_+ &= \frac{v - v_0}{1 - \frac{v \cdot v_0}{c^2}} \\ v'_- &= \frac{v + v_0}{1 + \frac{v \cdot v_0}{c^2}} \end{aligned} \quad (57)$$



## Relativistische Rechnung III

Mit den üblichen Abkürzungen

$$\beta \equiv \frac{v}{c} \quad (58)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

bekommen wir

$$\beta'_+ = \frac{\beta_0 - \beta}{1 - \beta_0\beta} \quad (59)$$

$$\beta'_- = \frac{\beta_0 + \beta}{1 + \beta_0\beta}$$



## Relativistische Rechnung IV

Mit  $\gamma'_+ \equiv \gamma(v'_+)$  und  $\gamma'_- \equiv \gamma(v'_-)$  und mit  $\lambda_0 = \lambda'_+/\gamma'_+$  erhalten wir

$$\lambda'_+ = \gamma'_+ \left( \frac{\lambda}{\gamma_0} \right) \quad (60)$$

$$\lambda'_- = \gamma'_- \left( \frac{\lambda}{\gamma_0} \right)$$

Die Netto-Linienladung in  $S'$  ist dann

$$\lambda' = \lambda'_+ - \lambda'_- = \frac{\lambda}{\gamma_0} (\gamma'_+ - \gamma'_-) \quad (61)$$



## Relativistische Rechnung V

Weiter erhalten wir

$$\begin{aligned}\gamma'_+ - \gamma'_- &= \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_+^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_-^2}} && (62) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\beta_0 - \beta}{1 - \beta_0\beta}\right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\beta_0 + \beta}{1 + \beta_0\beta}\right)^2}} \\ &= \frac{1 - \beta_0\beta}{\sqrt{(1 - \beta_0^2)(1 - \beta^2)}} - \frac{1 + \beta_0\beta}{\sqrt{(1 - \beta_0^2)(1 - \beta^2)}} \\ &= \frac{-2\beta_0\beta}{\sqrt{(1 - \beta_0^2)(1 - \beta^2)}} = -2\beta_0\beta\gamma_0\gamma\end{aligned}$$



## Relativistische Rechnung VI

Also ist

$$\lambda' = -2\lambda\beta\beta_0\gamma = \frac{-2\lambda v v_0}{c^2}\gamma \quad (63)$$

Das elektrische Feld wird also

$$\begin{aligned} E'_r &= \frac{\lambda'}{2\pi\epsilon_0 r} \\ &= \frac{2\lambda v_0 v \gamma(v)}{2\pi\epsilon_0 c^2} \cdot \frac{1}{r} \end{aligned} \quad (64)$$

Die Kraft im Ruhesystem  $S'$  des Teilchens ist also

$$F'_z = -q \cdot E'_r = \frac{2q\lambda v_0 v \gamma(v)}{2\pi\epsilon_0 c^2} \cdot \frac{1}{r} \quad (65)$$



## Relativistische Rechnung VI

Wir verwenden die Lorentztransformation der Impulse

$$p'_x = p_x \quad (66)$$

$$p'_y = \gamma(v) \left( p_y - v \frac{E}{c^2} \right)$$

$$p'_z = p_z$$

$$E' = \gamma(v) (E - v \cdot p_y)$$

Der **Vierervektor**  $(p_x, p_y, p_z, \frac{E}{c^2})$  transformiert sich wie der Vierervektor  $(x, y, z, t)$ .



## Relativistische Rechnung VII

Die Kraft transformiert sich also wie

$$F'_z = \frac{dp'_z}{dt'} = \frac{dp_z}{\sqrt{1 - \beta^2} \cdot dt} = \gamma(v) F_z \quad (67)$$

Der Strom in  $S$  ist

$$I = 2\lambda v_0 \quad (68)$$

Damit bekommen wir

$$F_z(r) = \frac{q \cdot v \cdot I}{2\pi\epsilon_0 \cdot c^2} \cdot \frac{1}{r} \quad (69)$$



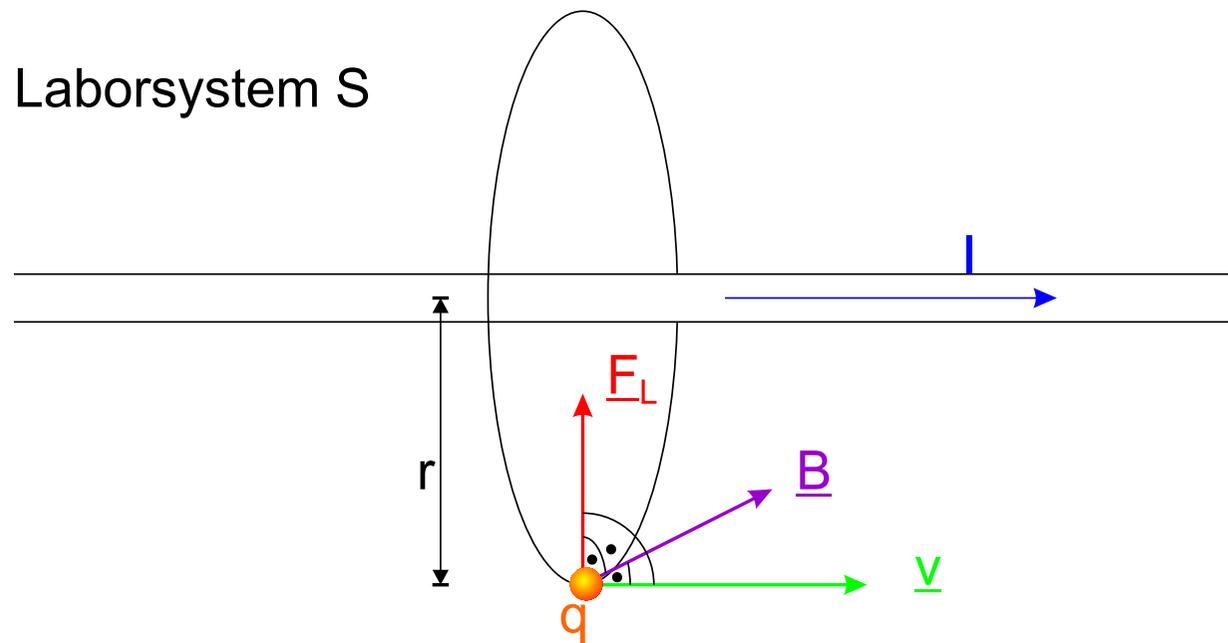
## Relativistische Rechnung VIII

Multipliziert man Gleichung (69) mit der Dichte der Ladungsträger, so erhält man die zu  $I_2$  proportionale Kraft.

Die magnetische Kraft  $F_m$  im Laborsystem  $S$  ist die relativistisch transformierte elektrostatische Kraft auf die Ladung  $q$  in deren Ruhesystem  $S'$ . Die magnetische Kraft kann als relativistische Korrektur zur elektrostatischen Kraft verstanden werden.



# Magnetisches Feld um einen Leiter



## Magnetisches Feld um einen Leiter II

Die magnetische Induktion eines geraden, unendlich ausgedehnten Stromes bildet Feldlinien, die kreisförmig in einer Ebene senkrecht zum Strom liegen. Der Mittelpunkt der kreisförmigen Feldlinien ist der Strom.

Die magnetische Induktion eines geraden, unendlich ausgedehnten Stromes bildet Feldlinien, die kreisförmig in einer Ebene senkrecht zum Strom liegen. Der Mittelpunkt der kreisförmigen Feldlinien ist der Strom.



## Induktionskonstante

### Die Induktionskonstante

$$\mu_0 = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \quad (70)$$

ermöglicht es zu schreiben

$$B(r) = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I}{r} \quad (71)$$



## Biot-Savart-Kraft

$$d\vec{F} = I \cdot d\vec{\ell} \times \vec{B} \quad (72)$$



## Beispiele Biot-Savart-Kraft

Die Kraft für eine beliebig geformte geschlossene Leiterschleife in einem homogenen Magnetfeld ist

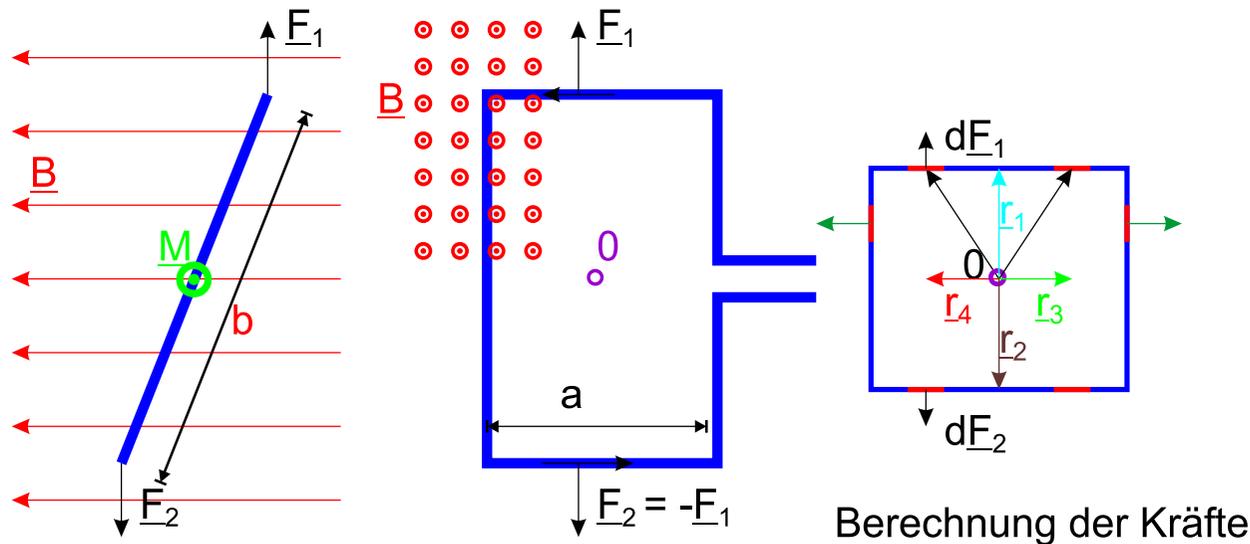
$$\vec{F} = \oint I \cdot d\vec{\ell} \times \vec{B} = I \cdot \left( \oint d\vec{\ell} \times \vec{B} \right) \quad (73)$$

Da das Linienintegral  $\oint d\vec{\ell} \times \vec{B}$  über eine geschlossene Schleife null ist (die positiven und die negativen Anteile heben sich auf) ist  $\vec{F} = 0$ .



## Beispiele Biot-Savart-Kraft II

Das Drehmoment auf eine Leiterschleife in einem homogenen Magnetfeld kann durch summieren der Kraftanteile auf die vier Segmente berechnet werden.



Seitenansicht

Ansicht von vorne

Berechnung der Kräfte

*Drehmoment auf eine Leiterschleife im homogenen Magnetfeld*



## Beispiele Biot-Savart-Kraft III

Bezüglich 0 ist die Situation symmetrisch. Die in der Zeichnung vertikalen Leiterelemente liefern kollineare sich aufhebende Kräfte. Die horizontalen Segmente ergeben das Drehmoment

$$\begin{aligned} d\vec{M} &= (\vec{r}_1 + \vec{r}_3) \times d\vec{F}_1 + (\vec{r}_1 + \vec{r}_4) \times d\vec{F}_1 \\ &\quad + (\vec{r}_2 + \vec{r}_3) \times d\vec{F}_2 + (\vec{r}_2 + \vec{r}_4) \times d\vec{F}_2 \\ &= 2 \cdot \vec{r}_1 \times d\vec{F}_1 + 2 \cdot \vec{r}_2 \times d\vec{F}_2 \end{aligned} \quad (74)$$

Das gesamte **Drehmoment** ist

$$\vec{M} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = 2 \cdot \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 \quad (75)$$



## Beispiele Biot-Savart-Kraft IV

Das Drehmoment  $\vec{M}$  liegt in der Ebene der Leiterschleife. Wenn  $\phi$  der Winkel zwischen der Normalen auf die Ebene der Leiterschleife und  $\vec{B}$  ist, gilt mit  $F_1 = a \cdot I \cdot B$ :

$$M = 2 \frac{b}{2} \sin \phi \cdot F_1 = a \cdot b \cdot I \cdot \sin \phi \cdot B \quad (76)$$

Wir definieren das **magnetische Moment**  $\vec{m}$  so, dass es senkrecht auf die Ebene der Leiterschleife steht und dass  $|\vec{m}| = \text{Fläche} \cdot \text{Strom} = a \cdot b \cdot I$  ist. Damit ist

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B} \quad (77)$$

Das Drehmoment auf eine Leiterschleife im homogenen Magnetfeld wird in **Drehspulinstrumenten**, in **Motoren** oder bei der Sichtbarmachung von Magnetfeldern mit Eisenfeilspänen verwendet.



## Beispiele Biot-Savart-Kraft V

Die potentielle Energie einer um den Winkel  $\phi$  gegenüber dem Magnetfeld verdrehten stromdurchflossenen Leiterschleife wird berechnet, indem man von  $\phi = 0$  ausgeht und die Schleife langsam zum Winkel  $\phi$  dreht. Die Arbeit, um von  $\phi'$  nach  $\phi' + d\phi'$  zu drehen ist

$$dU = 2 \cdot F_1 \sin \phi' \cdot \frac{b}{2} \cdot d\phi' = a \cdot b \cdot I \cdot B \cdot \sin \phi' \cdot d\phi' \quad (78)$$

$$U(\phi) = a \cdot b \cdot I \cdot B \cdot \int_0^\phi \sin \phi' \cdot d\phi' = -a \cdot b \cdot I \cdot B \cdot (\cos \phi - 1) \quad (79)$$

Wenn wir  $U(\phi = \pi/2) = 0$  wählen haben wir

$$U = -\vec{m} \cdot \vec{B} \quad (80)$$



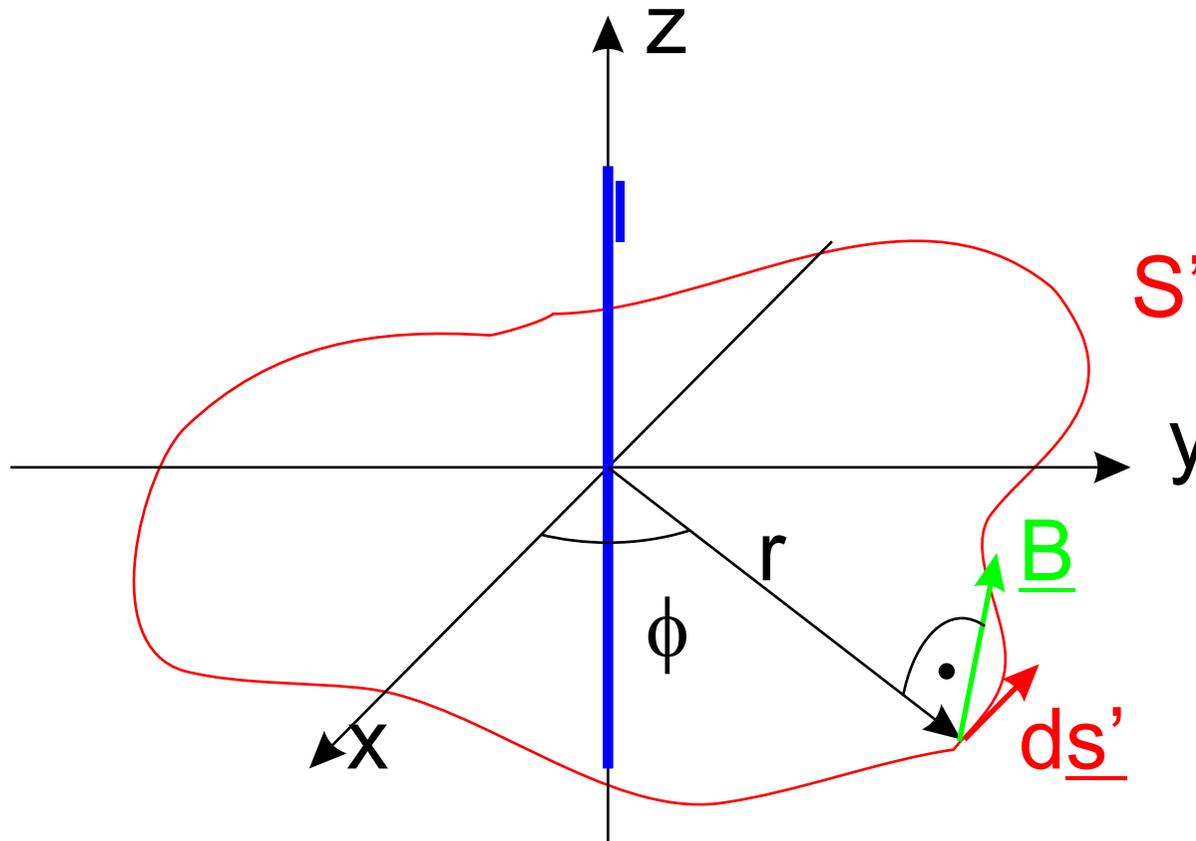
## Ampèresches Durchflutungsgesetz

### Ampèresches Durchflutungsgesetz

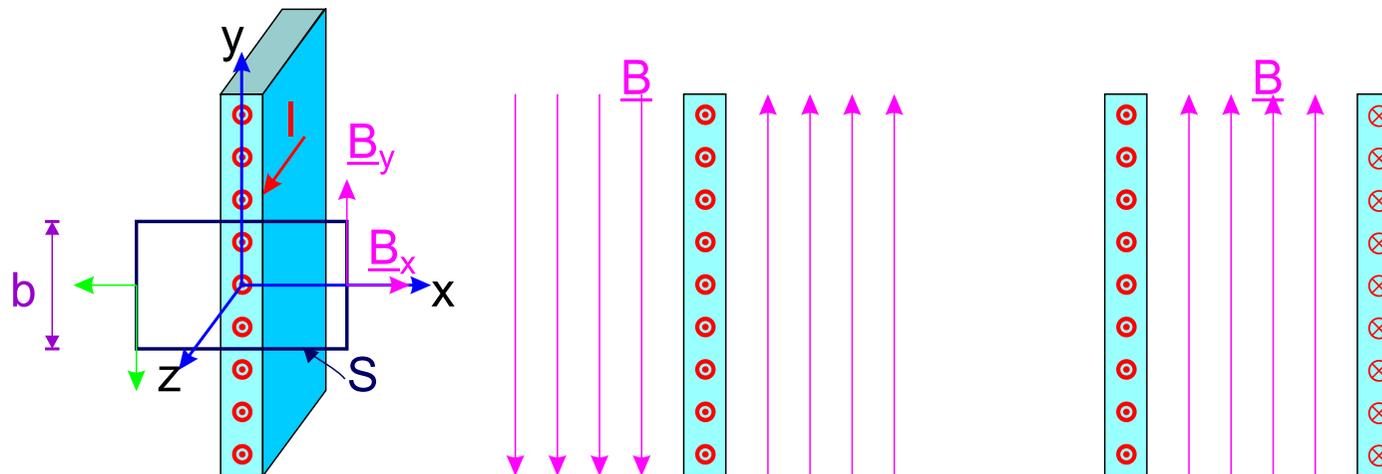
$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \iint_{A(S)} \vec{i} \cdot d\vec{a} \quad (81)$$



## Ampèresches Durchflutungsgesetz II



## Ampèresches Durchflutungsgesetz: parallele Ströme



*Magnetfeld einer homogenen Stromverteilung in einer dünnen Platte. Links: die Geometrie zur Berechnung, Mitte: das Magnetfeld eines homogenen Stromflusses und Rechts: das Magnetfeld zweier antiparallel von Strom durchflossener Platten.*

## Ampèresches Durchflutungsgesetz: parallele Ströme II

Wir definieren eine lineare Stromdichte  $j = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{I(\Delta y)}{\Delta y}$ . Das Stromfeld können wir uns als Parallelschaltung vieler linearer Leiter vorstellen. Aus dem Superpositionsprinzip folgt, dass

$$\vec{B}_z \equiv 0 \quad (82)$$

Das resultierende Feld dieser Superposition muss in der  $xy$ -Ebene liegen. Auf den beiden Seiten senkrecht zur Platte finden sich immer zwei Stromfäden, die die  $x$ -Komponente kompensieren. Wenn wir später das Ampèresche Gesetz auf diese beiden Seiten anwenden, gibt es keine Komponente von  $\vec{B}$  parallel zur Seite: dieser Teil des Linienintegrals ist null.



## Ampèresches Durchflutungsgesetz: parallele Ströme III

Wir betrachten weiter das Feld  $\vec{B}_x(x)$  und  $\vec{B}_y(x)$  im Abstand  $x$  von der Platte. Wir werden zwei Symmetrieoperationen an:

- Wir drehen die Platte um  $\pi$  um die  $z$ -Achse. Die neue Situation (Ströme) ist identisch mit der Ursprungssituation. Deshalb muss  $\vec{B}(x) = -\vec{B}(-x)$  sein.
- Wir drehen die Platte um  $\pi$  um die  $y$ -Achse und drehen gleichzeitig die Flussrichtung des Stromes um  $j \rightarrow -j$ . Die Endsituation ist ununterscheidbar von der am Anfang. Also gilt auch  $\vec{B}_x(-x) = \vec{B}_x(x)$  und  $B_y(-x) = -B_y(x)$ .



## Ampèresches Durchflutungsgesetz: parallele Ströme IV

Mit den beiden Symmetrieüberlegungen folgt:

$$\vec{B}_x(x) \equiv 0 \quad (83)$$

Um  $\vec{B}_y$  zu bestimmen, nehmen wir an, dass unser Integrationspfad  $S$  symmetrisch bezüglich der Platte ist. Das Ampèresche Gesetz sagt

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = 2B_y(x) \cdot b + 2 \cdot 0 = \mu_0 \iint \vec{i} d\vec{f} = \mu_0 \cdot j \cdot b$$

Das Resultat ist unabhängig von  $x$  und homogen im Raum.



## Ampèresches Durchflutungsgesetz: parallele Ströme V

Die Magnetfeldlinien sind parallel zur Platte und links und rechts antiparallel (siehe Abbildung oben Mitte).

$$B_y = \frac{\mu_0}{2} j \quad (84)$$

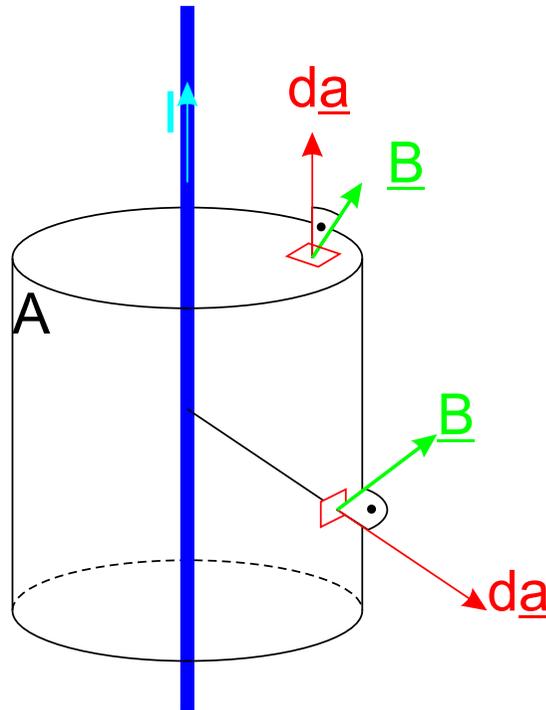
Bei zwei antiparallel von Strom durchflossenen Platten ist das Magnetfeld auf den Raum zwischen den Platten beschränkt.

$$B = \mu_0 j \quad (85)$$

**Anwendungsbeispiele:** Streifenleiter, Koaxialkabel



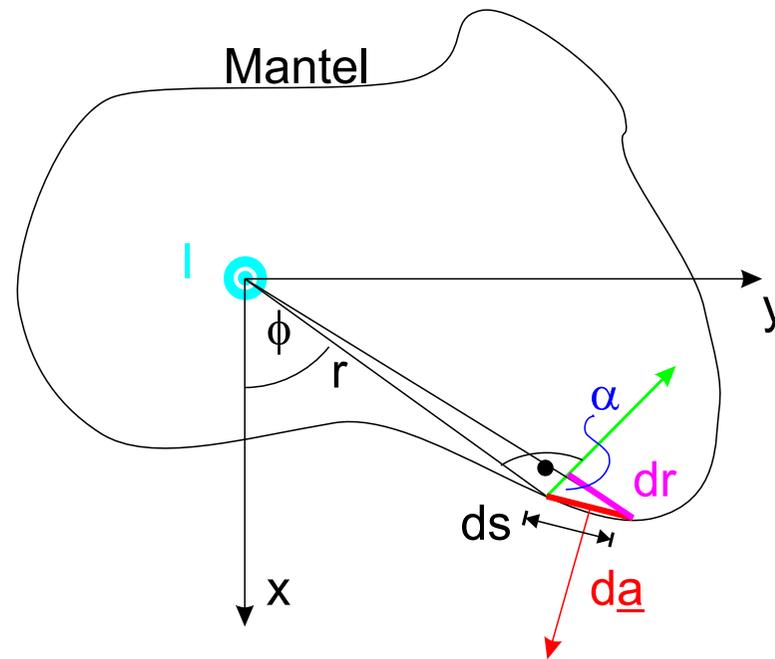
## Quellenfreiheit



*Integrationsfläche zur Analyse der Quellenfreiheit des Magnetfeldes*



## Quellenfreiheit II



*Integration über die Mantelfläche.*

## Quellenfreiheit III

### Quellenfreiheit des Magnetfeldes

$$\iint_A \vec{B} \cdot d\vec{s} = \iiint_{V(A)} \operatorname{div} \vec{B} \, dV \quad (86)$$

oder in differentieller Form

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (87)$$



## Vektorpotential

Zu jedem Vektorpotential  $\vec{A}$  kann ein Vektorpotential  $\vec{A}'$  gefunden werden, so dass  $\text{div } \vec{A} = 0$  ist

Das zu einer realen physikalischen Situation gehörende Vektorpotential  $\vec{A}$  ist nicht eindeutig bestimmt. Die Wahl eines der zur gleichen Lösung von  $\vec{B}$  gehörenden Potentiale nennt man **Eichung**

In der **Relativitätstheorie** und in der **Quantenmechanik** rechnet man bevorzugt mit dem Vektorpotential.



# Hall-Effekt

