



ulm university universität
uulm

Vorlesungsskript

Grundlagen der Physik IIIb Elektrizitätslehre Diplom Physik Diplom Wirtschaftsphysik Lehramt Physik

Othmar Marti
Institut für Experimentelle Physik
Universität Ulm

13. Oktober 2011

Für Gabriela

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	9
1.1. Dank	9
1.2. Übungsblätter, Testfragen, Folien und Versuche	9
1.3. Literaturhinweise	13
1.4. Begriffe	13
2. Elektrostatik	23
2.1. Elektrische <i>Ladung</i> und Coulombsches Gesetz	24
2.2. Das elektrische Feld	26
2.3. Zusammenhang zwischen <i>Ladung</i> und Feld: das Gauss'sche Gesetz	30
2.3.1. Dipole in elektrischen Feldern	32
2.4. Elektrische Felder von Leitern	33
2.4.1. Influenz und Bildladung	39
2.5. Elektrostatistisches Potential	40
2.6. Poisson-Gleichung	47
2.7. Kapazität: eine geometrische Eigenschaft	48
2.8. Energie des elektrischen Feldes	52
2.9. Elektrische Eigenschaften der Materie	54
2.9.1. Dielektrika	56
2.9.2. Elektrische Phänomene	61
2.10. Zusammenfassung: die Grundgleichungen der Elektrostatik	63
3. Elektrische Ströme	67
3.1. Die Kontinuitätsgleichung und der Begriff des Stromes	68
3.2. Das Ohmsche Gesetz	72
3.3. Elektromotorische Kraft und Joulesche Wärme	77
3.4. RC-Stromkreise	79
3.5. Magnetfeld und Lorentzkraft	81
3.6. Die magnetische Kraft	82
3.6.1. Ladungsinvarianz bewegter Bezugssysteme	83
3.6.2. Relativistische Berechnung	84
3.7. Eigenschaften des B-Feldes	87
3.7.1. Das Ampèresche Durchflutungsgesetz	92
3.7.2. Quellenfreiheit	95
3.7.3. Das B-Feld einer beliebigen Stromverteilung	97
3.8. Hall-Effekt	98
3.9. Die Lorentz-Transformation der Felder E und B	100
3.10. Zusammenfassung: Ströme	103

4. Elektrodynamik: zeitlich veränderliche Magnetfelder	107
4.1. Das Faradaysche Induktionsgesetz	107
4.1.1. Eine bewegte Leiterschleife in einem stationären B-Feld	107
4.1.2. Der magnetische Fluss	108
4.1.3. Induktionsgesetz von Faraday, Integral- und Differentialform	111
4.1.4. Wirbelströme	113
4.1.5. Transformator	113
4.1.6. Kirchhoffsche Gesetze	117
4.1.7. Wechselstromkreise, Impedanzen	118
4.1.8. Elektromotoren	122
4.1.9. Betatron	125
4.1.10. Skin-Effekt	127
4.2. Energie des Magnetfeldes	128
4.3. Magnetische Eigenschaften der Materie	129
4.3.1. Kugeln im inhomogenen Magnetfeld	129
4.3.2. Der Satz von Larmor	131
4.3.3. Diamagnetismus	134
4.3.4. Magnetisierung	136
4.3.5. Das magnetische Moment des Elektrons: Spin	137
4.3.6. Paramagnetismus	138
4.3.7. Ferromagnetismus	140
4.4. Zusammenfassung: Elektrodynamik: zeitlich veränderliche Magnetfelder	143
5. Die Maxwellschen Gleichungen	147
6. Elektromagnetische Wellen	153
6.1. Die Wellengleichung im Vakuum	153
6.2. Elektromagnetische Wellen im Doppelleitersystem	155
6.2.1. Wellenwiderstand	158
6.2.2. Stehende Wellen	159
6.3. Poynting-Vektor und Energiefluss	159
6.4. Elektromagnetische Wellen im Raum	160
6.5. Zusammenfassung	164
A. Mathematische Sätze	165
A.1. Vektoridentitäten	165
A.1.1. Produkte mit Vektoren	165
A.1.2. Ableiten von Vektoren	166
A.1.3. Vektorableitungen bei Skalarfeldern	166
A.1.4. Vektorableitungen bei Vektorfeldern	167
A.1.5. Totale Ableitung bei mitgeführten Koordinatensystemen	168
A.2. Satz von Gauss	169
A.3. Satz von Green	169
A.4. Satz von Stokes	169
B. Berechnung elektrischer Felder	171
B.1. In der Nähe eines Leiterstückes	171
B.2. Auf der Symmetrieachse einer Kreisscheibe	173

B.3. Innerhalb und ausserhalb einer geladenen Zylinderfläche	174
B.4. In allen Bereichen zweier koaxialer zylinderförmiger Leiter	175

1. Einleitung

1.1. Dank

Ich habe mich über alle Kommentare und Anregungen zu diesem Skript vor allem von Studierenden gefreut. Ich bin Herrn Nils Tobias Krämer sehr dankbar für das sorgfältige Durchlesen des Skripts.

1.2. Übungsblätter, Testfragen, Folien und Versuche

Übungsblätter

- Seminar vom 16. 10. 2003: Aufgabenblatt 01 ([HTML](#) oder [PDF](#))
- Seminar vom 30. 10. 2003: Aufgabenblatt 02 ([HTML](#) oder [PDF](#))
- Seminar vom 13. 11. 2003: Aufgabenblatt 03 ([HTML](#) oder [PDF](#))
- Seminar vom 27. 11. 2003: Aufgabenblatt 04 ([HTML](#) oder [PDF](#))
- Seminar vom 11. 12. 2003: Aufgabenblatt 05 ([HTML](#) oder [PDF](#))
- Seminar vom 15. 01. 2004: Aufgabenblatt 06 ([HTML](#) oder [PDF](#))
- Seminar vom 29. 01. 2004: Aufgabenblatt 07 ([HTML](#) oder [PDF](#))
- Klausur vom 19. 2. 2004 ([HTML](#) oder [PDF](#))
[Das Resultat](#)
- Nachklausur vom ??? ([HTML](#) oder [PDF](#))

Frageblätter

- [Frageblätter zum Thema Elektrostatik](#)

Folien

- [Folien zur Vorlesung vom 16. 10. 2003: PDF](#)
- [Folien zur Vorlesung vom 23. 10. 2003: PDF](#)
- [Folien zur Vorlesung vom 30. 10. 2003: PDF](#)
- [Folien zur Vorlesung vom 06. 11. 2003: PDF](#)
- [Folien zur Vorlesung vom 13. 11. 2003: PDF](#)
- [Folien zur Vorlesung vom 20. 11. 2003: PDF](#)

- Folien zur Vorlesung vom 27. 11. 2003: PDF
- Folien zur Vorlesung vom 04. 12. 2003: PDF
- Folien zur Vorlesung vom 11. 12. 2003: PDF
- Folien zur Vorlesung vom 18. 12. 2003: PDF
- Folien zur Vorlesung vom 08. 01. 2004: PDF
- Folien zur Vorlesung vom 15. 01. 2004: PDF
- Folien zur Vorlesung vom 22. 01. 2004: PDF
- Folien zur Vorlesung vom 29. 01. 2004: PDF
- Folien zur Vorlesung vom 05. 02. 2004: PDF
- Folien zur Vorlesung vom 12. 02. 2004: PDF

Übungsblätter und Folien werden in der Regel in der Vorlesung zugänglich gemacht_.

Versuche

16.10.2003

- **Versuch zur Vorlesung:** [Entfernen eines Klebestreifens von einem Elektrometer](#)
- **Versuch zur Vorlesung:**
Ladungstrennung (Versuchskarte ES-25)
- **Versuch zur Vorlesung:**
Reibungselektrizität (Versuchskarte ES-15)
- **Versuch zur Vorlesung:**
Ladungen löffeln (Versuchskarte ES-13)
- **Versuch zur Vorlesung:**
Coulomb-Gesetz (Versuchskarte ES-31)

23.10.2003

- **Versuch zur Vorlesung:**
1 Coulomb (Versuchskarte EM-7)
- **Versuch zur Vorlesung:**
Elektrische Feldlinien (Versuchskarte ES-4)
- **Versuch zur Vorlesung:**
Applet zu elektrostatischen Feldern (Versuchskarte)

30.10.2003

- **Versuch zur Vorlesung:**
Drehmoment auf elektrischen Dipol (Versuchskarte ES-30)
- **Versuch zur Vorlesung:**
Faraday-Becher (Versuchskarte ES-9)

- **Versuch zur Vorlesung:**
Faraday-Käfig (Versuchskarte ES-21)
- **Versuch zur Vorlesung:**
Van-de-Graaff-Generator (Versuchskarte ES-19)

6.11.2003

- **Versuch zur Vorlesung:**
Flächenladungsdichte (Versuchskarte ES-8)
- **Versuch zur Vorlesung:**
Kapazität von Kugeln (Versuchskarte ES-27)

13.11.2003

- **Versuch zur Vorlesung:**
Reihen- und Parallelschaltung von Kapazitäten (Versuchskarte EM-48)
- **Versuch zur Vorlesung:** Energie im Kondensator

20.11.2003

- **Versuch zur Vorlesung:**
Spannungswaage (Kirchhoffsche Waage) (Versuchskarte ES-16)
- **Versuch zur Vorlesung:**
Plattenkondensator mit Dielektrikum (Versuchskarte ES-3)
- **Versuch zur Vorlesung:**
Steighöhe im Kondensator (Versuchskarte ES-12)

27.11.2003

- **Versuch zur Vorlesung:**
Strom-Spannungs-Kennlinie (Versuchskarte EM-83)
- **Versuch zur Vorlesung:**
Ohmscher Leiter (Versuchskarte EM-117)

4.12.2003

- **Versuch zur Vorlesung:**
Leitfähigkeit (Versuchskarte EM-172)
- **Versuch zur Vorlesung:**
EMK des Daniell-Elementes (Versuchskarte TH-44)
- **Versuch zur Vorlesung:**
Entladen eines Kondensators (Versuchskarte EM-145)
- **Versuch zur Vorlesung:**
Kraft zweier stromdurchflossener Leiter (Versuchskarte EM-63)
- **Versuch zur Vorlesung:**
Lorentzkraft auf stromdurchflossenen Leiter (Versuchskarte Applet)
- **Versuch zur Vorlesung:**
Fadenstrahlrohr (Versuchskarte EM-11)

11.12.2003

- **Versuch zur Vorlesung:**
Magnetische Feldlinien (Versuchskarte EM-50)
- **Versuch zur Vorlesung:**
Elektromotor (Versuchskarte Applet)
- **Versuch zur Vorlesung:**
Lorentz-Kraft (Versuchskarte EM046)

18.12.2003

- **Versuch zur Vorlesung:**
Barlowsches Rad (Versuchskarte EM004)
- **Versuch zur Vorlesung:**
Magnetfeld von Leitern (Versuchskarte Em021)
- **Versuch zur Vorlesung:**
Halleffekt (Versuchskarte EM023)
- **Versuch zur Vorlesung:**
Induktion (Versuchskarte EM025)
- **Versuch zur Vorlesung:**
Induktion im Erdfeld (Versuchskarte EM027)

8.1.2004

- **Versuch zur Vorlesung:**
Tesla-Transformator (Versuchskarte EM064)
- **Versuch zur Vorlesung:**
Magnetische Induktion (Versuchskarte EM051)
- **Versuch zur Vorlesung:**
Fallrohre (Versuchskarte EM057)

15.1.2004

- **Versuch zur Vorlesung:**
Funkeninduktor (Versuchskarte EM017)
- **Versuch zur Vorlesung:**
Hochspannungsleitung (Versuchskarte EM161)
- **Versuch zur Vorlesung:**
Transformatorenversuche (Versuchskarte EM066)
- **Versuch zur Vorlesung:**
Wechselstromwiderstand (Versuchskarte EM053)
- **Versuch zur Vorlesung:**
Elektrischer Schwingkreis (Versuchskarte Em056)
- **Versuch zur Vorlesung:**
Elektromotor und -generator (Versuchskarte EM101)

22.1.2004

- **Versuch zur Vorlesung:**
Linearmotor (Versuchskarte EM113)

- **Versuch zur Vorlesung:**
Betatron (Versuchskarte EM167)
- **Versuch zur Vorlesung:**
Dia- und Paramagnetismus (Versuchskarte EM177)

30.1.2003

- **Versuch zur Vorlesung:**
Magnetische Bezirke (Versuchskarte EM178)
- **Versuch zur Vorlesung:**
Ferromagnetismus - Modellversuch (Versuchskarte EM175)

5.2.2004

- **Versuch zur Vorlesung:**
Lecherleitung (Versuchskarte SW025)
- **Versuch zur Vorlesung:**
Koaxialleitung (Versuchskarte SW085)
- **Versuch zur Vorlesung:**
Hertzscher Dipol (Versuchskarte SW099)
- **Versuch zur Vorlesung:**
Stehende Wellen (Versuchskarte SW032)

1.3. Literaturhinweise

Die Vorlesung orientiert sich an den Werken von Tipler[Tip94], Physik, Leisi[Lei98], Klassische Physik, Alonso-Finn[AF00], Gerthsen/Vogel[GV95], Physik und, als leichtere Einführung das Buch von Halliday[HRW03]. Zum Aufarbeiten des gelernten Stoffes (nicht als Einsteigerliteratur) kann auch Kneubühls[Kne74] "Repetitorium der Physik" empfohlen werden. Mathematische Probleme und Formeln sind sehr schön im Bronstein[BSMM00] zusammengefasst. Dieses Skript gibt es auch als [PDF-Datei](#) und als [Web-Site](#).

Eine wunderbare Website zum Aufarbeiten Ihres Wissens ist [Hyperphysics](#) von R. Nave. Ergänzend gibt es vom gleichen Autor auch [Hypermath](#).

1.4. Begriffe

Symbol	Name	Einheit	Bemerkungen
$\langle f \rangle$	Mittelung über f	–	
α	atomare Polarisierbarkeit	$\frac{C^2 m}{N} = \frac{C m^2}{V} = F m^2 = \frac{A s m^2}{V}$	
α	Winkel (z.B. zwischen Geschwindigkeit und der Oberflächennormalen der Referenzfläche)	1	

Symbol	Name	Einheit	Bemerkungen
a	Abstand einer Ladung zur Oberfläche, Radius	m	
a	Dicke eines Dielektrikums	m	
a	Länge einer Leiterschleife in einem Motor	m	
da	Oberflächenelement in Integralen	m^2	
\mathbf{a}	Beschleunigung	$\frac{m}{s^2} = \frac{N}{kg}$	
A	Fläche	m^2	
A	Fläche des Plattenkondensators	m^2	
\mathbf{A}	Vektorpotential	$Tm = \frac{N}{A} = \frac{mkg}{As^2} = \frac{Vs}{m}$	
β	reduzierte Geschwindigkeit	1	$\beta = \frac{v}{c}$
b	Breite eines Dielektrikums	m	
b	Breite einer Leiterschleife in einem Motor	m	
h	Breite des Leiters in einer Hall-Anordnung	m	
\mathbf{B}	magnetische Induktion	$T = \frac{N}{Am} = \frac{kg}{As^2} = \frac{Vs}{m^2}$	
c	Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	$\frac{m}{s}$	
C	Kapazität	$F = \frac{C}{V} = \frac{As}{V} = \frac{J}{V^2} = \frac{C^2}{J}$	
C	Curie-Konstante	$\frac{AK}{Tm} = \frac{A^2K}{N} = \frac{Am}{Vs} K$	
c_{ij}	Kapazität zwischen den Körpern i und j	F	
$\delta(t)$	Delta-Funktion für die Zeit	$\frac{1}{s}$	
$\delta(x)$	Delta-Funktion für den Ort	$\frac{1}{m}$	
δx	Längenelement	m	andere Schreibweise zu dx
Δ	Laplace-Operator	$\frac{1}{m^2}$	$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$
$d\mathbf{A}$	Flächenelement	m^2	
d	Abstand	m	

Symbol	Name	Einheit	Bemerkungen
d	Abstand der Platten im Plattenkondensator	m	
\mathbf{div}	Divergenz-Operator	$\frac{1}{m}$	$\mathbf{div} \mathbf{f} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z}$
\mathbf{D}	Dielektrische Verschiebung	$\frac{C}{m^2} = \frac{C}{Nm} = \frac{N}{Vm}$	
e	Elementarladung	C	$e = 1.6022 \times 10^{-19} C$
e	Basis des natürlichen Logarithmus	1	$e = 2.7182818284590$
ϵ	relative Dielektrizitätszahl	1	Im Allgemeinen ist ϵ ein Tensor. (heisst auch relative Dielektrizitätskonstante)
ϵ_0	Dielektrizitätskonstante des Vakuums	$\frac{C^2}{Nm^2} = \frac{C}{Vm} = \frac{N^2m}{V^2m}$	$\epsilon_0 = 8.8544 \times 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}$
$\mathbf{E}(\mathbf{r})$	elektrisches Feld	$\frac{N}{C} = \frac{V}{m}$	
$\mathbf{E}_{\text{lokal}}$	lokales elektrisches Feld	$\frac{N}{C} = \frac{V}{m}$	
E_0	elektrisches Feld ohne Dielektrikum	$\frac{N}{C} = \frac{V}{m}$	Verwendet bei Berechnungen mit dielektrischen Materialien
E_{pot}	potentielle Energie	$J = Nm$	
E_t	spezifische Haftenergie	$\frac{J}{m^2}$	
ϕ	eine der Koordinaten bei Kugelkoordinaten	1	Winkel gemessen von der x -Achse in der xy -Ebene (Längengrad)
φ	elektrostatisches Potential	$\frac{J}{C} = V$	
φ	Phase	1	
Φ	Fluss eines Vektorfeldes \mathbf{F}	Nm^2	In diesem Falle, Einheit hängt vom Vektorfeld ab
Φ_B	magnetischer Fluss	$1Wb = \frac{Nm}{A} = \frac{Tm^2}{As} = \frac{kgm^2}{As^2}$	
$f(x)$	Funktion	–	x ist ein Platzhalter

Symbol	Name	Einheit	Bemerkungen
\mathbf{F}	Kraft	N	
\mathbf{F}_L	Lorentzkraft	N	
F_M	magnetische Kraft	N	
\mathbf{F}_V	Kraftdichte	$\frac{N}{m^3}$	$\mathbf{F}_V = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}_V}{\Delta V}$
γ	relativistischer Korrekturfaktor	1	$\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$
grad	Gradienten-Operator	$\frac{1}{m}$	grad $f = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$
G	Leitwert	$S = \frac{A}{V} = \frac{1}{\Omega}$	
G	Gravitationskonstante	$\frac{m^3}{kg s^2}$	
h	Höhe der Mantelfläche	m	
h	Höhe des Leiters in einer Hall-Anordnung	m	
h	Plancksches Wirkungsquantum	$J s$	$h = 6.63 \times 10^{-34} J s$
\hbar	reduziertes Plancksches Wirkungsquantum	$J s$	$\hbar \approx 10^{-34} J s$
H	Magnetfeld	$\frac{A}{m}$	
\mathbf{i}	Stromdichte	$\frac{A}{m^2}$	
I	Strom	A	
I_{eff}	effektiver Strom	A	
I_{rms}	RMS-Strom	A	Leistungsgewichteter Strom, "Root Mean Square"-Strom
j	lineare Stromdichte	$\frac{A}{m}$	$j = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{I(\Delta y)}{\Delta y}$
k	Federkonstante	$\frac{N}{m}$	
k	beliebige, auch komplexe Zahl	1	
k_B	Boltzmann-Konstante	$\frac{J}{K}$	
K	Vorfaktor	1	
λ	mittlere freie Weglänge	m	

Symbol	Name	Einheit	Bemerkungen
λ	Linienladungsdichte	$\frac{C}{m}$	
ℓ	Abstand von $-q$ zu $+q$ im Dipol	m	
ℓ	Drehimpuls	$\frac{m^2 kg}{s}$	
L	Länge	m	
L	Selbstinduktion oder Selbstinduktivität einer Spule	$H = \frac{Wb}{A} = \frac{Tm^2}{A} = \frac{kgm^2}{A^2 s^2} = \frac{Vs}{A} = \Omega s$	
μ_0	Induktionskonstante	$\frac{Ns^2}{C^2} = \frac{N}{A^2} = \frac{H}{m}$	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{N}{A^2}$
m	Masse	kg	
\mathbf{m}	magnetisches Moment	Am^2	
m_z	magnetisches Moment in z -Richtung	Am^2	
M	Gesamtmasse aller Ionen	kg	
M_{12}	Gegeninduktivität zwischen zwei Spulen	$H = \frac{Wb}{A} = \frac{Tm^2}{A} = \frac{kgm^2}{A^2 s^2} = \frac{Vs}{A} = \Omega s$	
M_{Mol}	Molmasse	$\frac{kg}{Mol}$	
\mathbf{M}	makroskopische Magnetisierung	$\frac{A}{m}$	
\mathbf{M}	Drehmoment	Nm	
ν	Frequenz	$Hz = \frac{1}{s}$	
n	Ladungsträgerdichte	$\frac{1}{m^2}$	
n	spezifische Windungszahl einer Spule	$\frac{1}{m}$	$n = \frac{N}{\ell}$
\mathbf{n}	Normalenvektor auf ein Flächenelement	1	
N	Dichte der induzierten Dipole	$\frac{1}{m^3}$	
N	Windungszahl einer Spule	1	
N_A	Avogadrozahl	$\frac{1}{Mol}$	$N_A = 6.02 \times 10^{23} \frac{1}{Mol}$
\mathbf{p}	Dipolmoment	Cm	
\mathbf{p}	Impuls (mechanisch)	$\frac{kgm}{s} = Ns$	

Symbol	Name		Einheit	Bemerkungen
p_{ind}	induziertes Dipolmoment	Dipolmoment	$Cm = Asm = \frac{Nm^2}{V}$	
P	Leistung		$W = \frac{J}{s} = \frac{Nm}{s} = \frac{m^2kg}{s^3}$	z.B. Verlustleistung am Widerstand
\mathbf{P}	Polarisation		$\frac{C}{m^2} = \frac{As}{m^2} = \frac{Nm}{Vm}$	
P_M	Leistung des Motors		$W = \frac{Nm}{s} = \frac{m^2kg}{s^3}$	
q	Ladung		$C = As = \frac{Nm}{V}$	
Q	Ladung		$C = As = \frac{Nm}{V}$	andere Schreibweise für q
ρ	Massedichte		$\frac{kg}{m^3}$	
ρ_{el}	elektrische Ladungsdichte	Ladungsdichte	$\frac{C}{m^3} = \frac{Pa}{V}$	Siehe auch Gleichung (2.9)
ρ	spezifischer Widerstand		$\Omega m = \frac{Vm}{A} = \frac{m}{S}$	
ρ	Abstand		m	
\mathbf{r}	Abstand, Ortsvektor		m	
r_0	Referenzradius		m	
rot	Rotations-Operator		$\frac{1}{m}$	$\mathbf{rot} \mathbf{f} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_y}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial y} \\ \frac{\partial f_z}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial z} \\ \frac{\partial f_x}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial x} \end{pmatrix}$
R	Widerstand		$\Omega = \frac{V}{A}$	
R^*	Wellenwiderstand		$\Omega = \frac{V}{A}$	
R	Radius		m	
σ	Oberflächenladungsdichte		$\frac{C}{m^2}$	
σ	Influenzladungsdichte an der Oberfläche		$\frac{C}{m^2}$	
σ	(spezifische) Leitfähigkeit	Leitfähigkeit	$\frac{S}{m} = \frac{A}{Vm} = \frac{1}{\Omega m}$	Im Allgemeinen ist die Leitfähigkeit ein Tensor
$\sigma_{Maxwell}$	Maxwellspannung (mechanische Spannung)		$\frac{N}{m^2}$	$\sigma_{Maxwell} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta A}$

Symbol	Name	Einheit	Bemerkungen
s	Schleife, ein Weg	m	
\mathbf{s}	Spin	$J s$	
$d\mathbf{s}$	Längenelement	m	
S	Bezugssystem für relativistische Rechnung	–	
S'	Bezugssystem für relativistische Rechnung	–	
S^+	Bezugssystem für relativistische Rechnung	–	
S^-	Bezugssystem für relativistische Rechnung	–	
\mathbf{S}	Poynting-Vektor	$\frac{J}{m^2 s} = \frac{N}{m s}$	
Θ	eine der Koordinaten bei Kugelkoordinaten	1	Winkel gemessen von der z -Achse (Breitengrad, von Norden gemessen)
τ	Mittlere Zeit zwischen zwei Stößen, Relaxationszeit	s	
τ	Abklingzeitkonstante eines RC -Gliedes	s	
τ	Zeit unter Integralen	s	
t	Zeit	s	
Δt	kleine Zeitdifferenz	s	
T	Periodendauer einer periodischen grösse	s	
T	Temperatur	K	
U	Spannung, auch elektrostatisches Potential	$\frac{J}{C} = V$	
U_{grav}	Gravitationspotential	$\frac{J}{kg} = \frac{m^2}{s^2}$	
U_C	Spannung am Kondensator	$V = \frac{Nm}{As}$	
U_{eff}	effektive Spannung	V	
U_{rms}	RMS-Spannung	V	Leistungsgewichtete Spannung, "Root Mean Square"-Spannung
U_{EMK}	elektromotorische Kraft	$V = \frac{Nm}{As}$	

Symbol	Name	Einheit	Bemerkungen
U_{Hall}	Hallspannung	$V = \frac{Nm}{As}$	
U_R	Spannung am Widerstand	$V = \frac{Nm}{As}$	
v_j	Geschwindigkeit des j -ten Ladungsträgers	$\frac{m}{s}$	
v_s	Abziehggeschwindigkeit Klebestreifen	$\frac{m}{s}$	
\mathbf{V}	Hilfsvektorpotential	$Tm = \frac{N}{A} = \frac{mkg}{As^2} = \frac{Vs}{m}$	
dV	Volumenelement	m^3	
ω	Kreisfrequenz	$\frac{1}{s}$	$\omega = 2\pi\nu$
Ω	Larmorwinkelgeschwindigkeit	$\frac{1}{s}$	
w_{el}	elektrische Energiedichte	$\frac{J}{m^3} = \frac{N}{m^2}$	
w_B	Energiedichte des Magnetfeldes	$\frac{J}{m^3} = \frac{N}{m^2}$	
W	Arbeit	$J = Nm$	
W_{el}	elektrische Arbeit	$J = Nm$	
W_{mech}	mechanische Arbeit	$J = Nm$	
W_{Batt}	Arbeit der Batterie	$J = Nm$	
ξ	Ersatz für x in Integralen	m	
χ_e	dielektrische Suszeptibilität	1	Im Allgemeinen ist χ_e ein Tensor
\mathbf{x}	Ortsvektor	m	
x	Koordinate im kartesischen Koordinatensystem	m	
X_C	Impedanz der Kapazität oder kapazitiver Widerstand	Ω	
X_L	Impedanz der Spule oder induktiver Widerstand	Ω	
y	Koordinate im kartesischen Koordinatensystem	m	
z	Koordinate im kartesischen Koordinatensystem	m	

Symbol	Name	Einheit	Bemerkungen
Z	Kernladungszahl	1	

2. Elektrostatik

Dieser Stoff wurde am 21. 10. 2004 behandelt



Materialien

Folien zur Vorlesung vom 21. 10. 2004: PDF

Seminar vom 21. 10. 2004: Aufgabenblatt 01 (HTML oder PDF)

Frageblätter zum Thema Elektrostatik

Elektrostatik wird benötigt, um

- die Wirkung von Klebestreifen,
- die Ladungstrennung beim Ausgiessen,
- die Funktion von Elektronenröhren,
- die Funktion der Braunschen Röhre und
- die Funktion des Kondensators

beschreiben.



Versuch zur Vorlesung: Entfernen eines Klebestreifens von einem Elektrometer

Versuch zur Vorlesung:

Ladungstrennung (Versuchskarte ES-24)



Versuch zur Vorlesung:

Ladungstrennung (Versuchskarte ES-25)

Die *Elektrostatik* befasst sich mit der Wechselwirkung elektrisch geladener Körper. Seit dem Altertum ist bekannt, dass Körper sich durch reiben aufladen können. Wo haben Sie sich schon aufgeladen? Staub oder kleine Teilchen bleiben an aufgeladenen Körpern hängen. Sie werden auch gegen die Gravitationskraft angezogen.

Die Kraft zwischen *Ladungen* kann stärker als die Gravitationskraft sein.

Es gibt auch Situationen, wo sich durch Reibung geladene Teilchen abstossen.

Es gibt mindestens zwei Arten von *Ladungen*!

Versuch zur Vorlesung:



Reibungselektrizität (Versuchskarte ES-15)

Genaue Untersuchungen haben gezeigt, dass es **genau zwei Arten von *Ladungen*** gibt. *Lichtenberg* benannte die *Ladungen* so, dass *Ladungen* auf geriebenen Glasstäben **positiv** genannt werden und *Ladungen* auf geriebenem Bernstein **negativ**.

- Zwei *Ladungen* ziehen sich an, wenn sie verschiedener Art sind (positiv und negativ oder negativ und positiv)
- Zwei *Ladungen* stoßen sich ab, wenn sie gleichnamig sind (positiv und positiv oder negativ und negativ)

Ladung ist eine extensive Grösse, das heisst, sie skaliert mit der Grösse des Systems.



Versuch zur Vorlesung:

Ladungen löffeln (Versuchskarte ES-13)

Genaue Messungen zeigen, dass für Elektronen die elektrostatischen Kräfte etwa 4.1681×10^{42} mal stärker als die Gravitationskräfte sind¹². Die Gravitationskräfte können also nur beobachtet werden, da die *Ladungen* sich im Mittel sehr genau kompensieren.

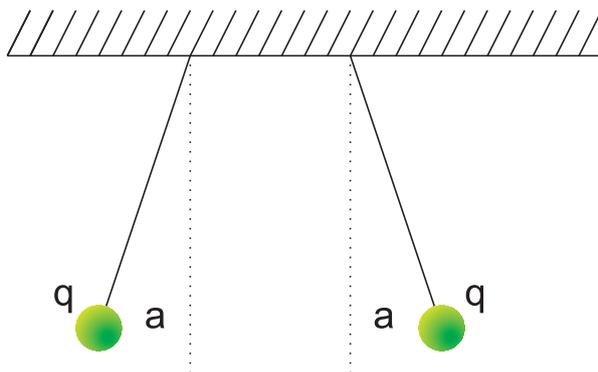
2.1. Elektrische *Ladung* und Coulombsches Gesetz

Dieser Stoff wurde am 21. 10. 2004 behandelt

(Siehe Tipler, Physik [Tip94, pp. 617]) (Siehe Kneubühl, Repetitorium der Physik [Kne74, pp. 189])

¹Gravitation: $F_G(r) = G \frac{m_e^2}{r^2} = 6.670 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2} \frac{(9.1091 \times 10^{-31} kg)^2}{r^2} = 5.5345 \times 10^{-71} Nm^2 r^{-2}$.

²Elektrostatische Kraft: $F_E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_e^2}{r^2} = \frac{1}{4\pi \cdot 8.8544 \times 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}} \frac{(1.6021 \times 10^{-19} C)^2}{r^2}$
 $= 2.3068 \times 10^{-28} Nm^2 r^{-2}$.



Auslenkung zweier mit identischer Ladung q geladener Kugeln.

Wenn zwei Kugeln mit der gleichen *Ladung* q geladen sind, werden sie nach aussen abgestossen. Wird die *Ladung* verändert, ändert sich die *Kraft* proportional.

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{F_1}{F_2} \quad (2.1)$$

Dabei wird angenommen, dass die *Ladungen Punktladungen* sind.

Ladungen werden in **Coulomb**, abgekürzt, **C**, angegeben.

Eine Messung der Kräfte mit einer Drehwaage (nach *Cavendish*) ergibt das folgende Gesetz

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = K \frac{q_1 \cdot q_2}{r_{12}^2} \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}} \quad (2.2)$$

wobei die Konstante vom Masssystem abhängt und im SI-System

$$K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \quad (2.3)$$

ist. Die Konstante ϵ_0 heisst *Dielektrizitätskonstante des Vakuums*. Ihre Grösse ist

$$\epsilon_0 = 8.8544 \times 10^{-12} \frac{C^2}{N m^2} \quad (2.4)$$

Indem man ϵ_0 festlegt, legt man die Grösse der Ladungseinheit fest. Im SI-System wurde $K = 10^{-7} c^2 = 8.9874 \cdot 10^9$ gesetzt, damit die elektrischen Grössen einen handhabbaren Zahlenwert haben. Mit dieser Definition folgt der Wert von ϵ_0 .

Dieses Gesetz kann durch folgende Überlegung erraten werden:

- $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ ist ein Vektorfeld.
- Der mathematische Fluss dieses Vektorfeldes durch ein Flächenelement $d\mathbf{A}$ ist $d\Phi(\mathbf{r}) = d\mathbf{A} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r})$, wobei die Richtung von \mathbf{A} die Richtung der Normalen zu diesem Flächenelement ist.
- Der gesamte Fluss durch die Kugeloberfläche $A(r) = 4\pi r^2$ ist durch $\Phi(r) = \iint_A d\Phi(\mathbf{r}) = \iint_A \mathbf{F}(\mathbf{r}) d\mathbf{A}$ gegeben.
- Da das Problem kugelsymmetrisch ist, kann $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ nicht von der Richtung abhängen und muss radial sein. Damit kann die Kraft vor das Integral genommen werden.

- $\Phi(r) = F(r) \iint_A dA = 4\pi r^2 F(r)$
- Wenn der Fluss des Vektorfeldes \mathbf{F} unabhängig von r sein soll, so muss die Kraft umgekehrt proportional zu r^2 sein.



Versuch zur Vorlesung:
Coulomb-Gesetz (Versuchskarte ES-31)

Das *Coulombsche Gesetz* lautet

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 \cdot q_2}{r_{12}^2} \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}} \quad (2.5)$$

Das Coulombsche Gesetz ist mathematisch äquivalent zum Gravitationsgesetz. Alle Aussagen über die Gravitation gelten auch für *Ladungen*, mit der Abweichung, dass *Ladungen* zwei Vorzeichen haben können.

Elektrostatische Kräfte sind additiv.

Ladungen sind nicht beliebig teilbar. Versuche von *Millikan* ergaben, dass die kleinste beobachtbare Ladung den Betrag $1.6022 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ hat. Diese Ladung ist auf

Elektronen $q = -e = -1.6022 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ (Masse: $m_e = 9.1096 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$) und

Protonen $q = e = 1.6022 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ (Masse: $m_p = 1.6726 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$)

zu finden. e heisst die Elementarladung. In Kernbauteilen, den Quarks, gibt es Ladungen vom Betrage $e/3$. Diese Ladungen sind aber nicht frei zu beobachten.

Ladungen können nur paarweise entstehen (jeweils die gleiche negative und positive *Ladung*). Die Gesamtladung in einem abgeschlossenen System ist konstant.

2.2. Das elektrische Feld



Dieser Stoff wurde am 28. 10. 2004 behandelt

Materialien

Folien zur Vorlesung vom 28. 10. 2004: PDF

Frageblätter zum Thema Elektrostatik

Wir wollen eine Formulierung finden, die die Stärke der elektrostatischen Kraft als eine Feldgröße mal die *Ladung* der Testladung beschreibt, also $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$. Damit haben wir eine Beschreibung der Elektrostatik, die unabhängig von der Testladung ist. Genauer formuliert hat man

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r})}{q} \quad (2.6)$$

Wir definieren

Das *elektrische Feld* der *Ladung* Q ist durch

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r_{12}^2} \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}} \quad (2.7)$$

gegeben.

\mathbf{E} ist das elektrische Feld und somit auch der Feldvektor des elektrischen Feldes³. Die Einheit von \mathbf{E} ist $[\mathbf{E}] = N/C = V/m$.⁴

	$E/\frac{N}{C} = \frac{V}{m}$
Stromleitung in Wohnhäusern	10^{-2}
Radiowellen	10^{-1}
Atmosphäre	10^2
Sonnenlicht	10^3
Unter einer Gewitterwolke	10^4
In einer Röntgenröhre	10^6
Laser	bis 10^{12}
Am Ort des Elektrons im Wasserstoffatom	$6 \cdot 10^{11}$
Auf der Oberfläche eines Urankerns	$2 \cdot 10^{21}$

Elektrische Felder in der Natur

Eine Verteilung von $N + 1$ Ladungen $q_i(\mathbf{r}_i)$ hat das elektrische Feld

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{i=0}^N \mathbf{E}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=0}^N \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} \quad (2.8)$$

Die obige Gleichung gilt für alle $\mathbf{r}_i \neq \mathbf{r}$, $i = 0 \dots N$. Für kontinuierliche Ladungsverteilungen führt man eine Ladungsdichte

$$\rho_{el}(\mathbf{r}) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta Q(\mathbf{r})}{\Delta V} \quad (2.9)$$

ein. Das resultierende elektrische Feld ist dann

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho_{el}(\mathbf{r})}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|^2} \frac{\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|} dV \quad (2.10)$$

³ g ist der Feldvektor des Gravitationsfeldes

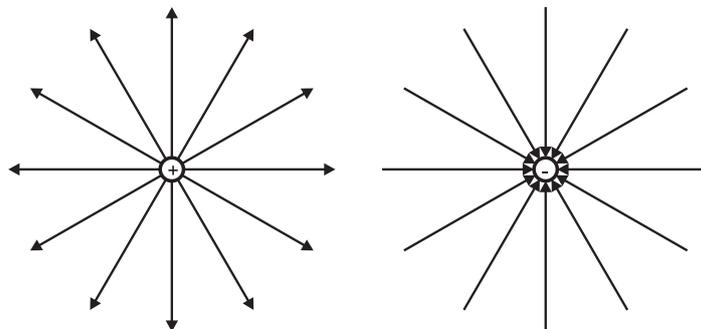
⁴Es ist $VA = W = Nm/s$ sowie $C/s = A$. Also ist $CV = AsV = Nm$ und damit $C = Nm/V$.

**Versuch zur Vorlesung:**

Elektrische Feldlinien (Versuchskarte ES-4)

Feldlinien dienen zur Visualisierung des elektrischen Feldes. Formal konstruiert man eine Feldlinie, indem man von einem Ausgangspunkt aus den Vektor des elektrischen Feldes abträgt und dann vom neuen Startpunkt aus wieder gleich verfährt. Zeichnet man quer zu den Feldlinien eine Linie und zählt, wie viele Feldlinien man pro Längeneinheit hat, ist dies ein Mass für die Feldstärke. Das Konzept der Feldlinien stammen von *Michael Faraday*.

Feldlinien laufen von der positiven *Ladung* zu der negativen *Ladung*.

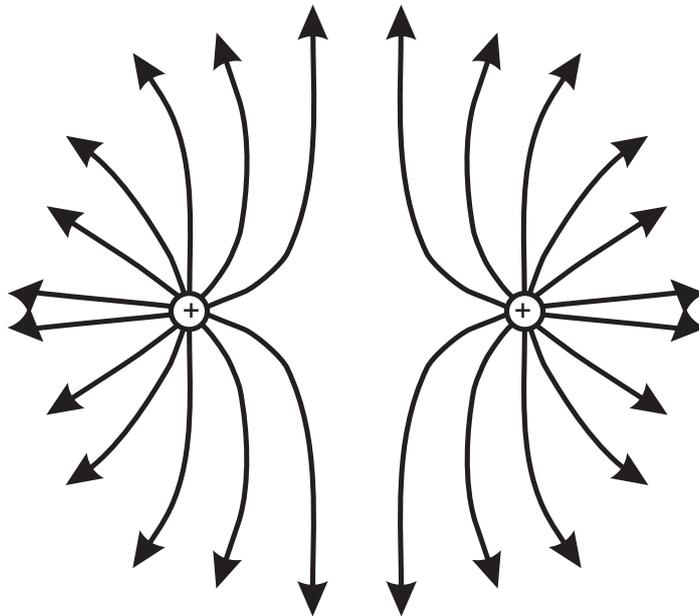


Feldlinien. Links von einer positiven Ladung, rechts von einer negativen Ladung. Die Feldlinien zeigen von der positiven Ladung zu der negativen Ladung.

**Versuch zur Vorlesung:**

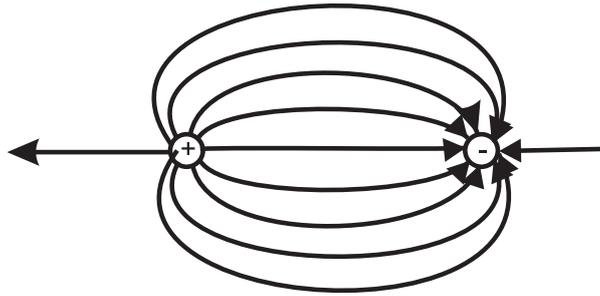
Applet: elektrostatische Felder (Versuchskarte)

Link zur Vorlesung:([Applet: elektrostatische Felder](#))



Feldlinien bei zwei gleichen positiven Ladungen.

1. Elektrische Feldlinien beginnen bei positiven *Ladungen* und enden bei negativen *Ladungen*.
2. Um eine einzelne Punktladung herum sind alle Feldlinien kugelsymmetrisch verteilt
3. Die Anzahl der Feldlinien, die von positiven *Ladungen* ausgehen, oder auf negativen *Ladungen* enden, ist proportional zu der Grösse der *Ladung*.
4. An jedem Punkt des Raumes ist die Feldliniendichte proportional zur Feldstärke in diesem Punkt.
5. In grosser Entfernung wirkt ein System von *Ladungen* wie eine einzige Punktladung, deren Grösse der Gesamtladung des Systems entspricht.
6. Feldlinien schneiden sich nicht.



Feldlinien bei einer positiven Ladung und einer vom Betrage her gleich-grossen negativen Ladung.

Wenn das elektrische Feld die einzige Ursache der Beschleunigung ist, dann gilt

$$\mathbf{a} = \frac{q}{m} \mathbf{E} \quad (2.11)$$

Ladungen, die aus der Ruhe durch ein elektrisches Feld beschleunigt werden, folgen den Feldlinien. Elektrische Felder, die eine Ladung q mit der Masse m ablenken, erlauben q/m zu bestimmen.

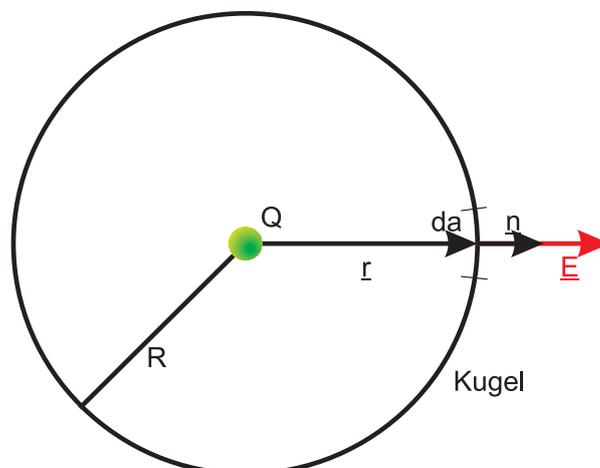
2.3. Zusammenhang zwischen *Ladung* und *Feld*: das *Gaussche Gesetz*

Dieser Stoff wurde am 28. 10. 2004 behandelt

Nach der Gleichung (2.9) kann die gesamte *Ladung* in einem Raumgebiet begrenzt durch die Fläche A durch

$$Q = \iiint_{V(A)} \rho_{el}(\mathbf{r}) dV \quad (2.12)$$

ausgedrückt werden.



Wir betrachten eine kugelsymmetrische Situation um eine Punktladung Q . Wir definieren den Normalenvektor am Ort \mathbf{r} als $\mathbf{n} = \mathbf{r}/|\mathbf{r}| = \mathbf{r}/r$. Das Oberflächenelement da ist $da = r^2 \sin \Theta d\Theta d\varphi$.

Das elektrische Feld an der Kugeloberfläche ist

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \quad (2.13)$$

Wir erhalten damit das *Gauss'sche Gesetz*

$$\begin{aligned} \int_{\text{Kugeloberfläche}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} da &= \int_{\text{Kugel}} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \cdot \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} r^2 \sin\Theta d\Theta d\varphi \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{Kugeloberfläche}} \sin\Theta d\Theta d\varphi \\ &= \frac{Q}{\epsilon_0} \end{aligned} \quad (2.14)$$

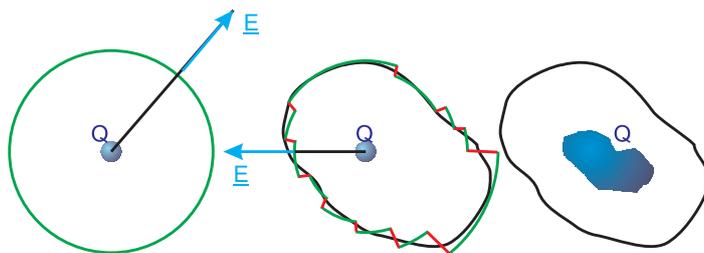
Die Grösse $\Phi = \int_{\text{Oberfläche}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a}$ ist der *Fluss des Vektorfeldes \mathbf{E}* durch die Oberfläche. Dieses Integral kann vereinfacht werden, indem wir die *dielektrische Verschiebung*

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (2.15)$$

einführen. Die Einheit der dielektrischen Verschiebung ist $[\mathbf{D}] = C/m^2 = As/m^2$. Weiter ist

$$\int_{\text{Kugeloberfläche}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} = \int_{\text{Kugeloberfläche}} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} da = Q \quad (2.16)$$

Allgemein gilt die obige Gleichung für beliebige geschlossene Flächen S , die das Volumen $V(S)$ einschliesst.



Approximation von beliebigen Oberflächen durch Kugelsegmente. Approximation einer kontinuierlichen Ladungsverteilung durch Punktladungen.

$$\begin{aligned}
 \iint_A \mathbf{D}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{a}(\mathbf{r}) &= \iint_A \mathbf{D}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) da(\mathbf{r}) & (2.17) \\
 &= Q_{\text{in } A} \\
 &= \iiint_{V(A)} \rho_{el}(\mathbf{r}) dV
 \end{aligned}$$

Mit dem Gaussschen Satz (Gleichung (A.41)) kann die Gleichung umgeschrieben werden in

$$\iint_A \mathbf{D}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \iiint_{V(A)} \mathbf{div} \mathbf{D}(\mathbf{r}) dV = \iiint_{V(A)} \rho_{el}(\mathbf{r}) dV \quad (2.18)$$

Diese Gleichung muss für alle Oberflächen S gelten. Deshalb müssen die Integranden gleich sein

$$\mathbf{div} \mathbf{D}(\mathbf{r}) = \rho_{el}(\mathbf{r}) \quad (2.19)$$

Dies ist die Differentialform der Gleichung für die elektrische Verschiebung. Die physikalische Interpretation ist: die *Ladungen* sind die *Quellen (Divergenz)* der elektrischen Verschiebung und damit des elektrischen Feldes.

Im ladungsfreien Raum lautet Gleichung (2.19): $\mathbf{div} \mathbf{D}(\mathbf{r}) = 0$. Diese Gleichung ist mathematisch äquivalent zur Kontinuitätsgleichung strömender inkompressibler Flüssigkeiten. Für deren Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ gilt nämlich $\mathbf{div} \mathbf{v}(\mathbf{r}) = 0$.

Materialien

Maple 8 Datei zur Berechnung von Divergenzen



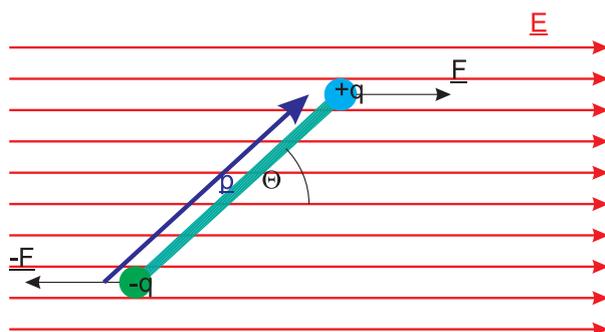
2.3.1. Dipole in elektrischen Feldern

Dieser Stoff wurde am 28. 10. 2004 behandelt

Es gibt Moleküle, bei denen die negativen und die positiven *Ladungen* getrennte Schwerpunkte haben. Eine negative *Ladung* $-q$ im Abstand ℓ von einer positiven *Ladung* q heisst *Dipol* mit dem *Dipolmoment*

$$\mathbf{p} = q\ell \quad (2.20)$$

Die Einheit des Dipolmoments ist $[p] = Cm$. **Der Vektor des Dipols zeigt von $-q$ nach $+q$.**



Kräfte auf einen Dipol im homogenen elektrischen Feld.

Im homogenen elektrostatischen Feld \mathbf{E} wirkt auf die positive *Ladung* die Kraft \mathbf{F} und auf die negative *Ladung* $-\mathbf{F}$. Zusammen bilden diese beiden Kräfte ein Kräftepaar und erzeugen damit ein Drehmoment

$$\mathbf{M} = \boldsymbol{\ell} \times \mathbf{F} = (q\boldsymbol{\ell}) \times (\mathbf{F}/q) = \mathbf{p} \times \mathbf{E} \quad (2.21)$$



Versuch zur Vorlesung:

Drehmoment auf elektrischen Dipol ([Versuchskarte ES-30](#))

2.4. Elektrische Felder von Leitern

Dieser Stoff wurde am 4. 11. 2004 behandelt

(Siehe Tipler, Physik [[Tip94](#), pp. 645])

Materialien

Folien zur Vorlesung vom 04. 11. 2004: [PDF](#)



Versuch zur Vorlesung:

Elektrische Feldlinien ([Versuchskarte ES-4](#))

Die elektrischen Felder

- in der Nähe eines ausgedehnten Leiters
- auf der Symmetrieachse eines Kreisrings
- auf der Symmetrieachse einer Kreisscheibe
- innerhalb und ausserhalb einer geladenen Zylinderfläche
- in allen Bereichen zweier coaxialer zylinderförmiger Leiter

werden im Anhang berechnet.

Versuch zur Vorlesung:

Faraday-Becher (Versuchskarte ES-9)

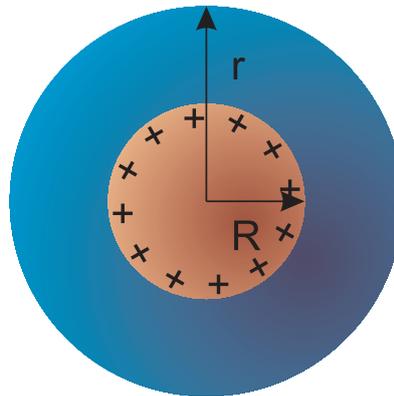
Versuch zur Vorlesung:

Faraday-Käfig (Versuchskarte ES-21)

Versuch zur Vorlesung:

Van-de-Graaff-Generator (Versuchskarte ES-19)

Wir berechnen das elektrische Feld innerhalb und ausserhalb einer Kugelschale.



Die eingeschlossene *Ladung* durch die Kugelfläche mit dem Radius $r > R$ ist

$$Q_{ges} = \oint \epsilon_0 E_r dA = E_r 4\pi r^2 \quad (2.22)$$

Da die Gesamtladung innerhalb dieser Fläche Q ist, haben wir

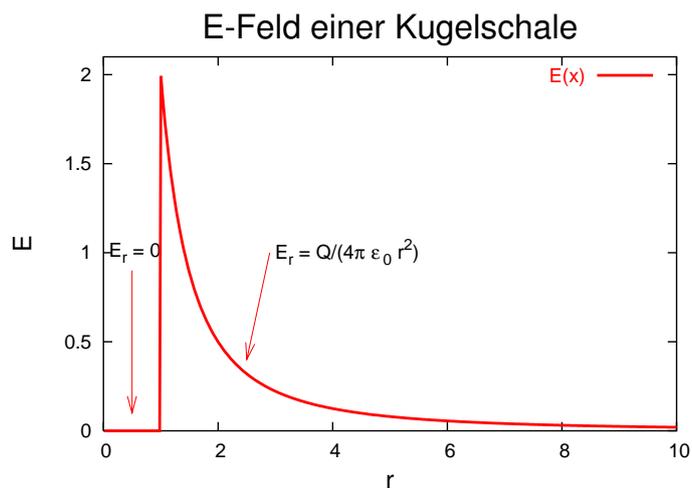
$$\frac{Q}{\epsilon_0} = E_r 4\pi r^2 \quad (2.23)$$

Damit ist für $r > R$

$$E_r(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \quad (2.24)$$

Das elektrische Feld einer homogen geladenen Kugelschale ist also **ununterscheidbar** vom elektrischen Feld einer Punktladung. Für $r < R$ ist die eingeschlossene *Ladung* $Q = 0$. Damit ist auch $\Phi_{ges} = E_r 4\pi r^2 = 0$ und folglich für $r < R$

$$E_r = 0 \quad (2.25)$$



Die Feldverteilung einer homogen geladenen Kugelschale.

Das elektrische Feld einer homogen geladenen Kugel mit dem Radius R wird analog berechnet. Ausserhalb der Kugel für $r > R$ ist wie oben $\Phi_{ges} = E_r 4\pi r^2 = Q / \epsilon_0$. Also ist für $r > R$

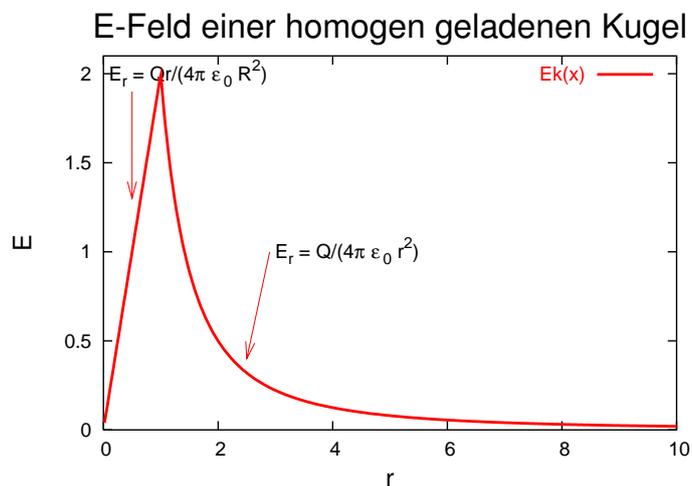
$$E_r(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \quad (2.26)$$

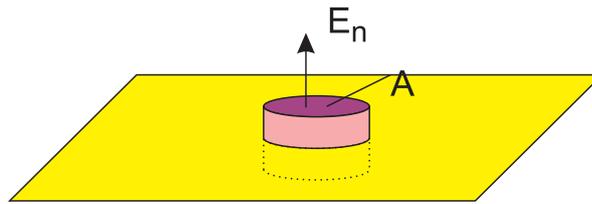
Wenn die Ladungsdichte $\rho_{el} = Q/V = Q / (\frac{4\pi}{3} R^3)$ ist, ist die von einer zur homogen geladenen Kugel konzentrischen Kugelschale mit $r < R$ umschlossene Ladung $Q' = \rho_{el} V(r) = \rho_{el} \frac{4\pi}{3} r^3$

$$Q(r) = \frac{Q}{\frac{4\pi}{3} R^3} \frac{4\pi}{3} r^3 = Q \frac{r^3}{R^3} \quad (2.27)$$

Weiter haben wir $E_r 4\pi\epsilon_0 r^2 = Q$. Also ist für $r < R$

$$E_r(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qr}{R^3} \quad (2.28)$$





Das elektrische Feld einer homogen geladenen Platte kann wie folgt berechnet werden.

- Da wir *Translationsinvarianz* für jede Richtung in der Plattenebene haben, muss das elektrische Feld senkrecht auf der Platte stehen.
- Die elektrischen Felder auf den beiden gegenüberliegenden Seiten der Platte müssen entgegengesetzt gerichtet sein, da die Platte eine Ebene mit *Spiegelsymmetrie* darstellt.
- Wir verwenden eine zylinderförmige Fläche parallel zur Platte. Die Seitenflächen können beliebig hoch sein, da die *Symmetrieüberlegungen* besagen, dass sie keinen Beitrag zum Fluss liefern.

Wenn σ die *Ladungsdichte* auf der Platte ist, dann ist

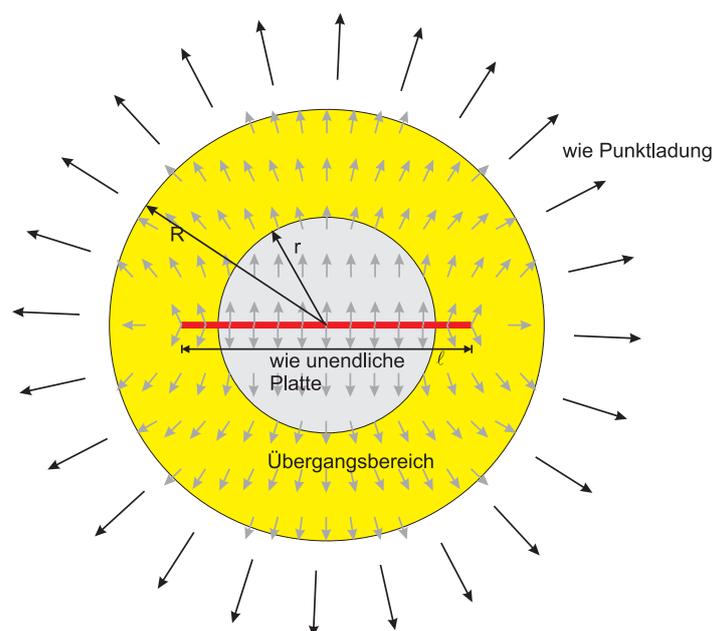
$$\frac{\sigma A}{\epsilon_0} = \Phi = \oint E_n dA = 2AE_n \quad (2.29)$$

da sowohl die Unterseite wie auch die Oberseite einen Beitrag liefern.

Also ist

$$E_r = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (2.30)$$

homogen im Raum.



Elektrisches Feld um eine endliche Platte.

Wir betrachten eine endliche ebene leitfähige Platte mit der Ausdehnung ℓ . Wir können drei Fälle unterscheiden:

$r \ll \ell$ Das elektrische Feld ist von dem einer unendlich ausgedehnten ebenen leitfähigen Platte nicht unterscheidbar.

$r \approx \ell$ Das elektrische Feld befindet sich in einem Zwischenzustand.

$R \gg \ell$ Das elektrische Feld ist von dem einer Punktladung im Kugelmittelpunkt nicht unterscheidbar.

Ein Beispiel für diese Art Flächenladungen sind *Klebestreifen*. Andreas Döring [Dör01] gibt an, dass Haftklebematerialien spezifische Haftenergien von $E_t = 30 \dots 300 \text{ J/m}^2$ haben. Die Definition von E_t ist

$$E_t = \frac{v_s}{A} \int F(t) dt \approx \frac{v_s F \Delta t}{A}$$

wobei $v_s = 0.01 \text{ m/s}$ die Geschwindigkeit ist, mit der der Klebestreifen abgezogen wird und A die Kontaktfläche ist. $\Delta t = 0.1 \text{ s}$ ist die Loslösezeit. Die Haftkraft rührt von *Ladungen* her. Bei einer Flächenladungsdichte σ ist $E = \sigma/\epsilon_0$. Die Kraft auf eine Flächenladungsdichte σ ist dann $F/A = \sigma^2/\epsilon_0$. Mit den Daten von Herrn Döring erhalten wir

$$\frac{F}{A} = \frac{\sigma^2}{\epsilon_0} = \frac{E_t}{v_s \Delta t}$$

und daraus die Flächenladungsdichte

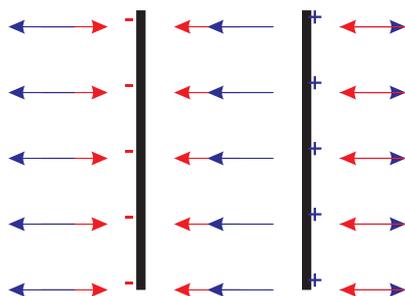
$$\sigma = \frac{e}{d^2} = \sqrt{\frac{\epsilon_0 E_t}{v_s \Delta t}}$$

Dabei haben wir angenommen, dass Elementarladungen e im Abstand d angebracht sind. d ist dann

$$d = \sqrt{e \sqrt{\frac{v_s \Delta t}{\epsilon_0 E_t}}}$$

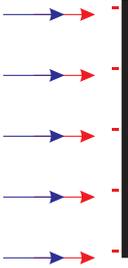
Wenn wir E_t einsetzen erhalten wir $d \approx 10 \text{ nm} \dots 18 \text{ nm}$. Dieser Abstand korreliert gut mit den bekannten Moleküldurchmessern.

Bei zwei homogen geladenen Platten, deren Flächenladungsdichte vom Betrage her gleich sind, aber unterschiedliches Vorzeichen haben, heben sich die Felder ausserhalb der Platten auf. Gleichzeitig verstärken sich die Felder im Inneren: Die elektrische Feldstärke wird $E = \sigma/\epsilon_0$.



Sind die Platten jedoch gleich geladen (oder ist die Oberflächenladung der Platten gleich), kompensieren sich die elektrischen Felder im Innern der Platte, verstärken

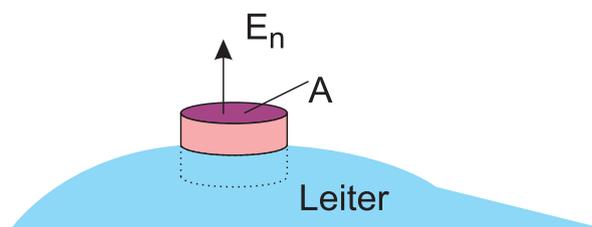
sich aber im Aussenraum. Wieder ist im Aussenraum $E = \sigma/\epsilon_0$.



Leiter haben in ihrem Inneren keine statischen elektrischen Felder.

Da *Ladungen* im Inneren eines Leiters beweglich sind, folgt, dass das elektrische Feld an einer beliebigen Oberfläche, die sich ganz im Inneren eines Leiters befindet, null ist. Damit ist die umschlossene *Ladung* ebenso null. Daraus folgt, dass *Ladungen* sich nur an der Oberfläche eines Leiters befinden können.

Das elektrische Feld an der Oberfläche eines Leiters kann mit dem Gausschen Gesetz berechnet werden. Wir betrachten eine zylinderförmige Fläche, deren eine Kreisfläche unter der Oberfläche des Leiters und deren andere über der Oberfläche des Leiters ist.



Der gesamte Fluss ist

$$\Phi_{ges} = \oint E_n dA = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (2.31)$$

da das elektrische Feld im Inneren des Leiters null ist und die Höhe der Seitenflächen verschwinden soll, haben wir

$$\oint E_n dA = E_n \int_{\text{obere Fläche}} dA = E_n A = \frac{1}{\epsilon_0} A \sigma \quad (2.32)$$

und

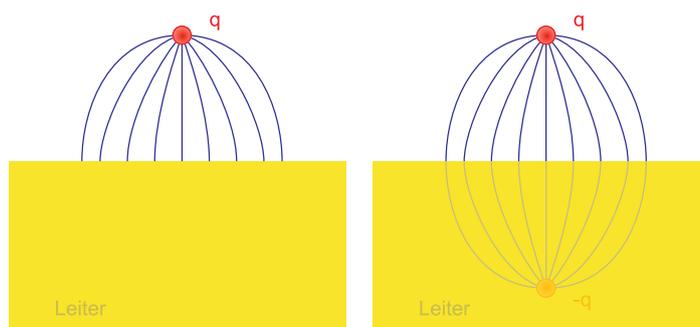
$$E_n = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (2.33)$$

Aus dem Gausschen Gesetz werden die zwei folgenden Schlüsse gezogen:

- Die makroskopisch beobachtbare elektrische *Ladung* eines Leiters befindet sich auf seiner Oberfläche.
- Das elektrische Feld an der Oberfläche eines Leiters steht senkrecht zu dieser Oberfläche und hat die Grösse $E_r = \sigma/\epsilon_0$

2.4.1. Influenz und Bildladung

Dieser Stoff wurde am 4. 11. 2004 behandelt



Links: Feldlinien in der Nähe eines Leiters. Rechts: Diese Feldlinien können mit einer Bildladung erklärt werden.

Da elektrische Feldlinien immer senkrecht auf der Oberfläche eines Leiters stehen müssen, sieht das Feldlinienbild einer Punktladung in der Nähe eines Leiters wie die Hälfte des Feldlinienbildes eines Dipols aus. Das elektrische Feld der Punktladung erzeugt an der Oberfläche die *Influenzladung* $\sigma(\mathbf{r})$, die das äussere Feld im Leiter abschirmt. Formal kann das Feldlinienbild berechnet werden, indem man zu einer *Ladung* q im Abstand a von der Oberfläche eines Leiter im Leiter innen eine Bildladung $-q$ auch im Abstand a von der Oberfläche verwendet.

Das Konzept der Bildladung zeigt, dass eine *Ladung* q im Abstand a von einem Leiter mit der Kraft

$$F(a) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{4a^2} \quad (2.34)$$

angezogen wird. Die Senkrechtkomponente (z -Komponente) des elektrischen Feldes ist im Abstand r vom Aufpunkt in der Leiteroberfläche

$$E_z(r, a) = -\frac{2}{4\pi\epsilon_0} \frac{qa}{(r^2 + a^2)^{3/2}} \quad (2.35)$$

Damit ist die Oberflächenladungsdichte

$$\sigma(r) = -\frac{1}{2\pi} \frac{qa}{(r^2 + a^2)^{3/2}} \quad (2.36)$$

Mit analogen Überlegungen kann auch die Bildladungsdichte von kontinuierlichen Ladungsverteilungen berechnet werden⁵.

2.5. Elektrostatisches Potential

Dieser Stoff wurde am 11. 11. 2004 behandelt



(Siehe Kneubühl, Repetitorium der Physik [Kne74, pp. 192]) (Siehe Tipler, Physik [Tip94, pp. 681])

Materialien

Folien zur Vorlesung vom 11. 11. 2004: [PDF](#)

Seminar vom 11. 11. 2004: Aufgabenblatt 02 ([HTML](#) oder [PDF](#))

Die Arbeit ist durch

$$W(\mathbf{r}_1 \rightarrow \mathbf{r}_2) = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \quad (2.37)$$

definiert.

Die potentielle Energie eines Kraftfeldes $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ ist die Arbeit gegen diese Feldkraft. Nach dem 3. Newtonschen Axiom ist $\mathbf{F}_{ext} = -\mathbf{F}$. Also

$$E_{pot}(\mathbf{x}_2) = E_{pot}(\mathbf{x}_1) + \int_{\mathbf{x}_1}^{\mathbf{x}_2} \mathbf{F}_{ext}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} \quad (2.38)$$

$$= E_{pot}(\mathbf{x}_1) - \int_{\mathbf{x}_1}^{\mathbf{x}_2} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = E_{pot}(\mathbf{x}_1) - W(\mathbf{x}_1 \rightarrow \mathbf{x}_2) \quad (2.39)$$

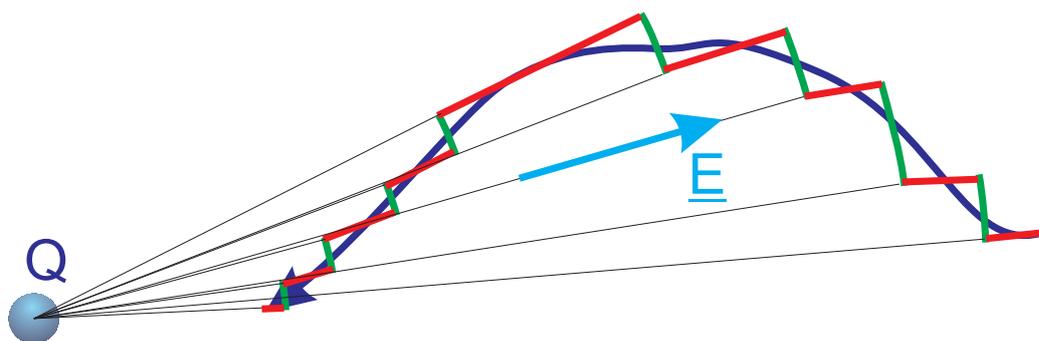
Eine potentielle Energie existiert, wenn

- Die Arbeit $W(\mathbf{r}_1 \rightarrow \mathbf{r}_2)$ unabhängig vom Weg ist.
- Die Arbeit für jede geschlossene Bahn null ist (Die Bahn darf keine Singularitäten des Feldes umschliessen).
- $\text{rot } \mathbf{F}(\mathbf{r}) = 0$ für alle \mathbf{r}

Die potentielle Energie einer Probeladung q im Feld der Ladung Q ist

$$E_{pot}(\mathbf{r}_2) = E_{pot}(\mathbf{r}_1) - \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot d\mathbf{r} \quad (2.40)$$

⁵Auch bei Dielektrika gibt es Bildladungen



Approximation eines beliebigen Integrationsweges Kreissegmente. Auf den Kreissegmenten (grün) ist $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0$, entlang der radialen Teile ist $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int E(r)ds$.

Da wir jede Bahnkurve durch Stücke in radialer Richtung und durch Bahnen mit $r = \text{const}$ approximieren können, und da die Bahnen auf den Kugelflächen keinen Beitrag geben (sie sind senkrecht zur Kraft) können wir das Integral vereinfachen.

$$\begin{aligned} E_{\text{pot}}(\mathbf{r}_2) &= E_{\text{pot}}(\mathbf{r}_1) - \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} \\ &= E_{\text{pot}}(r_1) - \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{r} \right)_{r_1}^{r_2} = E_{\text{pot}}(r_1) + \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) \end{aligned} \quad (2.41)$$

Üblicherweise setzt man $E_{\text{pot}}(r = \infty) = 0$. Damit wird

$$E_{\text{pot}}(\mathbf{r}) = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} \quad (2.42)$$

Aus der potentiellen Energie kann die Kraft mit dem Gradienten

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\mathbf{grad} E_{\text{pot}}(\mathbf{r}) \quad (2.43)$$

berechnet werden. Für die potentielle Energie der Coulomb-Kraft bekommen wir

$$\begin{aligned} \vec{F}(\vec{r}) &= -\mathbf{grad} \left(\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \right) = -\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \mathbf{grad} \frac{1}{r} = -\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(-\frac{1}{r^2} \right) \mathbf{grad} r \\ &= \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3} \end{aligned} \quad (2.44)$$

In Komponenten ist $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ und $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial y}; \frac{\partial}{\partial z} \right)$
Also

$$\begin{aligned} \mathbf{grad} \left(\frac{1}{r} \right) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} (x^2 + y^2 + z^2) \\ &= -\frac{1}{2} \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{r^3} \cdot \mathbf{r} \end{aligned} \quad (2.45)$$

Ergänzend zu Coulomb-Kraft hatten wir das elektrische Feld als auf eine Einheitsladung normierte Grösse eingeführt.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \tag{2.46}$$

Die potentielle Energie der Ladung q im Feld der Ladung Q , normiert auf $q = 1$ ist das elektrische Potential φ , auch Spannung U genannt. Ich verwende in diesem Skript die Begriffe *elektrisches Potential* und *Spannung* austauschbar.

$$\varphi(\mathbf{r}) = U(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} = \frac{E_{pot}(\mathbf{r})}{q} \tag{2.47}$$

Wichtig ist die Beziehung

$$E_{pot}(\mathbf{r}) = qU(\mathbf{r}) = q\varphi(\mathbf{r}) \tag{2.48}$$

Wie die Kraft aus der potentiellen Energie über die Gradientenbildung hervorgeht, wird das elektrische Feld mit

$$\mathbf{E} = -\mathbf{grad} U = -\mathbf{grad} \varphi \tag{2.49}$$

berechnet.

Folgende Relationen gelten

$\mathbf{F}(\mathbf{r})$	$\xrightarrow{\lim_{q \rightarrow 0} /q}$ $\xleftarrow{\lim_{q \rightarrow 0} \cdot q}$	$\mathbf{E}(\mathbf{r})$
$-\int \mathbf{F} d\mathbf{r}$ \downarrow	\uparrow $-\mathbf{grad} E_{pot}$	$-\int \mathbf{E} d\mathbf{r}$ \downarrow
$E_{pot}(\mathbf{r})$	$\xrightarrow{\lim_{q \rightarrow 0} /q}$ $\xleftarrow{\lim_{q \rightarrow 0} \cdot q}$	$U(\mathbf{r}) = U(\mathbf{r})$

(2.50)

Wir merken uns

$$U(\mathbf{r}_2) = U(\mathbf{r}_1) - \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \tag{2.51}$$

analog zur potentiellen Energie.

Die Einheit des elektrostatischen Potentials oder der Spannung ist

$$1 \text{ Volt} = 1 \frac{\text{Joule}}{\text{Coulomb}} = 1 \frac{\text{J}}{\text{A s}} = 1 \frac{\text{W}}{\text{A}}$$

Bem.: Beim elektrischen Feld ist der Feldvektor \mathbf{E} , bei der Gravitation \mathbf{g}

Das Gravitationspotential ist $U_{grav}(r) = -G\frac{m}{r}$.

Da die Coulomb-Kräfte additiv sind, ist auch das elektrostatische Potential oder die elektrostatische potentielle Energie additiv. Das Potential von *Ladungen* q_i an den Orten \mathbf{r}_i ist also

$$U(\mathbf{r}) = \sum_{i=0}^N U(\mathbf{r}_i) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=0}^N \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} \quad (2.52)$$

Für kontinuierliche Ladungsverteilungen $\rho_{el}(\mathbf{r})$ ist das Potential

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho_{el}(\mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq(\mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} \quad (2.53)$$



Versuch zur Vorlesung:

Flächenladungsdichte (Versuchskarte ES-8)

Das elektrostatische Potential eines Kreisringes mit der *Ladung* Q und dem Radius R im Abstand x auf der Symmetrieachse soll berechnet werden. Wir verwenden, dass

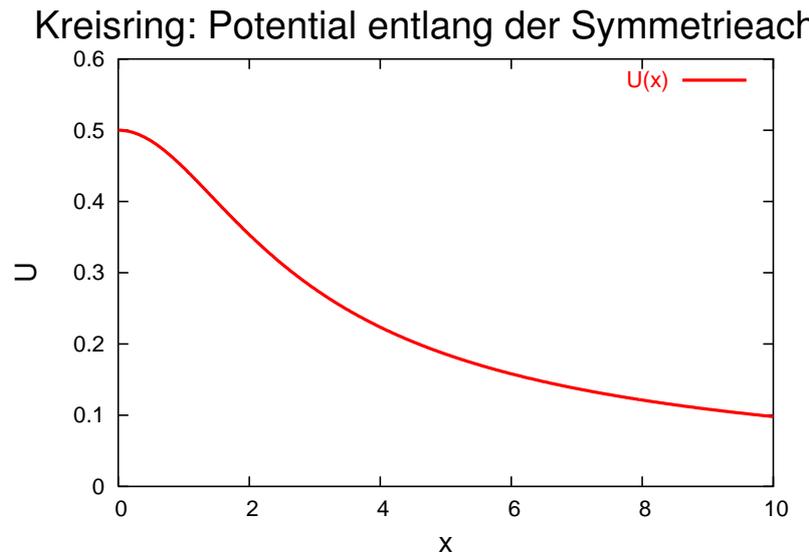
$$dU(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} dq$$

ist, mit

$$\int_0^{2\pi} dq = Q$$

Wir erhalten

$$U(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{dq}{\sqrt{x^2 + R^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{\sqrt{x^2 + R^2}} \quad (2.54)$$



Potential eines Kreisringes entlang der Symmetrieachse für eine positive Ladung $Q = 4\pi\epsilon_0$ und dem Radius $R = 2$.

Analog kann das Potential einer homogen geladenen Scheibe mit dem Radius R entlang ihrer Symmetrieachse x berechnet werden. Die Ladungsdichte der Scheibe sei $\sigma = Q/(\pi R^2)$. Ein Kreisring mit dem Radius a trägt die Ladung $dq = 2\pi a\sigma da$ und erzeugt dann das Potential

$$dU(a, x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{\sqrt{x^2 + a^2}} \quad (2.55)$$

Durch Integration über die gesamte Scheibe erhalten wir

$$U(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \frac{2\pi a\sigma da}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{a da}{\sqrt{x^2 + a^2}} \quad (2.56)$$

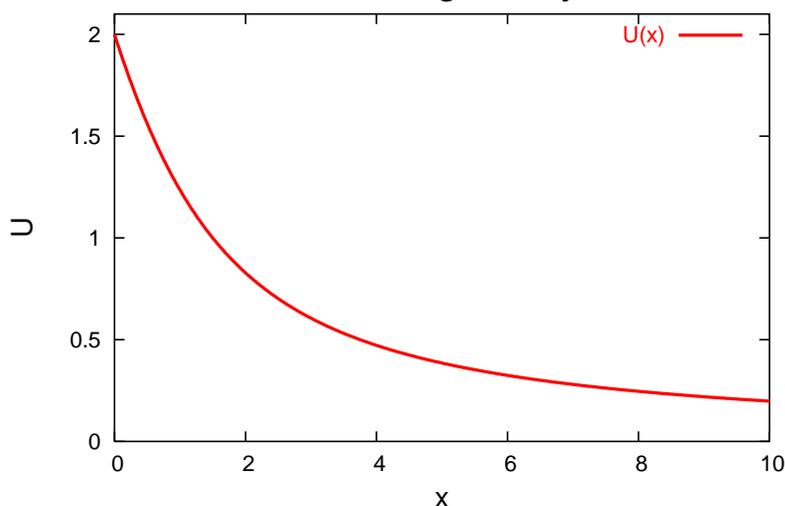
Dieses Integral ergibt nach Bronstein[BSMM00, Seite 309, Nr. 193]

$$U(x) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \sqrt{x^2 + a^2} \Big|_0^R = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{x^2 + R^2} - x) \quad (2.57)$$

Asymptotisch verläuft auch dieses Potential für $x \rightarrow \infty$ wie das Potential einer Punktladung, da

$$U(x) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(x \sqrt{1 + \frac{R^2}{x^2}} - x \right) \approx \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(x + \frac{R^2}{2x} - x \right) = \frac{\sigma}{4\epsilon_0} \frac{R^2}{x}$$

Kreis: Potential entlang der Symmetrieachse



Elektrostatistisches Potential einer homogen geladenen Kreisscheibe entlang ihrer Symmetrieachse mit $R = 2$ und $\sigma = 2\epsilon_0$.

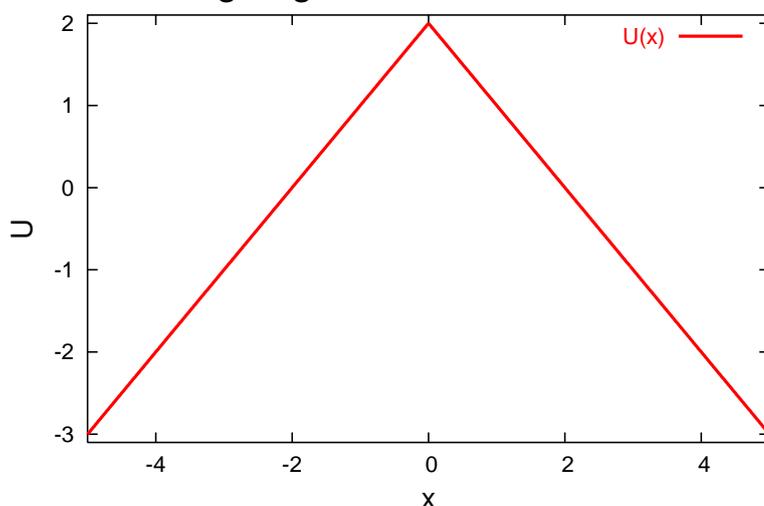
Eine homogen mit der Flächenladungsdichte σ geladene Ebene erzeugt ein konstantes elektrisches Feld $E = \sigma/(2\epsilon_0)$. Das elektrostatistische Potential eines Punktes P im Abstand $x > 0$ von der Platte kann gefunden werden, indem wir entlang des Lots vom Punkt P auf die Ebene integrieren.

$$U(x) = U(0) - \int_0^x E d\xi = U(0) - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^x d\xi = U(0) - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} x \quad \text{für } x > 0 \quad (2.58)$$

Für $x < 0$ berechnet man

$$U(x) = U(0) - \left(-\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\right) x = U(0) + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} x \quad \text{für } x < 0 \quad (2.59)$$

Homogen geladene Ebene: Potential



Potential senkrecht zu einer homogen geladenen Ebene mit $U_0 = 2$ und $\sigma = 2\epsilon_0$.

Das Potential einer homogen geladenen Kugelschale wird mit dem elektrischen Feld berechnet. Das radiale elektrische Feld ist $E_r(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$. Damit ist das Potential

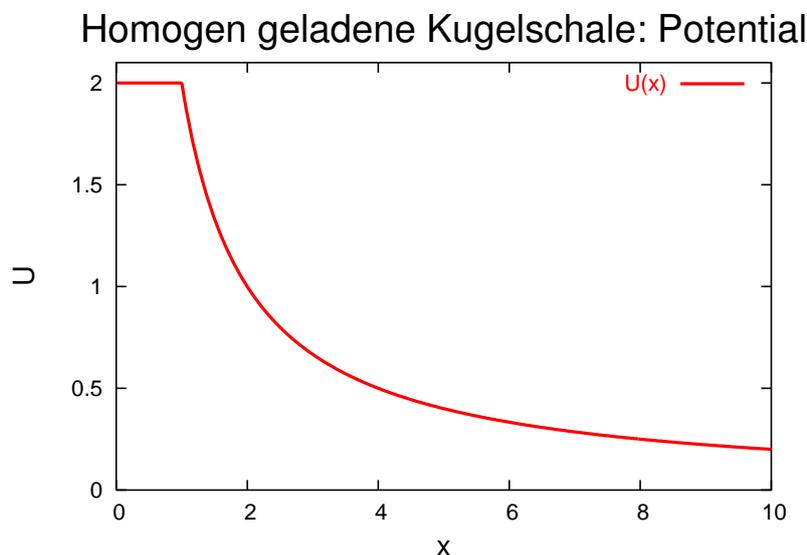
$$\begin{aligned}
 U(r) &= U(\infty) - \int_{\infty}^r \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} dr \\
 &= U(\infty) - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^r \frac{dr}{r^2} \\
 &= U(\infty) - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{r} \right) \Big|_{\infty}^r \\
 &= U(\infty) + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}
 \end{aligned} \tag{2.60}$$

Oder mit $U(\infty) = 0$

$$U(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \quad \text{für } r > R \tag{2.61}$$

Innerhalb der Kugelschale ist das elektrische Feld null, das Potential also konstant.

$$U(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} \quad \text{für } r < R \tag{2.62}$$



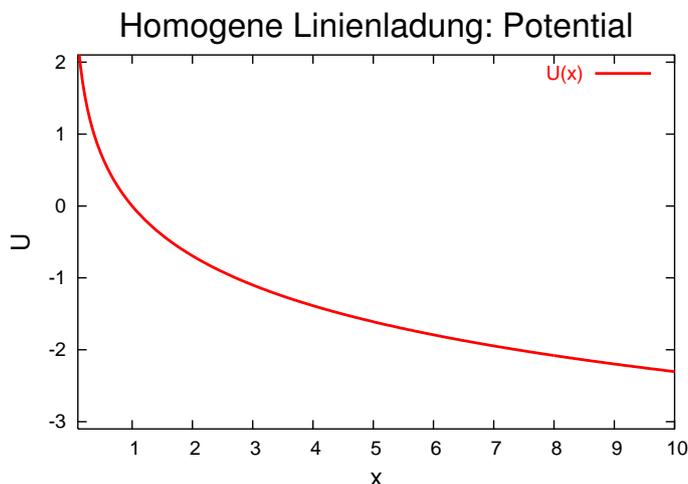
Potential einer homogen geladenen Kugelschale mit $R = 1$ und $Q = 8\pi\epsilon_0$.

Schliesslich berechnen wir das elektrostatische Potential in der Nähe einer unendlich ausgedehnten Linienladung mit der Ladungsdichte λ . Das radiale elektrische Feld ist $E = \lambda/(2\pi\epsilon_0 x)$. Das Potential ist dann

$$U(r) = U(r_0) - \int_{r_0}^r \frac{\lambda dx}{2\pi\epsilon_0 x} = U(r_0) - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) \tag{2.63}$$

Wir setzen $U(r_0) = 0$ und erhalten

$$U(r) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) \quad (2.64)$$



Potential in der Nähe einer unendlich ausgedehnten homogenen Linienladung mit $r_0 = 1$ und $\lambda = 2\pi\epsilon_0$.

2.6. Poisson-Gleichung

Dieser Stoff wurde am 11. 11. 2004 behandelt

(Siehe Kneubühl, Repetitorium der Physik [Kne74, pp. 197]) (Siehe Tipler, Physik [Tip94, pp. 703])

Wir hatten in Gleichung (2.19) gesehen, dass

$$\operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{r}) = \rho_{el}(\mathbf{r}) \quad (2.65)$$

ist.

Gleichung (2.51) besagt, dass

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\operatorname{grad} U(\mathbf{r}) \quad (2.66)$$

ist. Mit der im Vakuum geltenden Beziehung $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$ erhalten wir die Poisson-Gleichung.

$$-\epsilon_0 \operatorname{div} \operatorname{grad} U(\mathbf{r}) = \rho_{el}(\mathbf{r}) = -\epsilon_0 \Delta U(\mathbf{r}) \quad (2.67)$$

oder

$$\Delta U(\mathbf{r}) = -\frac{\rho_{el}(\mathbf{r})}{\epsilon_0} \quad (2.68)$$

Dabei haben wir den Laplace-Operator $\Delta = \operatorname{div} \operatorname{grad}$ verwendet. In Komponentenschreibweise in einem kartesischen Koordinatensystem ist dies

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (2.69)$$

Die *Poissongleichung* ermöglicht eine Berechnung der Potentiale ausgehend von Ladungsverteilungen.

Beispiel:

Bei einer geladenen Ebene ist $\rho_{el}(x, y, z) = \delta(z)\sigma(x, y)$. Die Poissongleichung wird, wegen der Translationssymmetrie in x und y zu

$$\Delta U = \frac{\partial^2}{\partial z^2} U = -\frac{\sigma\delta(z)}{\epsilon_0} \quad (2.70)$$

Daraus folgt, dass $\frac{\partial U}{\partial z} = \text{const} \neq 0$ für $z \neq 0$.

Bei $z = 0$ haben wir einen Sprung der Grösse $\frac{\sigma_0}{\epsilon_0}$ der symmetrisch von $+\frac{\sigma_0}{2\epsilon_0}$ bis $-\frac{\sigma_0}{2\epsilon_0}$ reichen muss. Nochmals integrieren ergibt

$$U(z) = \begin{cases} U_0 + \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0}z & \text{für } z < 0 \\ U_0 - \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0}z & \text{für } z > 0 \end{cases} \quad (2.71)$$

U_0 ist eine frei wählbare Integrationskonstante.

Das Innere eines Leiters ist ein Äquipotentialraum, da in einem Leiter *Ladungen* sich frei bewegen können. Da Feldlinien $d\mathbf{E}$ senkrecht zu einer Metalloberfläche, die immer eine Äquipotentialfläche ist, stehen kann man schliessen (und mathematisch beweisen), dass Feldlinien senkrecht auf Äquipotentialflächen stehen.

An Luft kann man nicht beliebige Potentialunterschied aufrechterhalten. Die möglichen Potentialdifferenzen werden durch Funkenüberschläge begrenzt. Für Luft unter Normalbedingungen muss

$$E < 3 \cdot 10^6 \frac{V}{m} \quad (2.72)$$

sein.

2.7. Kapazität: eine geometrische Eigenschaft

Dieser Stoff wurde am 18. 11. 2004 behandelt



(Siehe Tipler, Physik [Tip94, pp. 722]) (Siehe Kneubühl, Repetitorium der Physik [Kne74, pp. 202])

Materialien

Folien zur Vorlesung vom 18. 11. 2004: PDF



Versuch zur Vorlesung:

Kapazität von Kugeln (Versuchskarte ES-27)

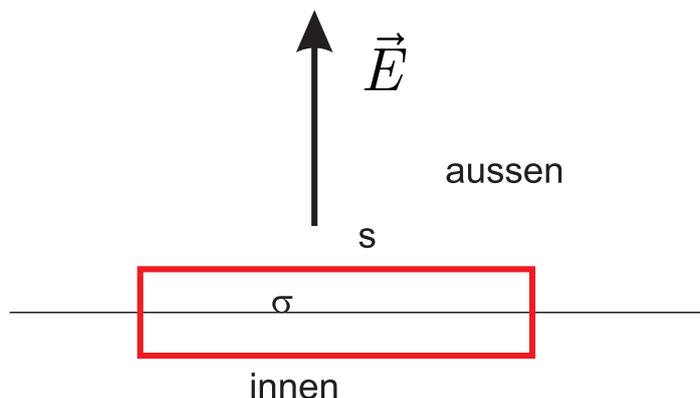
Wir wollen das folgende Problem lösen:

- Wieviel *Ladung* kann auf einer Leiteranordnung gespeichert werden?

Wir wissen:

Im Inneren der Leiter ist $U = \text{const}$ und $\rho_{el} = 0$

- An der Oberfläche sind die \mathbf{E} -Felder senkrecht zur Oberfläche
- Zwischen den Leitern ist $\rho_{el} = 0$, also $\Delta U = 0$
- Die *Ladungen* auf den Leitern sind Oberflächenladungsdichten.



Integrationsoberfläche an der Grenze Metall-Vakuum.

Wir betrachten eine kleine zylinderförmige Oberfläche und verwenden

$$\oint_s \mathbf{E} ds = \frac{q_{\text{eingeschlossen}}}{\epsilon_0} \quad (2.73)$$

Da das Feld im Inneren des Leiters verschwindet und die Seitenflächen keinen Beitrag geben, ist

$$\epsilon_0 \mathbf{E}_{\perp} = \sigma \quad (2.74)$$

Bei einer genügend grossen ebenen Fläche A ist die *Ladung* dann

$$Q = \int_A \sigma da = \int_A \epsilon_0 \mathbf{E}_{\perp} da \approx \epsilon_0 \mathbf{E}_{\perp} A \quad (2.75)$$

A repräsentiert hier die Geometrie, so dass man schliessen kann, dass die gesamte *Ladung* von der Geometrie der Leiter abhängt [Jac75, 48]. Wenn wir die Leiter $1, 2, \dots, n$ betrachten, ist

$$U_j - U_i = \frac{Q}{C_{ji}} = U_{ji} = \varphi_{ij} \quad (2.76)$$

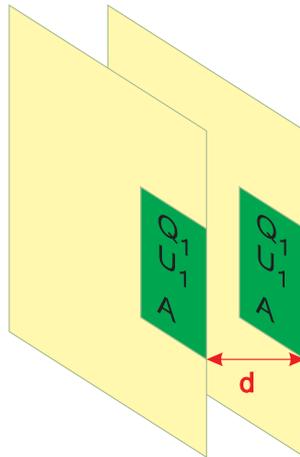
mit U_j dem Potential auf dem Leiter j und U_i dem Potential auf dem Leiter i . C_{ji} ist die Kapazität zwischen den Leitern i und j .

Da die Nummerierung in der Gleichung (2.76) willkürlich ist, muss $C_{ij} = C_{ji}$ gelten.

Die Einheit der Kapazität ist

$$1 \text{ Farad} = 1 F = 1 \frac{C}{V} = 1 \frac{As}{V} \quad (2.77)$$

Als erstes Beispiel betrachten wir den Plattenkondensator



Geometrie eines Plattenkondensators. Wir betrachten auf beiden Seiten eine Fläche A die jeweils in eine unendlich ausgedehnte Fläche eingebettet ist.

Wir benutzen, dass das elektrische Feld einer unendlich ausgedehnten homogenen Flächenladung konstant $E_{Ebene} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ ist (Gleichung (2.29)).

Auf den Kondensatorplatten ist die *Ladung* $Q = A\sigma = 2\epsilon_0 E_{Ebene} A$.

Das elektrische Feld zwischen den beiden Platten stammt von beiden Platten, also ist

$$\mathbf{E} = 2\mathbf{E}_{Ebene} \quad (2.78)$$

Also ist $Q = A\sigma = \epsilon_0 EA$. Deshalb ist das Potential am Ort der zweiten Platte gemessen von der ersten Platte

$$U_{2,1} = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{d} = 2E_{Ebene} \cdot d = 2\frac{\sigma}{2\epsilon_0}d = \frac{\sigma d}{\epsilon_0} \quad (2.79)$$

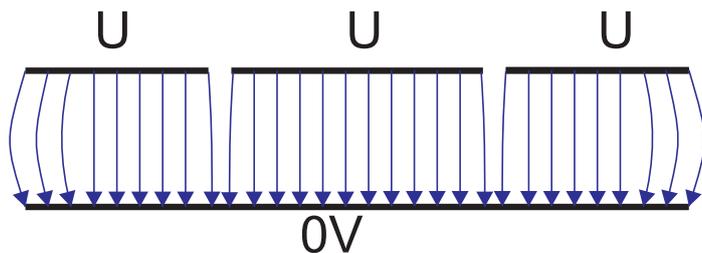
Damit ist die Potentialdifferenz zwischen den beiden Platten oder die angelegte Spannung

$$U = \frac{\sigma d}{\epsilon_0} = \frac{Qd}{A\epsilon_0} \quad (2.80)$$

oder

$$\frac{Q}{U} = \epsilon_0 \frac{A}{d} = C \quad (2.81)$$

Damit haben wir die Kapazität eines Plattenkondensators berechnet. Beachte, dass wir einen endlichen Plattenkondensator, der in einen unendlichen Plattenkondensator eingebettet ist, betrachtet haben, um Randeffekte auszuschliessen.



Durch die Dreiteilung des Kondensators können bei einem realen Kondensator die Randeffekte minimiert werden. Die kleine Lücke stört das homogene Feld nur unwesentlich.

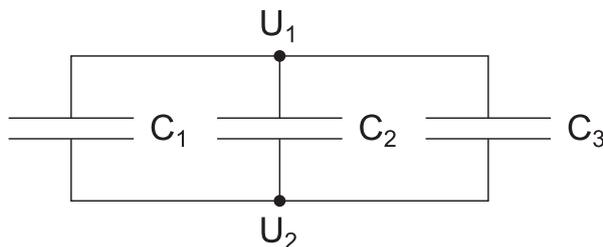
Beispiel: Ein Kondensator mit $d = 0.1\mu\text{m}$, $A = 1\text{m}^2$ und $U = 10\text{V}$
 Dann ist $C = 88.5\mu\text{F}$, $Q = 0.885\text{mC}$, $\sigma = \frac{Q}{A} = 0.885\frac{\text{mC}}{\text{m}^2}$ und $E = 10^8\text{V/m}$

Aus der Additivität des elektrischen Feldes folgt, dass bei der *Parallelschaltung* von *Kondensatoren* sich die Kapazitäten addieren.



Versuch zur Vorlesung:

Reihen- und Parallelschaltung von Kapazitäten (Versuchskarte EM-48)



Parallelschaltung von Kondensatoren.

$$\begin{aligned} Q_1 &= C_1 U \\ Q_2 &= C_2 U \\ Q_3 &= C_3 U \end{aligned} \quad (2.82)$$

$$Q_{\text{ges}} = Q_1 + Q_2 + Q_3 = (C_1 + C_2 + C_3)U \quad (2.83)$$

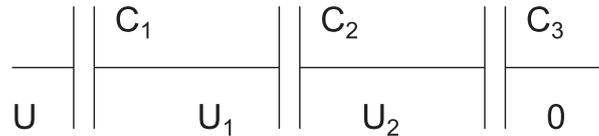
oder

$$\frac{Q_{\text{ges}}}{U} = C_{\text{ges}} = \frac{Q_1 + Q_2 + Q_3}{U} = C_1 + C_2 + C_3 \quad (2.84)$$

bei Parallelschaltung

$$C = \sum_{i=1}^n C_i \quad (2.85)$$

Bei der *Reihenschaltung* wird die angelegte Spannung U auf die in Reihe geschalteten Kondensatoren aufgeteilt.



Reihenschaltung oder Serienschaltung von Kondensatoren.

Auf den Kondensatoren sind die *Ladungen*

$Q = Q_1 = (U - U_1)C_1 = Q_2 = (U_1 - U_2)C_2 = Q_3 = U_2C_3$ gespeichert, da in diesem System nur *Ladungen* verschoben, aber nicht erzeugt oder vernichtet werden können.

Also ist

$$\begin{aligned}\frac{Q}{C_1} &= U - U_1 \\ \frac{Q}{C_2} &= U_1 - U_2 \\ \frac{Q}{C_3} &= U_2\end{aligned}\quad (2.86)$$

oder

$$U = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \frac{Q}{C_3} = Q \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right) = \frac{Q}{C_{ges.}} \quad (2.87)$$

Für die Reihenschaltung gilt

$$\frac{1}{C_{ges.}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i} \quad (2.88)$$

2.8. Energie des elektrischen Feldes

Dieser Stoff wurde am 18. 11. 2004 behandelt



(Siehe Kneubühl, Repetitorium der Physik [Kne74, pp. 204]) (Siehe Tipler, Physik [Tip94, pp. 729])

Versuch zur Vorlesung: Energie im Kondensator

Ein Plattenkondensator der Kapazität C sei auf die Spannung $U = \frac{Q}{C}$ aufgeladen. Wir transportieren die *Ladung* ΔQ von einer Seite zur anderen. Die Arbeit ist

$$W(Q; Q + \Delta Q) = U \cdot \Delta Q = \frac{Q\Delta Q}{C} \quad (2.89)$$

Dabei haben wir die *Ladung* ΔQ über die Potentialdifferenz U transportiert.

$$W(0; Q) = \int_0^Q \frac{QdQ}{C} = \frac{Q^2}{2C} \quad (2.90)$$

also

$$E_{pot}(C) = \frac{Q^2}{2C} \quad (2.91)$$

oder mit $C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$

$$E_{pot}(d) = \frac{Q^2 d}{2\epsilon_0 A} \quad (2.92)$$

oder mit $Q = U \cdot C$

$$E_{pot}(U) = \frac{U^2 \cdot C}{2} \quad (2.93)$$

Dieser Stoff wurde am 25. 11. 2004 behandelt



Materialien

Folien zur Vorlesung vom 25. 11. 2004: [PDF](#)

Seminar vom 25. 11. 2004: Aufgabenblatt 03 ([HTML](#) oder [PDF](#))

oder mit $Q = EA\epsilon_0$ und $A \cdot d = V$ (das Volumen)

$$E_{pot} = \frac{E^2 \cdot A \cdot d \cdot \epsilon_0}{2} = \frac{E^2 \cdot V \cdot \epsilon_0}{2} = \frac{E \cdot D \cdot V}{2} \quad (2.94)$$

oder mit $w_{el} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{E_{pot}}{V}$ der *Energiedichte des elektrischen Feldes*

$$w_{el} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} = \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{2} \quad (2.95)$$

Die Kraft $\Delta \mathbf{F}_V$ auf ein Volumenelement ΔV wird durch

$$\mathbf{F}_V(\mathbf{r}) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}_V(\mathbf{r})}{\Delta V} = \rho_{el}(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (2.96)$$

beschrieben, da

$$\Delta \mathbf{F}_V(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \Delta Q = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \rho_{el} \cdot \Delta V \quad (2.97)$$

Das elektrische Feld übt eine mechanische Spannung aus

$$\sigma_{Maxwell} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}}{\Delta A} \quad (2.98)$$

Diese Spannung wird *Maxwellspannung* genannt. Sie hat die Einheit des Druckes. \mathbf{n} ist der Normalenvektor der Oberfläche.

Die *Oberflächenladungsdichte* eines Metalls sei die Ursache des elektrischen Feldes. Wir hatten die potentielle Energie im Feld des Plattenkondensators ausgerechnet: $E_{pot} = \frac{Q^2}{2C}$. Die Arbeit, den Kondensator von d auf $d + \Delta d$ zu bringen ist.

$$\begin{aligned}
W(d, d + \Delta d) &= F \Delta d \\
&= E_{pot}(d + \Delta d) - E_{pot}(d) \\
&= \frac{Q^2}{2\epsilon_0 A} (d + \Delta d) - \frac{Q^2 d}{2\epsilon_0 A} \\
&= \frac{Q^2 \Delta d}{2\epsilon_0 A} \\
&= \frac{Q^2}{A^2} \cdot \frac{\Delta d A}{2\epsilon_0} \\
&= \sigma^2 \frac{\Delta d A}{2\epsilon_0} \\
&= \epsilon_0^2 E^2 \cdot \frac{A \Delta d}{2\epsilon_0} \\
&= \frac{\epsilon_0}{2} E^2 A \Delta d
\end{aligned} \tag{2.99}$$

und damit

$$\sigma_{Maxwell} = \frac{F}{A} = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 = \frac{\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}}{2} \tag{2.100}$$

Beispiel: In einem Laser können Felder von 10^{12}V/m auftreten. Dies entspricht einer Maxwell-Spannung von $4.43 \cdot 10^{12} \text{Pa} \simeq 4.43 \cdot 10^7 \text{ bar}$.

Wichtig: Energiedichten haben die Einheit des Druckes. In jedem Raumgebiet, in dem Energie gespeichert wird, herrscht Druck.



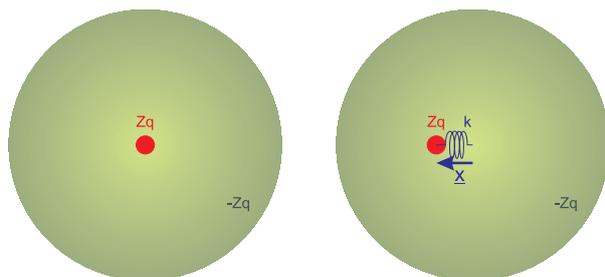
Versuch zur Vorlesung:

Spannungswaage (Kirchhoffsche Waage) (Versuchskarte ES-16)

2.9. Elektrische Eigenschaften der Materie

Dieser Stoff wurde am 25. 11. 2004 behandelt

Wir betrachten ein Modellatom bestehend aus einem Kern der *Ladung* Ze und einer Elektronenwolke der *Ladung* $-Ze$. Ohne äusseres Feld liegen die Ladungsschwerpunkte übereinander.



Schematisches Bild eines Atoms mit seiner Elektronenhülle.

Das Kräftegleichgewicht lautet:

$$\mathbf{F} = Ze\mathbf{E} = -k(-\mathbf{x}) = k\mathbf{x} \quad (2.101)$$

Das induzierte Dipolmoment ist

$$\mathbf{p}_{ind} = Ze\mathbf{x} \quad (2.102)$$

und damit

$$\mathbf{p}_{ind} = \frac{(Ze)^2}{k} \cdot \mathbf{E} = \alpha\mathbf{E} \quad (2.103)$$

Dabei ist α die *atomare Polarisierbarkeit* (Einheit $[\alpha] = Fm^2 = \frac{Cm^2}{V} = \frac{Asm^2}{V}$).

gefüllte Elektronenschale

Atom oder Molekül	$\alpha / \left(10^{-40} \frac{Asm^2}{V}\right)$
He	0.2
Li ⁺	0.03
Ne	0.4
K ⁺	0.9
Xe	3.5
O ²⁻	3.5
CCL ₄	10
CL ⁻	4
I ⁻	7

nicht gefüllte Elektronenschale

Atom oder Molekül	$\alpha / \left(10^{-40} \frac{Asm^2}{V}\right)$
H	0.7
Li	13
K	38
Cs	46

Die potentielle Energie des induzierten Dipols im homogenen Feld \mathbf{E} ist

$$E_{pot} = \frac{\alpha}{2} \mathbf{E}^2 = \frac{\mathbf{p}_{ind}^2}{2\alpha} = \frac{1}{2} \mathbf{E} \mathbf{p}_{ind} \quad (2.104)$$

da

$$\Delta E_{pot} = W(\mathbf{p}, \mathbf{p} + \Delta\mathbf{p}) = Q\mathbf{E} \cdot \Delta\mathbf{x} = \mathbf{E} \cdot \Delta\mathbf{p} = \frac{\mathbf{p}}{\alpha} \cdot \Delta\mathbf{p} \quad (2.105)$$

und damit

$$E_{pot} = \int_0^p \frac{p}{\alpha} dp = \frac{p^2}{2\alpha} \quad (2.106)$$

2.9.1. Dielektrika

Dieser Stoff wurde am 25. 11. 2004 behandelt

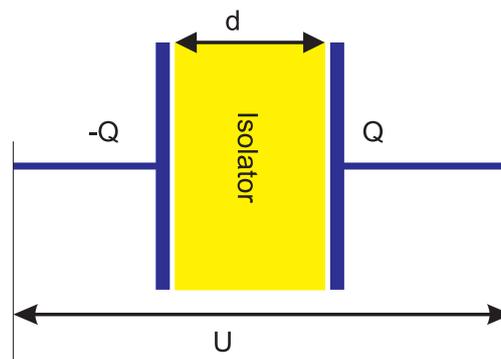


Versuch zur Vorlesung:

Plattenkondensator mit Dielektrikum (Versuchskarte ES-3)

Bis jetzt haben wir angenommen, dass das elektrische Feld im Vakuum gemessen wurde. Dann gilt

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} \quad (2.107)$$



Isolatoren in einem Kondensatoren

Die Beziehung zwischen angelegter Spannung und dem elektrischen Feld ist

$$E = \frac{U}{d} \quad (2.108)$$

unabhängig von den Eigenschaften des Isolationsmaterials. Andererseits ist

$$D = \epsilon_0 E = \frac{\epsilon_0 U}{d} = \frac{\epsilon_0 Q}{Cd} = \frac{\epsilon_0 Q}{\epsilon_0 \frac{A}{d} d} = \frac{Q}{A} \quad (2.109)$$

abhängig von der gespeicherten *Ladung*. Am Kondensator können D und E unabhängig bestimmt werden.

In vielen Fällen sind \mathbf{D} und \mathbf{E} linear voneinander abhängig.

$$\mathbf{D} = \epsilon \epsilon_0 \mathbf{E} = (1 + \chi_e) \epsilon_0 \mathbf{E} \quad (2.110)$$

mit $\epsilon \geq 1$ und $\chi_e \geq 0$

ϵ heisst die Dielektrizitätskonstante, χ_e die dielektrische Suszeptibilität.

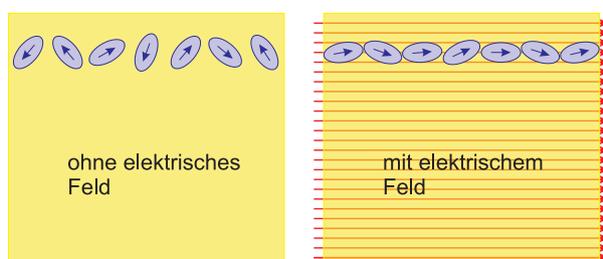
Im allgemeinen sind ϵ und χ_e Tensoren.

Material	ϵ
Vakuum	1
Luft	1.0006
Paraffin	2.1
Glas	5-9
Wasser(291k, 0Hz)	81
Wasser (291k, 1PHz)	1,77

Alle Formeln der Elektrostatik können auf isotrope und homogene *Dielektrika* angewandt werden, indem ϵ_o durch $\epsilon\epsilon_0$ ersetzt wird.

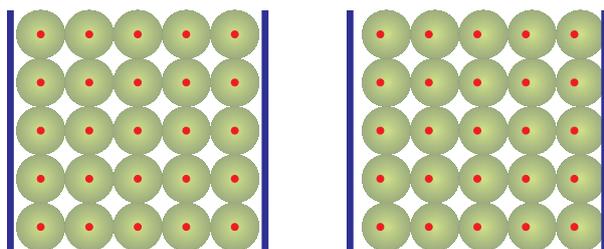
Woher rührt $\epsilon > 1$?

Wenn ein Material ortsfeste permanente elektrische Dipole besitzt, dann werden diese im extremen Feld ausgerichtet. Die *Ladungen* im Inneren des Materials kompensieren sich. An der Oberfläche treten *Ladungen* auf, die das äussere Feld schwächen.



Anordnung permanenter Dipole ohne und mit elektrischem Feld.

Dabei werden die positiven *Ladungen* an der Oberfläche angereichert, in die das elektrische Feld zeigt. Die negativen *Ladungen* werden auf der Gegenseite angereichert. Diese Polarisation heisst *Orientierungspolarisation*.



Links: unpolares Medium ohne äusseres elektrisches Feld. Rechts: mit einem nach links gerichteten elektrischen Feld.

Ein unpolares Medium wird durch das äussere Feld nach Gleichung (2.103) polarisiert. Die Ladungsschwerpunkte der Elektronen verschieben sich und wieder entsteht ein inneres elektrisches Feld, das dem äusseren Feld entgegen wirkt. Diese Polarisation ist die *Verschiebungspolarisation*.

2.9.1.1. Stetigkeitsbedingungen an der Grenze zweier Dielektrika

Dieser Stoff wurde am 2. 12. 2004 behandelt



Materialien

Folien zur Vorlesung vom 02. 12. 2004: PDF

Seminar vom 9. 12. 2004: Aufgabenblatt 04 (HTML oder PDF)

Wir verwenden das *Gauss'sche Gesetz*. Im ladungsfreien Raum gilt $\mathbf{div} \mathbf{D} = 0$ (siehe Gleichung (2.19)). Da das elektrostatische Feld ein konservatives Feld ist, gilt auch $\mathbf{rot} \mathbf{E} = 0$. Wir betrachten eine Oberfläche A , die ein Stück ΔA der Grenzfläche umschließt. Dann ist

$$\int_A \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} = -D_{1\perp} \Delta A + D_{2\perp} \Delta A = 0$$

und damit gilt für die *dielektrische Verschiebung* die folgende Stetigkeitsbedingung

$$D_{1\perp} = D_{2\perp} \quad (2.111)$$

Wir verwenden weiter eine Schlaufe s , die die Grenzfläche zweimal durchdringt und erhalten

$$\int_{A(s)} \mathbf{rot} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \oint_s \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = E_{1\parallel} \frac{s}{2} - E_{2\parallel} \frac{s}{2} = 0$$

und damit gilt für das *elektrische Feld* die folgende Stetigkeitsbedingung

$$E_{1\parallel} = E_{2\parallel} \quad (2.112)$$

An der Grenzfläche zweier Dielektrika gilt

- die Komponente der dielektrischen Verschiebung senkrecht zur Grenzfläche und
- die Komponente des elektrischen Feldes parallel zur Grenzfläche

sind stetig.

Mit $\mathbf{grad} \varphi = -\mathbf{E}$ können diese Stetigkeitsbedingungen auch für das *Potential* φ umgeschrieben werden

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_2 \\ \epsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} &= \epsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \end{aligned} \quad (2.113)$$

2.9.1.2. Das Gesetz von Clausius und Mosotti

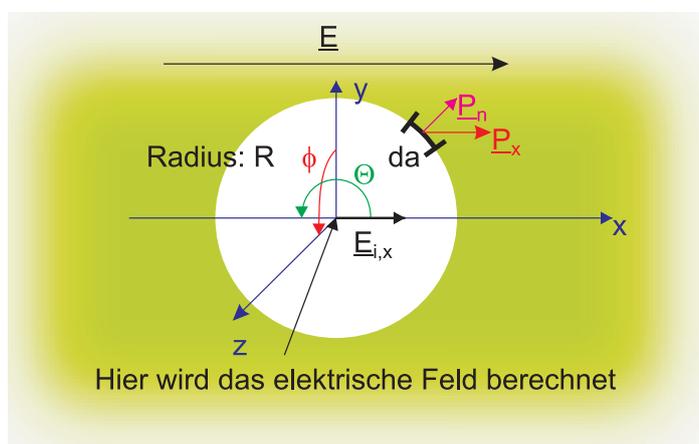
In diesem Abschnitt wollen wir aus einer mikroskopische Betrachtung einen Zusammenhang zwischen der relativen *Dielektrizitätszahl* und der *Polarisierbarkeit* ableiten. Die *Polarisation* eines Atoms oder Moleküls hängt von der *Polarisierbarkeit* α sowie vom lokalen elektrischen Feld $\mathbf{E}_{\text{lokal}}$ ab. Dieses lokale Feld ist die Summe aus dem externen Feld \mathbf{E} sowie dem Feld aller anderen Dipole am Beobachtungsort, \mathbf{E}_i .

$$\mathbf{E}_{\text{lokal}} = \mathbf{E} + \mathbf{E}_i \quad (2.114)$$

Die *Polarisation* hängt vom lokalen Feld $\mathbf{E}_{\text{lokal}}$ wie folgt ab:

$$\mathbf{P} = N\mathbf{p}_{\text{ind}} = N\alpha\mathbf{E}_{\text{lokal}} \quad (2.115)$$

wobei N die Dichte der induzierten Dipole ist.



Berechnung des Gesetzes von Clausius-Mosotti

Zur Berechnung von \mathbf{E}_i und damit $\mathbf{E}_{\text{lokal}}$ betrachten wir ein homogenes Dielektrikum mit ϵ , bei dem ein kugelförmiges kleines Volumen mit dem Radius R entfernt wurde. In diesem Volumen berechnen wir das lokale Feld [Som78, 68], das von einem externen Feld \mathbf{E} in der x -Richtung hervorgerufen wird. Das Dielektrikum erzeugt an der Oberfläche des Hohlraums eine Ladungsdichte $\sigma(\Theta) = P_n = P_x \cos \Theta$, analog wie eine Ladungsdichte und ein elektrisches Feld mit $E = \sigma/\epsilon_0$ zusammenhängt. Nach dem Coulombgesetz (Gleichung (2.5)) ist der Beitrag von σda gegeben durch

$$dE_{i,r} = \frac{\sigma da}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{P_x \cos \Theta}{4\pi\epsilon_0 R^2} da \quad (2.116)$$

gegeben. Die x -Komponente ist dann

$$dE_{i,x} = \frac{P_x \cos^2 \Theta}{4\pi\epsilon_0 R^2} da \quad (2.117)$$

Wir integrieren über die ganze Kugel und beachten, dass $da = r^2 \sin \Theta d\Theta d\varphi$ ist. Die Integration über φ (Faktor 2π) und diejenige über r (Faktor 1, da die Ladung an der Oberfläche konzentriert ist) sind sofort ausführbar, so dass wir mit

$$\int \cos^2(\Theta) \sin(\Theta) d\Theta = -\frac{1}{3} \cos^3(\Theta)$$

$$E_{i,x} = \frac{P_x}{4\pi\epsilon_0} 2\pi \int_0^\pi \cos^2 \Theta \sin \Theta d\Theta = \frac{1}{3\epsilon_0} P_x \quad (2.118)$$

erhalten. Da die x -zufällig gewählt wurde, gilt die *Lorentz-Beziehung* auch allgemein

$$E_i = \frac{1}{3\epsilon_0} P \quad (2.119)$$

Mit

$$\mathbf{P} = (\epsilon - 1) \epsilon_0 \mathbf{E} = \chi_e \epsilon_0 \mathbf{E} \quad (2.120)$$

wird aus der Kombination von Gleichung (2.115) und Gleichung (2.119) die *Clausius-Mosotti-Beziehung*

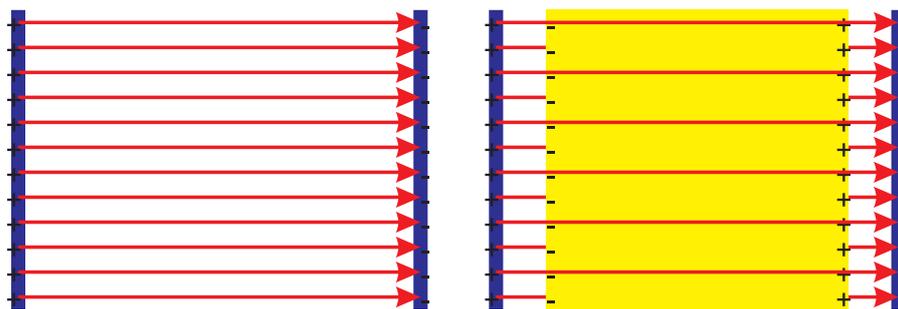
$$\frac{\chi_e}{\chi_e + 3} = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} = \frac{N\alpha}{3\epsilon_0} \quad (2.121)$$

die die Polarisierbarkeit α mit der Dielektrizitätszahl ϵ verknüpft.

Die Rechnung verläuft folgendermassen

$$\begin{aligned} P &= (\epsilon - 1) \epsilon_0 E \\ E &= \frac{P}{(\epsilon - 1) \epsilon_0} \\ P &= N\alpha E_{\text{lokal}} \\ E_{\text{lokal}} &= \frac{P}{N\alpha} \\ E_{\text{lokal}} &= E + E_i \\ \frac{P}{N\alpha} &= \frac{P}{(\epsilon - 1) \epsilon_0} + \frac{P}{3\epsilon_0} \\ \frac{1}{N\alpha} &= \frac{1}{(\epsilon - 1) \epsilon_0} + \frac{1}{3\epsilon_0} \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} \left(\frac{1}{(\epsilon - 1)} + \frac{1}{3} \right) \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} \left(\frac{3 + \epsilon - 1}{3(\epsilon - 1)} \right) \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} \left(\frac{2 + \epsilon}{3(\epsilon - 1)} \right) \\ \frac{N\alpha}{3\epsilon_0} &= \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} \end{aligned}$$

2.9.1.3. Kondensator gefüllt mit Dielektrikum



Links: Kondensator ohne und rechts: mit Dielektrikum

Wir betrachten einen Kondensator, dessen Platten die konstante *Ladung* Q tragen. Das Feld im Inneren des Kondensators sei um den Faktor ϵ geringer als das Feld E_0 ohne Dielektrikum

$$E = \frac{E_0}{\epsilon} \quad (2.122)$$

Bei einem Plattenkondensator mit dem Abstand d ist

$$U = Ed = \frac{E_0 d}{\epsilon} = \frac{U_0}{\epsilon} \quad (2.123)$$

Die Kapazität ist

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{\frac{U_0}{\epsilon}} = \epsilon \frac{Q}{U_0} = \epsilon C_0 \quad (2.124)$$

Also ist beim Plattenkondensator

$$C = \epsilon \epsilon_0 \frac{A}{d} \quad (2.125)$$

Die dielektrische Verschiebung ist im obigen Falle konstant

$$D = \frac{Q}{A} \quad (2.126)$$

Hält man die Spannung fest, wenn ein Dielektrikum in den Kondensator eingebracht wird ist,

$$Q = \epsilon Q_0 \quad (2.127)$$

2.9.2. Elektrische Phänomene

Dieser Stoff wurde am 02. 12. 2004 behandelt

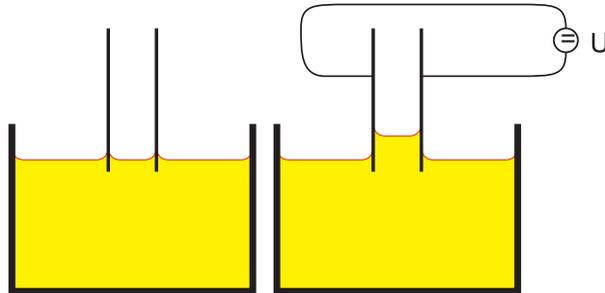


Versuch zur Vorlesung:

Steighöhe im Kondensator (Versuchskarte ES-12)

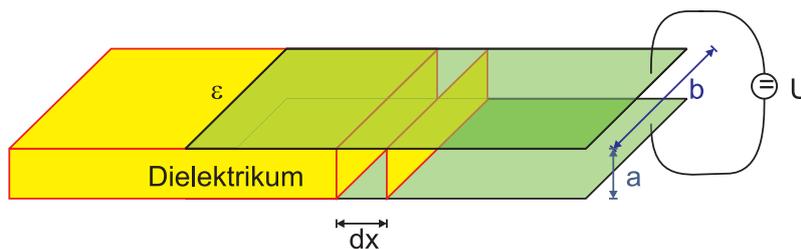
Die Energiedichte im Kondensator ist

$$w_{el} = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \quad (2.128)$$



Links eine dielektrische Flüssigkeit im Kondensator ohne angelegtes Feld.
Rechts mit angelegtem Feld.

Wenn wir das obige Experiment durchführen, steigt die dielektrische Flüssigkeit. Dabei erhöht sich die im elektrischen Feld gespeicherte Energie und auch die potentielle Energie.
Wie geht das?



Skizze der Änderungen beim Anlegen einer Spannung

Zur Berechnung müssen wir auch die Batterie oder Spannungsquelle mit betrachten [\[Kän78\]](#).

1. Mechanische Arbeit:

$$dW_{mech} = F dx$$

2. **Elektrostatistische Energie** im Volumen $abdx$: Die Spannung U wird konstant gehalten, und damit auch

$$E = \frac{U}{a}$$

Dabei nehmen wir ein homogenes Feld an

$$\begin{aligned} dW_{el} &= \left(\frac{1}{2} \epsilon \epsilon_0 E^2 - \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \right) abdx \\ &= \frac{1}{2} (\epsilon - 1) \epsilon_0 \frac{U^2}{a^2} abdx \\ &= \frac{1}{2} (\epsilon - 1) \epsilon_0 U^2 \frac{b}{a} dx \end{aligned} \quad (2.129)$$

3. Die **Batterie** liefert elektrische Energie, da die Ladungsmenge sich ändert. Die Kapazität ändert sich um

$$\begin{aligned} dC &= \epsilon\epsilon_0 \frac{b dx}{a} - \epsilon_0 \frac{b dx}{a} \\ &= (\epsilon - 1) \epsilon_0 \frac{b dx}{a} \end{aligned} \quad (2.130)$$

Die Spannung U_0 wird aufrecht erhalten und die *Ladung* dQ transportiert ($E_{pot} = qU$)
Also

$$\begin{aligned} dW_{Batt} &= U dQ \\ &= U \cdot U dC \\ &= (\epsilon - 1) \epsilon_0 U^2 \frac{b dx}{a} \end{aligned} \quad (2.131)$$

4. Die **Energiebilanz** ist

$$dW_{mech} + dW_{el} = dW_{Batt} \quad (2.132)$$

$$F dx + \frac{1}{2} (\epsilon - 1) \epsilon_0 U^2 \frac{b}{a} dx = (\epsilon - 1) \epsilon_0 U^2 \frac{b}{a} dx \quad (2.133)$$

und somit

$$F = \frac{1}{2} (\epsilon - 1) \epsilon_0 \frac{b}{a} U^2 \quad (2.134)$$

2.10. Zusammenfassung: die Grundgleichungen der Elektrostatik

Dielektrizitätskonstante Gleichung (2.4)

$$\epsilon_0 = 8.8544 \times 10^{-12} \frac{C^2}{N m^2}$$

Coulomb-Gesetz Gleichung (2.5)

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 \cdot q_2}{r_{12}^2} \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}}$$

Elektrisches Feld Gleichung (2.7)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r_{12}^2} \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}}$$

Elektrische Feldlinien • Elektrische Feldlinien beginnen bei der positiven *Ladung* und enden bei der negativen *Ladung*.

- Die Anzahl der von einer *Ladung* ausgehenden oder auf einer *Ladung* endenden Feldlinien ist proportional zur Ladungsmenge.

- Ihre Dichte ist proportional zum elektrischen Feld.

Elektrisches Feld einer kontinuierlichen Ladungsverteilung Gleichung (2.10)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho_{el}(\mathbf{r})}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|^2} \frac{\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|} dV$$

Ladung in einem Raumgebiet Gleichung (2.12)

$$Q = \int_{V(S)} \rho_{el}(\mathbf{r}) dV$$

dielektrische Verschiebung Gleichung (2.15)

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r})$$

elektrischer Fluss $\Phi = \int_{\text{Oberfläche}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a}$

Gaussches Gesetz Gleichung (2.14)

$$\begin{aligned} \int_{\text{Kugeloberfläche}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} da &= \int_{\text{Kugel}} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \cdot \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} r^2 \sin\Theta d\Theta d\varphi \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{Kugeloberfläche}} \sin\Theta d\Theta d\varphi \\ &= \frac{Q}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

Differentialform des Gausschen Gesetzes Gleichung (2.19)

$$\text{div } \mathbf{D}(\mathbf{r}) = \rho_{el}(\mathbf{r})$$

Leiter Leiter haben in ihrem Inneren keine statischen elektrischen Felder.

Potentielle Energie einer Probeladung Gleichung (2.40)

$$E_{pot}(\mathbf{r}_2) = E_{pot}(\mathbf{r}_1) - \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot d\mathbf{r}$$

Elektrostatistisches Potential und Spannung Gleichung (2.47)

$$\varphi(\mathbf{r}) = U(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} = \frac{E_{pot}(\mathbf{r})}{q}$$

Potentielle Energie und Potential Gleichung (2.50)

$$\begin{array}{ccc}
 & \lim_{q \rightarrow 0} /q & \\
 & \longrightarrow & \\
 \mathbf{F}(\mathbf{r}) & & \mathbf{E}(\mathbf{r}) \\
 & \longleftarrow & \\
 & \lim_{q \rightarrow 0} \cdot q & \\
 \\
 - \int \mathbf{F} d\mathbf{r} & \uparrow & - \int \mathbf{E} d\mathbf{r} & \uparrow \\
 \downarrow & - \mathbf{grad} E_{pot} & \downarrow & - \mathbf{grad} U \\
 \\
 E_{pot}(\mathbf{r}) & \lim_{q \rightarrow 0} /q & & U(\mathbf{r}) = U(\mathbf{r}) \\
 & \longrightarrow & & \\
 & \longleftarrow & & \\
 & \lim_{q \rightarrow 0} \cdot q & &
 \end{array}$$

Potential einer kontinuierlichen Ladungsverteilung Gleichung (2.53)

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho_{el}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

Poisson-Gleichung Gleichung (2.68)

$$\Delta U(\mathbf{r}) = -\frac{\rho_{el}(\mathbf{r})}{\epsilon_0}$$

Kapazität Gleichung (2.76)

$$U_j - U_i = \frac{Q}{C_{ji}} = U_{ji} = \varphi_{ij}$$

Parallelschaltung von Kondensatoren Gleichung (2.85)

$$C = \sum_{i=1}^n C_i$$

Reihenschaltung von Kondensatoren Gleichung (2.88)

$$\frac{1}{C_{ges}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}$$

Energiedichte des elektrostatischen Feldes Gleichung (2.95)

$$w_{el} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} = \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{2}$$

Maxwell-Spannung Gleichung (2.98) und Gleichung (2.100)

$$\begin{aligned}
 \sigma_{Maxwell} &= \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}}{\Delta A} \\
 \sigma_{Maxwell} &= \frac{F}{A} = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 = \frac{\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}}{2}
 \end{aligned}$$

induziertes Dipolmoment Gleichung (2.103)

$$\mathbf{p}_{ind} = \frac{(Ze)^2}{k} \cdot \mathbf{E} = \alpha \mathbf{E}$$

Lorentz-Beziehung Gleichung (2.119)

$$E_i = \frac{1}{3\epsilon_0} P$$

dielektrische Suszeptibilität Gleichung (2.110)

$$\mathbf{D} = \epsilon\epsilon_0 \mathbf{E} = (1 + \chi_e) \epsilon_0 \mathbf{E}$$

Stetigkeit der Feldkomponenten An der Grenzfläche zweier Dielektrika gilt

- die Komponente der dielektrischen Verschiebung senkrecht zur Grenzfläche und
 - die Komponente des elektrischen Feldes parallel zur Grenzfläche
- sind stetig.

Stetigkeitsbedingung für das Potential

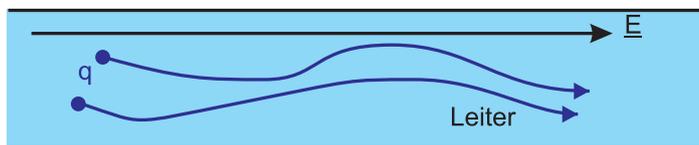
$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_2 \\ \epsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} &= \epsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \end{aligned}$$

3. Elektrische Ströme

Dieser Stoff wurde am 2. 12. 2004 behandelt

Ströme und Magnetfelder beschreiben

- die Funktionsweise von Motoren,
- die Funktionsweise von Fernsehrohren,
- die Funktionsweise von Beschleunigern,
- die Arbeitsweise von Magnetbändern und Festplatten und
- die Funktionsweise von Lautsprechern



Kräfte auf Ladungen in einem Leiter

Bei Anlegen eines elektrischen Feldes werden *Ladungen* beschleunigt. Die Wechselwirkung der *Ladungen* mit dem Medium ergibt eine Begrenzung der *Driftgeschwindigkeit*. Medien für den *Ladungstransport* können sein:

- Metalle
- Ionische Materialien
- Plasmen

Die *Ladungsträger* sind

- Elektronen
- Ionen
- Positronen

- Protonen

also alle geladenen Teilchen oder Moleküle.

Der Strom wird als

$$I = \left. \frac{\Delta Q}{\Delta t} \right|_{\text{Fläche}} \quad (3.1)$$

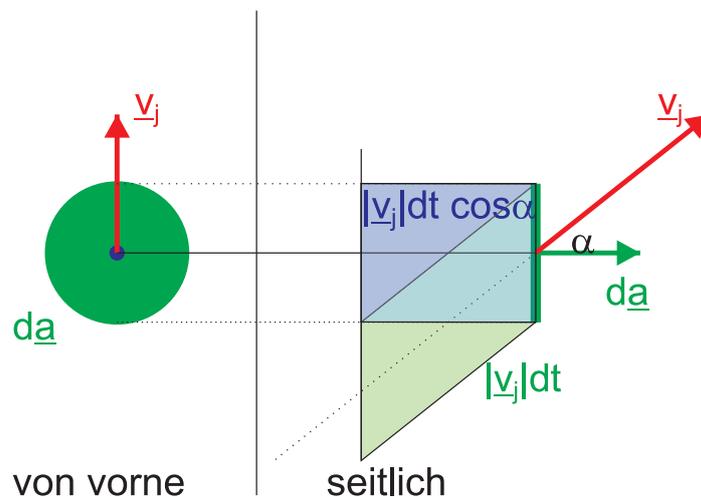
die in einer bestimmten Zeit durch eine Fläche F fließende Ladungsmenge definiert.

Man beobachtet, dass I proportional zu $U = E\ell$, der angelegten Spannung über der Strecke ℓ ist.

3.1. Die Kontinuitätsgleichung und der Begriff des Stromes

Dieser Stoff wurde am 2. 12. 2004 behandelt

(Siehe Leisi, Klassische Physik II [Lei98, pp. 64])



Berechnung des Stromes in einem Medium

Wir betrachten *Ladungsträger* mit der einheitlichen *Ladung* q . Die Ladungsträgerdichte n_j habe die Geschwindigkeit \mathbf{v}_j .

Der Strom δI_j durch das Flächenelement $d\mathbf{a}$ ist

$$\delta I_j = \frac{\delta Q_j}{dt} \quad (3.2)$$

Die *Ladungsmenge* ist

$$\delta Q_j = qn_j |\mathbf{v}_j| \cdot dt \cdot \cos \alpha \cdot |d\mathbf{a}| \quad (3.3)$$

und damit

$$\delta I_j = qn_j |\mathbf{v}_j| \cos \alpha |d\mathbf{a}| = qn_j \mathbf{v}_j \cdot d\mathbf{a} \quad (3.4)$$

Der gesamte *Strom* der *Ladungsträger* q ist dann

$$dI(d\mathbf{a}) = nq \frac{1}{n} \left(\sum_j n_j \mathbf{v}_j \right) \cdot d\mathbf{a} \quad (3.5)$$

wobei $n = \sum n_j$ ist.

Die mittlere Geschwindigkeit der *Ladungsträger* ist

$$\langle \mathbf{v} \rangle = \frac{1}{n} \sum_j n_j \cdot \mathbf{v}_j \quad (3.6)$$

Wir definieren das Vektorfeld der *Stromdichte*

$$\mathbf{i} = nq \langle \mathbf{v} \rangle \quad (3.7)$$

\vec{i} ist abhängig vom Ort, da auch n und $\langle \vec{v} \rangle$ ortsabhängig sind.

Der *Strom* bezüglich $d\mathbf{a}$ ist dann

$$dI(d\mathbf{a}) = \mathbf{i} \cdot d\mathbf{a} \quad (3.8)$$

und, integriert,

$$I(A) = \int_A \mathbf{i} \cdot d\mathbf{a} \quad (3.9)$$

Diese Gleichung besagt, dass der *Strom* gleich dem *Fluss* des *Stromdichtefeldes* durch eine Fläche A ist.

Wird der *Strom* durch mehrere Arten von *Ladungsträgern* gebildet, schreibt man

$$\mathbf{i} = \sum_k n_k q_k \langle \mathbf{v}_k \rangle \quad (3.10)$$

Beispiel

Driftgeschwindigkeit in einem Kupferdraht mit 10mm Durchmesser und $I = 100A$

Annahme: 1 Elektron pro Cu - Atom

Anzahl Cu - Atome pro Volumen

$$\begin{aligned} n_a &= \frac{\rho N_A}{M_{Mol}} = \frac{8930 \frac{kg}{m^3} \cdot 6.02 \cdot 10^{23} \frac{1}{Mol}}{0.0635 kg/Mol} \\ &= 8.47 \cdot 10^{28} \frac{1}{m^3} = n_e \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} \langle v \rangle &= \frac{I}{neA} = \\ &= \frac{100A}{8.47 \cdot 10^{28} \frac{1}{m^3} \cdot \frac{\pi}{4} (0.01)^2 m^2 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} C} \\ &\approx 1 \mu m/s \end{aligned} \quad (3.12)$$

Mit $v(t) = v_0 \cos(2\pi\nu t)$ und $x(t) = \int v(t) dt$ hat man

$$x(t) = \frac{v_0}{2\pi\nu} \sin(2\pi\nu t) + \text{const}$$

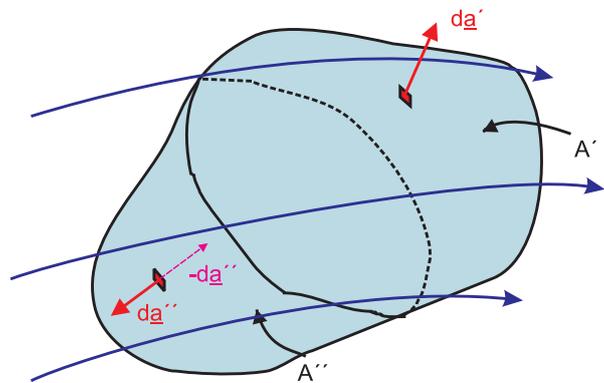
Die maximale Strecke erhält man wenn der Sinus von -1 nach $+1$ geht.
Folgerung: bei $\nu = 50\text{Hz}$ Wechselstrom zittern die Elektronen einige $\frac{1\mu\text{m/s}}{2\pi \cdot 50\text{Hz}} \cdot 2 \approx 6.4\text{nm}$ weit.



Dieser Stoff wurde am 9. 12. 2004 behandelt

Materialien

Folien zur Vorlesung vom 09. 12. 2004: PDF



Berechnung des Flusses eines Stromdichtefeldes durch ein geschlossenes Gebiet

Wir betrachten eine geschlossene Fläche A , die wir in zwei Teilflächen A' und A'' aufteilen, so dass auf der Fläche A' die Feldlinie aus der Fläche austreten und auf der Fläche A'' sie eindringen.

Die *Ladungserhaltung* fordert:

$$I_{\text{aus}} - I_{\text{ein}} = -\frac{d}{dt} Q_{\text{innen}} \quad (3.13)$$

Wir schreiben die Gleichung mit der *Stromdichte* um

$$\int_{A'} \mathbf{i} \cdot d\mathbf{a}' - \int_{A''} \mathbf{i} \cdot (-d\mathbf{a}'') = -\frac{d}{dt} \int_{V(A)} \rho_{el} dV \quad (3.14)$$

oder

$$\int_A \mathbf{i} \cdot d\mathbf{a} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho_{el} dV \quad (3.15)$$

Dies ist die Integralform der *Kontinuitätsgleichung*.

Mit dem *Gausschen Satz* bekommen wir

$$\int_A \mathbf{i} \cdot d\mathbf{a} = \int_V \text{div } \mathbf{i} dV = -\int_V \frac{\partial}{\partial t} \rho_{el} dV \quad (3.16)$$

Die Differentialform der Kontinuitätsgleichung lautet demnach:

$$\operatorname{div} \mathbf{i}(\mathbf{x}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \rho_{el}(\mathbf{x}, t) \quad (3.17)$$

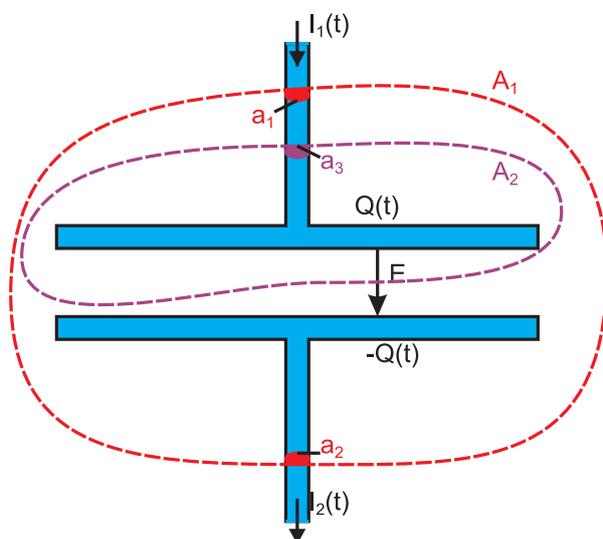
Bei stationären Strömen hängen \vec{i} und ρ_{el} nicht von der Zeit ab, so dass

$$\operatorname{div} \mathbf{i} = 0 \quad (3.18)$$

ist.

$$\int_A \mathbf{i} \cdot d\mathbf{a} = 0 \quad (3.19)$$

Beispiel



Stromfluss in einem Kondensator

Wir betrachten eine quasistationäre Änderung am Kondensator

$$\iint_{A_1} \mathbf{i} \cdot d\mathbf{a} = \iint_{a_1} \mathbf{i} \cdot d\mathbf{a} + \iint_{a_2} \mathbf{i} \cdot d\mathbf{a} = 0 \quad (3.20)$$

Mit $I_1 = -\iint_{a_1} \mathbf{i} \cdot d\mathbf{a}$ und $I_2 = \iint_{a_2} \mathbf{i} \cdot d\mathbf{a}$ folgt

$$I_1 = I_2 \quad (3.21)$$

d.h. es scheint, als ob der *Strom* durch den Kondensator hindurch fließen würde. Wenn wir die Kontinuitätsgleichung auf A_2 anwenden, bekommen wir

$$\iint_{a_3} \mathbf{i} \cdot d\mathbf{a} = -I_1(t) = -\frac{dQ(t)}{dt} \quad (3.22)$$

oder

$$I(t) = \frac{dQ(t)}{dt} \quad (3.23)$$

Die Einheit der Stromstärke ist Ampère [A]

$$1A = 1 \frac{C}{s} \quad (3.24)$$

3.2. Das Ohmsche Gesetz

Dieser Stoff wurde am 9. 12. 2004 behandelt

(Siehe Leisi, Klassische Physik II [Lei98, pp. 71]) (Siehe Tipler, Physik [Tip94, pp. 751])



Versuch zur Vorlesung:

Strom-Spannungs-Kennlinie (Versuchskarte EM-83)

Allgemein gilt für einen Leiter, dass

$$\mathbf{i}(\mathbf{E}) = f(\mathbf{E}) \quad (3.25)$$

eine beliebige Funktion des angelegten Feldes \mathbf{E} ist. Im linearen Fall

$$\mathbf{i}(\mathbf{E}) = \sigma \mathbf{E} \quad (3.26)$$

spricht man von einem *Ohmschen Leiter*.



Versuch zur Vorlesung:

Ohmscher Leiter (Versuchskarte EM-117)

σ ist die *Leitfähigkeit*. Ihre Einheit ist

$$[\sigma] = \frac{A \ m}{m^2 \ V} = \frac{A}{Vm}$$

Das Gesetz Gleichung (3.26) heisst das lokale Ohmsche Gesetz. Indem wir die differentielle Form des Ohmschen Gesetzes integrieren, erhalten wir

$$\int_A \mathbf{i} d\mathbf{a} = I = \int_A \sigma \mathbf{E} d\mathbf{a} = \int_A \sigma \frac{U}{d} d\mathbf{a} = \sigma \frac{A}{d} U \quad (3.27)$$

Dabei haben wir angenommen, dass \vec{i} und σ konstant über A sind. Das integrale Ohmsche Gesetz kann auch als

$$I = G \cdot U \quad (3.28)$$

geschrieben werden. G ist der Leitwert. Die Einheit ist

$$[G] = \text{Siemens} = \frac{A \ m^2}{Vm \ m} = \frac{A}{V}$$

Bekannter ist die Form

$$U = \frac{1}{G} \cdot I = R \cdot I \quad (3.29)$$

$R = \frac{1}{G}$ ist der Widerstand. Seine Einheit ist das Ohm

$$[R] = \Omega = \frac{1}{S} = \frac{V}{A} = \frac{W}{A^2}$$

Die zu R gehörende mikroskopische Grösse ist der spezifische Widerstand

$$\rho = \frac{1}{\sigma} \quad (3.30)$$

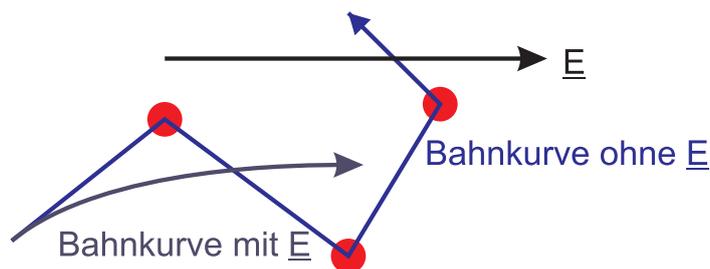
Die Einheiten sind

$$[\rho] = \frac{Vm}{A} = \Omega m = \frac{m}{S}$$

sowie

$$[\sigma] = \frac{A}{Vm} = \frac{S}{m} = \frac{1}{\Omega m}$$

Wir betrachten die Bewegung von Ionen ($\langle v \rangle \approx 100m/s$) in einer Umgebung von nicht ionisierten Molekülen



Bahnkurven ohne und mit elektrischem Feld.

Die Masse der Ionen sei M , ihre *Ladung* q und die Gesamtzahl im betrachteten Volumenelement N

Die Newtonsche Bewegungsgleichung lautet

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad (3.31)$$

oder

$$\Delta\mathbf{p} = q\mathbf{E}\Delta t \quad (3.32)$$

wobei Δt die freie Flugzeit ist.

Der mittlere Impuls ist

$$M \langle \mathbf{v} \rangle = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N [M\mathbf{v}_j^{(k)} + q\mathbf{E}t_j] \quad (3.33)$$

$\langle \mathbf{v} \rangle$ ist die mittlere Driftgeschwindigkeit, $\mathbf{v}_j^{(k)}$ die Geschwindigkeit nach dem letzten Stoss.

Sind die Geschwindigkeiten $\mathbf{v}_j^{(k)}$ isotrop verteilt, mittelt sich der erste Summand zu null. Unter dieser Annahme ist

$$M \cdot \langle \mathbf{v} \rangle = q\mathbf{E} \left(\frac{1}{N} \sum t_j \right) = qE \cdot \langle t \rangle \quad (3.34)$$

wobei $\langle t \rangle = \tau$ die mittlere Zeit zwischen den Zusammenstößen ist. Mit $\mathbf{i} = nq\langle \mathbf{v} \rangle$ bekommen wir

$$\langle \mathbf{v} \rangle = \frac{q \cdot \langle t \rangle}{M} \mathbf{E} = \frac{q\tau}{M} \mathbf{E} \quad (3.35)$$

und

$$\mathbf{i} = n \frac{q^2 \cdot \langle t \rangle}{M} \mathbf{E} = n \frac{q^2 \tau}{M} \mathbf{E} \quad (3.36)$$

Dabei ist n die Dichte der *Ladungsträger*.

Somit ist bei einer Mischung verschiedener *Ladungsträger*

$$\sigma = \sum_k n_k \frac{q_k^2 \tau_k}{M_k} \quad (3.37)$$

Wir haben $\tau = \langle t \rangle$ gesetzt.

Das Ohmsche Gesetz gilt, wenn τ und n_k unabhängig von \mathbf{E} sind,

Beispiel: Metall

Wir nehmen an, dass $m_e \ll m_{\text{kerneln}}$ ist. Dann sind die Geschwindigkeiten nach dem Stossen isotrop verteilt. Die mittlere Geschwindigkeit der Elektronen ist $\langle v_e \rangle = 10^5 \text{ m/s}$ (kinetische Gastheorie). Mit

$$\frac{1}{\rho_{\text{exp}}} = \sigma = n_e \frac{e^2 \tau}{m_e} \quad (3.38)$$

bekommen wir

$$\tau = \frac{m_e}{\rho_{\text{exp}} n_e e^2} = 3.3 \cdot 10^{-14} \text{ s} \quad (3.39)$$

(mit $\rho_{\text{exp}} = 4.3 \times 10^{-8} \Omega \text{ m}$ und $n_e = 2.5 \cdot 10^{28} \frac{1}{\text{m}^3}$ für Na-Metall)

Die mittlere freie Weglänge ist dann

$$\lambda = \langle v_e \rangle \tau = 3.3 \text{ nm} \quad (3.40)$$

im Widerspruch zum Ionenabstand von 0.1nm \implies Lösung: **Quantenmechanik**



Versuch zur Vorlesung:

Leitfähigkeit (Versuchskarte EM-172)



Versuch zur Vorlesung:

Temperaturabhängigkeit der Leitfähigkeit (Versuchskarte TH-122)

Bei einem homogenen Ohmschen Leiter mit einer stationären Stromverteilung ist $\rho_{el} = 0$ im Inneren. Dies folgt aus

1. **Ohmsches Gesetz** $\mathbf{i}(x, y, z) = \sigma \mathbf{E}(x, y, z)$
2. **Kontinuitätsgleichung** $\operatorname{div} \mathbf{i} = 0$, also $\operatorname{div} (\sigma \mathbf{E}) = 0$
und damit $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$
3. das **Gauss'sche Gesetz** sagt $\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho_{el}}{\epsilon_0}$
4. damit folgt die Behauptung, dass $\rho_{el} = 0$.

Aus der Eigenschaft

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi = -\operatorname{grad} U \quad (3.41)$$

erhalten wir im Inneren eines Leiters

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = -\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = -\Delta \varphi = 0 \quad (3.42)$$

Dies bedeutet, dass φ im Inneren eines homogenen Ohmschen Leiters ein Potentialfeld ist. Die Lösung von

$$\Delta \varphi = 0 \quad (3.43)$$

ist durch die Randbedingungen

1. $U = \varphi = \text{const}$ an den Elektrodenflächen (bei den Anschlüssen nach aussen)
2. $\mathbf{i}_\perp = 0$ sonst (entlang des Leiters, Drahtoberfläche!)

gegeben¹

Mit diesen Gleichungen kann man zum Beispiel den Widerstand eines homogenen Leiters berechnen. Bei inhomogenen Leitern müssen wir das Ohmsche Gesetz in seiner Differentialform verwenden. Aus der Kontinuitätsgleichung für stationäre Stromverteilungen Gleichung (3.18) und dem lokalen Ohmschen Gesetz Gleichung (3.26) bekommen wir

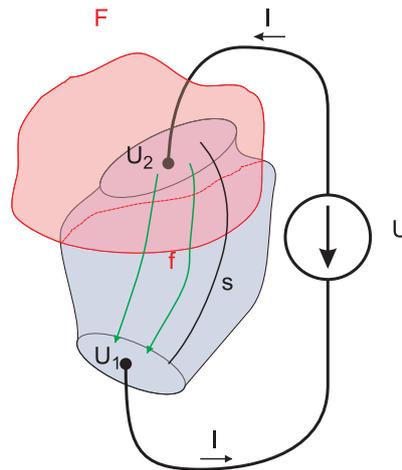
$$\operatorname{div} \mathbf{i} = \operatorname{div} [\sigma(x, y, z) \mathbf{E}(x, y, z)] = 0 \quad (3.44)$$

Wir ersetzen nun \mathbf{E} und erhalten

$$\operatorname{div} [\sigma(x, y, z) \operatorname{grad} U(x, y, z)] = 0 \quad (3.45)$$

Bei einem homogenen Leiter könnte $\sigma(x, y, z)$ vor die Divergenz gezogen werden.

¹Im Gegensatz zum Kondensator ist hier $\mathbf{E} \neq 0$ in einem endlichen Gebiet.



Berechnung des Widerstandes bei einem inhomogenen Leiter

Wir wenden die Kontinuitätsgleichung Gleichung (3.18) auf die Fläche A an.

$$\iint_A \sigma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \iint_a \sigma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = I \quad (3.46)$$

wobei a die durch A aus dem Leiter herausgeschnittene Fläche ist. Die Spannungsdifferenz ist

$$U_2 - U_1 = \int_s \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \quad (3.47)$$

Wenn nun $\varphi_1(x, y, z)$ eine Lösung von Gleichung (3.45) ist, dann ist aufgrund der Linearität dieser Gleichung auch

$$U_2(x, y, z) = kU_1(x, y, z) \quad (3.48)$$

eine Lösung. Dabei kann k eine beliebige, auch komplexzahlige Zahl sein. Da $\mathbf{E} = -\mathbf{grad} U$ auch eine lineare Gleichung ist, muss also auch

$$\mathbf{E}_2 = -\mathbf{grad} U_2 = -k \mathbf{grad} U_1 = k\mathbf{E}_1 \quad (3.49)$$

eine Lösung sein. Nach Gleichung (3.46) ist dann auch

$$I_2 = \iint_a \sigma \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{a} = \iint_a \sigma k \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{a} = k \iint_a \sigma \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{a} = kI_1 \quad (3.50)$$

Damit haben wir, dass bei einem beliebigen inhomogenen Leiter

$$\frac{U_2}{I_2} = \frac{U_1}{I_1} = \text{const} = R \quad (3.51)$$

ist. Die Proportionalitätskonstante ist der Widerstand R . Um den Widerstand eines beliebigen Leiters zu berechnen, muss man $\mathbf{E}(x, y, z)$ im Inneren kennen. Dies kann man erreichen, indem man die Laplacegleichung löst.

Im statischen Falle ist $\mathbf{E}(x, y, z) = 0$ im inneren eines Leiters. Bei einem stromdurchflossenen Leiter liefert die Batterie die notwendige Energie, um das elektrische Feld im Inneren des Leiters aufrecht zu erhalten.

3.3. Elektromotorische Kraft und Joulsche Wärme

Dieser Stoff wurde am 16. 12. 2004 behandelt

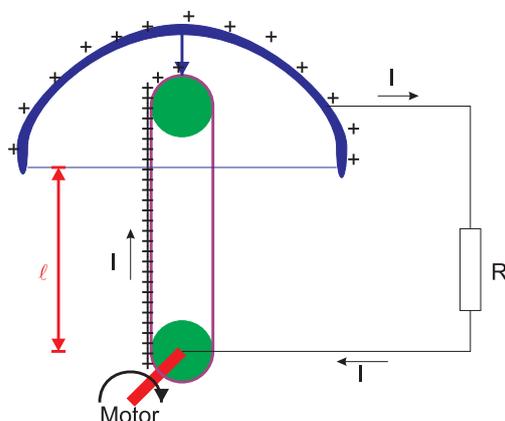


Materialien

Folien zur Vorlesung vom 16. 12. 2004: PDF

(Siehe Leisi, Klassische Physik II [Lei98, pp. 85]) (Siehe Tipler, Physik [Tip94, pp. 756])

Ein elektrisches Feld im Inneren eines Leiters bewirkt einen Strom. Wird dieses elektrische Feld durch *Ladungen* erzeugt, bewirkt der resultierende Strom einen Ausgleich dieser *Ladung*. Durch Influenz werden die Oberflächenladungen so umgeschichtet, dass der Strom abnimmt und schliesslich verschwindet.



Ladungstransport in einem mit einem Widerstand R kurzgeschlossenen van de Graaff-Generator.

Nehmen wir an, dass im stationären Betrieb eine Spannung U zwischen der Kugel und dem Fuss des van-de-Graaff-Generators liegen. Das elektrische Feld entlang des Bandes ist dann, in erster Näherung,

$$E = U/\ell \quad (3.52)$$

Die Arbeit, eine Ladungseinheit dQ gegen dieses elektrische Feld zur Halbkugel zu bringen, ist²

$$dW_M = dQ \cdot U \quad (3.53)$$

Die Leistung des Motors, der hier als Spannungsquelle wirkt, ist

$$P_M = \frac{dW_M}{dt} = \frac{dQ}{dt} U = I \cdot U \quad (3.54)$$

Das elektrische Feld leistet im Widerstand auf der anderen Seite in der Zeit dt die Arbeit

$$dW_E = E \cdot dQ \cdot \ell \quad (3.55)$$

²Wir vernachlässigen dabei die Gravitationsarbeit. Frage: Ist dies für das Problem wichtig (prinzipiell und praktisch)?

oder, mit Gleichung (3.52) ,

$$dW_E = dQ \cdot U \quad (3.56)$$

Damit ist die Leistung des E -Feldes

$$P_E = \frac{dW_E}{dt} = \frac{dQ}{dt} U = I \cdot U = P_M \quad (3.57)$$

Die Energie des elektrischen Stromes wird im Widerstand in *Joulesche Wärme* umgesetzt, also ist die Leistung der Wärmequelle auch

$$P_J = P_M = P_E = I \cdot U \quad (3.58)$$

Bei einem Ohmschen Leiter erhalten wir

$$P = R \cdot I^2 = \frac{U^2}{R} \quad (3.59)$$

Wenn wir eine Probeladung q_0 langsam um den Stromkreis herumführen, ist die geleistete Arbeit grösser als null. Diese Arbeit nennen wir *elektromotorische Kraft* der Stromquelle. Wir definieren also

$$U_{EMK} = \frac{1}{q_0} \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \quad (3.60)$$

Diese elektromotorische Kraft³ ist die Arbeit, die beim Herumführen einer kleinen *Ladung* q_0 von der Stromquelle geleistet wird. Beim van-de-Graaff-Generator besteht diese Arbeit aus zwei Teilen:

- Auf dem Band wird an jedem Punkt die Kraft des elektrostatischen Feldes durch die Kraft des Motors kompensiert. Auf diesem Zweig ist die Arbeit null.
- Die Arbeit, die im Widerstand in *Joulesche Wärme* umgewandelt wird.

Die elektromotorische Kraft einer Stromquelle ist die Quelle der Energie (Arbeit), die einen konstanten Stromfluss in einem Stromkreis aufrecht erhält. Neben der elektromotorischen Kraft können auch magnetische Kräfte und andere Quellen einen Stromfluss in einem Leiter aufrecht erhalten.



Versuch zur Vorlesung:

EMK des Daniell-Elementes (Versuchskarte TH-44)

³Die elektromotorische Kraft ist keine Kraft im Sinne der Mechanik!

3.4. RC-Stromkreise

Dieser Stoff wurde am 16. 12. 2004 behandelt

(Siehe Leisi, Klassische Physik II [Lei98, pp. 88]) (Siehe Tipler, Physik [Tip94, pp. 761]) (Siehe Tipler, Physik [Tip94, pp. 790])



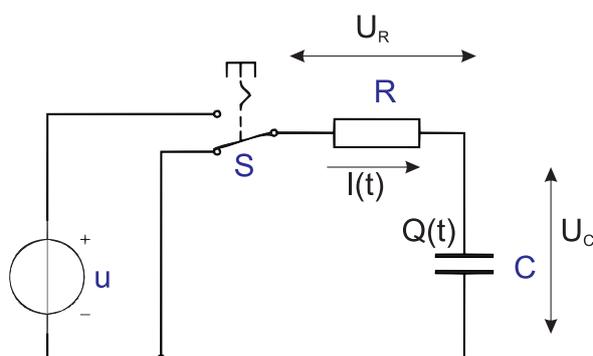
Versuch zur Vorlesung:

Entladen eines Kondensators (Versuchskarte EM-145)

Ohne ein Verständnis von Stromkreisen sind moderne elektronische Schaltungen nicht verständlich. Wir betrachten deshalb Schaltungen aus Kondensatoren und Widerständen. Zur Erinnerung: die relevanten Gleichungen sind

- $U = R \cdot I = R \cdot \frac{dQ}{dt}$ für Widerstände
- $Q = \int I dt = U \cdot C$ für Kondensatoren

Wir betrachten die folgende Schaltung



Aufladen und Entladen eines Kondensators über einen Widerstand.

Für die Zeit $t < 0$ soll der Schalter S in der gezeigten Stellung sein. Die Spannung am Kondensator ist $U_C = 0$. Damit ist auch $Q = 0$ und $I(t) = 0$. Für $t \geq 0$ wird der Kondensator C mit der Spannungsquelle U verbunden. Da Spannungen im quasistationären Falle sich wie potentielle Energien verhalten, kann man für

$$U_R(t) = U - U_C(t) = I(t) \cdot R \quad (3.61)$$

schreiben. Ebenso gilt

$$U_C(t) = \frac{Q(t)}{C} = \frac{\int_0^t I(\tau) d\tau}{C} \quad (3.62)$$

Zusammen erhalten wir die Differentialgleichung

$$\dot{Q}(t) \cdot R + \frac{Q(t)}{C} = U \quad (3.63)$$

oder

$$\dot{Q}(t) + \frac{Q(t)}{C \cdot R} = \frac{U}{R} \quad (3.64)$$

mit der Anfangsbedingung $U_C(0) = 0 = Q(0)$.

Die Lösung dieser Differentialgleichung ist

Partikuläre Lösung $Q = C \cdot U$

Allgemeine Lösung $Q(t) = C \cdot U \cdot e^{-t/(RC)}$

Die Lösung der Differentialgleichung ist

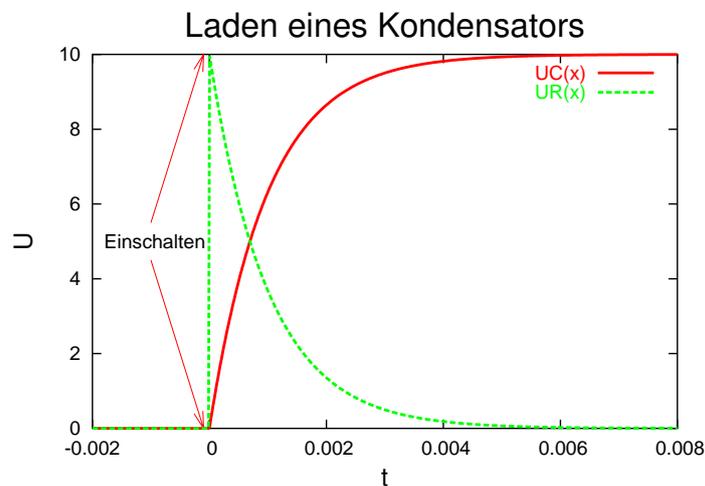
$$Q(t) = U \cdot C \left(1 - e^{-t/(RC)}\right) \quad (3.65)$$

für $U_C(t)$ ist also

$$U_C(t) = \frac{Q(t)}{C} = U \left(1 - e^{-t/(RC)}\right) \quad (3.66)$$

und

$$U_R(t) = I(t) \cdot R = \dot{Q}(t) \cdot R = U e^{-t/(RC)} \quad (3.67)$$



Ladepkurven am Kondensator. Die verwendeten Werte sind $U = 10V$ und $R \cdot C = 0.001s$.

Die Differentialgleichung für das Entladen lautet

$$\dot{Q}(t) \cdot R + \frac{Q(t)}{C} = 0 \quad (3.68)$$

wobei die Anfangsbedingung nun $U_C(0) = U$ oder $Q(0) = C \cdot U$ ist. Die Lösung dieser Differentialgleichung ist

Partikuläre Lösung $Q = 0$

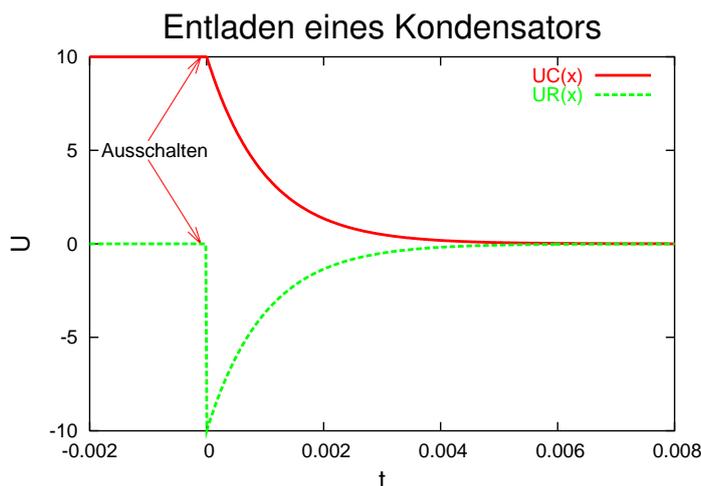
Allgemeine Lösung $Q(t) = C \cdot U \cdot e^{-t/(RC)}$

Damit erhalten wir

$$U_C(t) = \frac{Q(t)}{C} = U \cdot e^{-t/(RC)} \quad (3.69)$$

und

$$U_R(t) = I(t) \cdot R = \dot{Q}(t) \cdot R = -U \cdot e^{-t/(RC)} \quad (3.70)$$



Entladekurven am Kondensator Die verwendeten Werte sind $U = 10V$ und $R \cdot C = 0.001s$.

Die Grösse $\tau = R \cdot C$ ist die Zeitkonstante der Schaltung. In der Zeit τ steigt U_C beim Einschalten von 0 auf 63%. Ebenso fällt beim Ausschalten die Spannung in der Zeit τ von 100% auf 37% ab.

Eine alternative Ableitung dieser Gleichung verwendet eine Leistungsbetrachtung. Die Leistung der Jouleschen Wärme im Widerstand und die zeitliche Änderung der Energie im Kondensator müssen gleich der von der Batterie gelieferten Leistung sein.

$$U \cdot I \cdot = R \cdot I^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{Q^2}{2C} \right) \quad (3.71)$$

oder

$$U \cdot \frac{dQ}{dt} = R \cdot \left(\frac{dQ}{dt} \right)^2 + \frac{1}{C} \cdot Q \cdot \frac{dQ}{dt} \quad (3.72)$$

und damit

$$U = R \cdot \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} \cdot Q \quad (3.73)$$

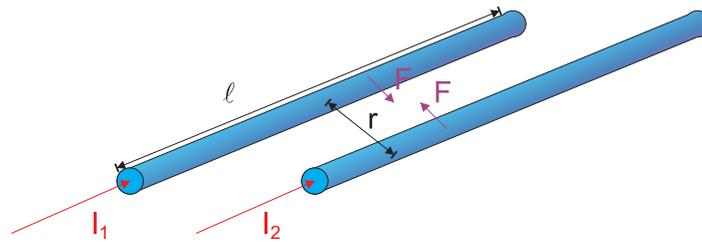
3.5. Magnetfeld und Lorentzkraft

Dieser Stoff wurde am 16. 12. 2004 behandelt



Versuch zur Vorlesung:

Kraft zweier stromdurchflossener Leiter (Versuchskarte EM-63)



Strom in zwei parallelen Leitern. Die Leiter haben die Länge ℓ und sind im Abstand r . Sie sind von den Strömen I_1 und I_2 durchflossen.

Wenn in zwei parallelen Stromkreisen Ströme fließen, so gibt es eine Kraft zwischen den beiden Leitern.

$$F_M = \text{const} \cdot \frac{\ell \cdot I_1 \cdot I_2}{r} \quad (3.74)$$

Die beobachtete Kraft hat die in der Gleichung (3.74) angegebene Form. Sie wird grösser, wenn längere Leiterstücke parallel sind. Sie nimmt ab, wenn der Abstand zunimmt. Sie hängt vom Produkt der beiden Ströme ab und ist **anziehend**, wenn die beiden Ströme in die gleiche Richtung fließen.

Die Kraft F_M ist nicht eine elektrostatische Kraft, da eine geerdete Metallplatte die Kraft, anders als bei der Coulomb-Kraft, nicht abschirmt.

Die Kraft F_M wirkt auf bewegte Ladungen!



Die Kraft F_M wirkt auch auf Elektronenstrahlen.

Versuch zur Vorlesung:

Lorentzkraft auf stromdurchflossenen Leiter ([Versuchskarte Applet](#))

3.6. Die magnetische Kraft

Dieser Stoff wurde am 16. 12. 2004 behandelt

(Siehe Tipler, Physik [[Tip94](#), pp. 812]) (Siehe Leisi, Klassische Physik II [[Lei98](#), pp. 91])

Um die Magnetische Kraft zu berechnen gehen wir in zwei Schritten vor:

1. Wir zeigen, dass elektrostatische Gesetze auch in bewegten *Bezugssystemen* gelten.
2. Wir berechnen mit den Gesetzen der *Relativitätstheorie* die magnetische Kraft.

3.6.1. Ladungsinvarianz bewegter Bezugssysteme

Dieser Stoff wurde am 23. 12. 2004 behandelt

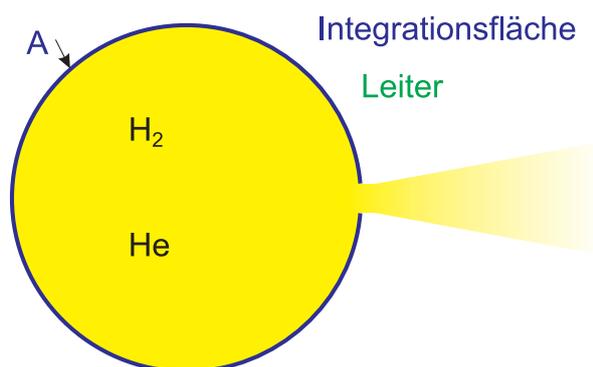


Materialien

Folien zur Vorlesung vom 23. 12. 2004: PDF

Seminar vom 23. 12. 2004: Aufgabenblatt 05 (HTML oder PDF)

(Siehe Leisi, Klassische Physik II [Lei98, pp. 91])



Metallischer Gastank mit Ausströmöffnung.

Mit zwei Gedankenexperimenten soll geklärt werden, ob die *Ladung* von der Geschwindigkeit abhängt. Zuerst schliessen wir eine grosse Menge H_2 -Gas in den metallischen Tank ein, entladen ihn, und lassen das Gas ausströmen. Die *Ladung* des leeren Tanks ist unmessbar klein. Daraus schliesst man:

$$q_{Elektron} = -q_{Proton} \quad (3.75)$$

mit einer Genauigkeit von $|q_{Elektron}|/N = 10^{-20} q_{Elektron}$.

Dies folgt aus dem Gausschen Gesetz Gleichung (2.14)

$$\iint_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = 0 \pm a |q_{Elektron}| = \frac{1}{\epsilon_0} [NQ(H_2) + q] \quad (3.76)$$

wobei q eine eventuell vor dem Ausströmen vorhandene *Ladung*, $Q(H_2)$ die *Ladung* eines Wasserstoffmoleküls und N die Anzahl der eingeschlossenen Wasserstoffmoleküle ist. a ist die Ungenauigkeit der Ladungsmessung. Aus der Tatsache, dass der Metallbehälter nach dem Ausströmen im Rahmen der Messgenauigkeit ungeladen ist, folgt, dass das H_2 -Molekül ungeladen ist.

Der Versuch wird mit He -Gas wiederholt. Das Resultat ist das gleiche. Nun bewegen sich aber die zwei Protonen im He -Atom mit sehr grosser Geschwindigkeit. **Das bedeutet, dass die *Ladung des Protons* unabhängig von der Geschwindigkeit ist.** Die *Ladung* muss insbesondere in jedem *Inertialsystem* gleich sein. Wir betrachten

zwei Inertialsysteme S und S' ⁴

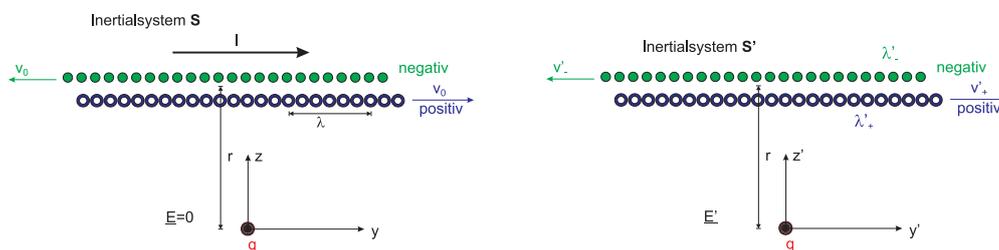
$$\iint_{A(t)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \iint_{A'(t)} \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{a}' \quad (3.77)$$

Diese Gleichung drückt die *relativistische Ladungsinvarianz* aus. Die *Ladungsinvarianz* ist nicht gleich der *Ladungserhaltung*. So ist zum Beispiel die Energie erhalten, zwischen zwei Inertialsystemen aber nicht invariant ($m_0c^2 \neq m(v)c^2$).

3.6.2. Relativistische Berechnung

Dieser Stoff wurde am 23. 12. 2004 behandelt

(Siehe Leisi, Klassische Physik II [Lei98, pp. 94])



*Berechnung der magnetischen Kraft. Links: im Bezugssystem S und rechts: im Bezugssystem S' , in dem q in Ruhe ist. Beachte: wir wissen zwar nicht, wie gross der Strom I gemessen im Bezugssystem S im Bezugssystem S' ist. Die Ladung ist jedoch **invariant**.*

Den Strom I modellieren wir mit zwei Ketten aus Ladungsträgern, je eine positiv und negativ geladen. Ihre Linienladungsdichten λ sollen so sein, dass die beiden Ketten neutral sind. Im Ruhesystem S^+ der positiven *Ladungen* ist

$$\lambda_0 = \frac{Q}{L_0} \quad (3.78)$$

Im Inertialsystem S ist wegen der Ladungsinvarianz

$$\lambda = \frac{Q}{L} \quad (3.79)$$

Wegen der Längenkontraktion gilt

$$L = \frac{L_0}{\gamma_0} = L_0 \sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}} \quad (3.80)$$

Zusammengenommen erhalten wir

$$\lambda_0 = \frac{\lambda}{\gamma_0} \quad (3.81)$$

Die gleiche Beziehung kann für die negativen *Ladungen* abgeleitet werden. Das heisst, wenn in S die Linienladungsdichten der positiven und negativen *Ladungen*

⁴Die Inertialsysteme bewegen sich gegeneinander mit konstanter Geschwindigkeit!

gleich sind, dann auch in den jeweiligen Ruhesystemen. In den Ruhesystemen ist die Linienladungsdichte geringer als in bewegten Bezugssystemen. Da die beiden bewegten Ladungsketten die gleiche Linienladungsdichte im System S haben, ist $\mathbf{E} = 0$.

Im Ruhesystem S' , in dem das Teilchen mit der *Ladung* q in Ruhe ist, sieht die Situation anders aus. Die Geschwindigkeit der positiven und der negativen Ladungsketten ist unterschiedlich. deshalb sind sie zusammen nicht mehr elektrisch neutral. Auf die *Ladung* q wirkt eine elektrostatische Kraft. Da die Relativgeschwindigkeit der positiven *Ladungen* zu q kleiner ist als die der negativen *Ladungen*, liegen in S' die positiven *Ladungen* weniger dicht als die negativen⁵. Die beiden Ladungsketten sind insgesamt **negativ** geladen. Deshalb wird q angezogen, wenn $q > 0$ ist. Das \mathbf{E}' -Feld in die z' -Richtung erzeugt in S' die Kraft

$$F'_z = q \cdot E' \quad (3.82)$$

Das \mathbf{E} -Feld hängt vom Bezugssystem ab, ist also nicht relativistisch invariant!

Das elektrische Feld einer Linienladung im Abstand r ist

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 \cdot r} \quad (3.83)$$

Um das elektrische Feld \mathbf{E}' berechnen wir die Geschwindigkeiten v'_+ und v'_- in S' .

$$\begin{aligned} v'_+ &= \frac{v - v_0}{1 - \frac{v \cdot v_0}{c^2}} \\ v'_- &= \frac{v + v_0}{1 + \frac{v \cdot v_0}{c^2}} \end{aligned} \quad (3.84)$$

Mit den üblichen Abkürzungen

$$\begin{aligned} \beta &\equiv \frac{v}{c} \\ \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{aligned} \quad (3.85)$$

bekommen wir

$$\begin{aligned} \beta'_+ &= \frac{\beta_0 - \beta}{1 - \beta_0\beta} \\ \beta'_- &= \frac{\beta_0 + \beta}{1 + \beta_0\beta} \end{aligned} \quad (3.86)$$

Mit $\gamma'_+ \equiv \gamma(v'_+)$ und $\gamma'_- \equiv \gamma(v'_-)$ und mit $\lambda_0 = \lambda'_+/\gamma'_+$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \lambda'_+ &= \gamma'_+ \left(\frac{\lambda}{\gamma_0} \right) \\ \lambda'_- &= \gamma'_- \left(\frac{\lambda}{\gamma_0} \right) \end{aligned} \quad (3.87)$$

⁵In S sind die Ladungsdichten der positiven und negativen *Ladungen* gleich.

Die Netto-Linienladung in S' ist dann

$$\lambda' = \lambda'_+ - \lambda'_- = \frac{\lambda}{\gamma_0} (\gamma'_+ - \gamma'_-) \quad (3.88)$$

Weiter erhalten wir

$$\begin{aligned} \gamma'_+ - \gamma'_- &= \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_+^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_-^2}} & (3.89) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\beta_0 - \beta}{1 - \beta_0\beta}\right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\beta_0 + \beta}{1 + \beta_0\beta}\right)^2}} \\ &= \frac{1 - \beta_0\beta}{\sqrt{(1 - \beta_0^2)(1 - \beta^2)}} - \frac{1 + \beta_0\beta}{\sqrt{(1 - \beta_0^2)(1 - \beta^2)}} \\ &= \frac{-2\beta_0\beta}{\sqrt{(1 - \beta_0^2)(1 - \beta^2)}} \\ &= -2\beta_0\beta\gamma_0\gamma \end{aligned}$$

Also ist

$$\lambda' = -2\lambda\beta\beta_0\gamma = \frac{-2\lambda v v_0}{c^2} \gamma \quad (3.90)$$

Betrachten wir am Ort der *Ladung* q das von der Linienladung λ' hervorgerufene Feld E'_r . Für positives λ' zeigt dieses in die $-z'$ -Richtung. Also ist das elektrische Feld

$$\begin{aligned} E'_r &= -\frac{\lambda'}{2\pi\epsilon_0 r} & (3.91) \\ &= \frac{2\lambda v_0 v \gamma(v)}{2\pi\epsilon_0 c^2} \cdot \frac{1}{r} \end{aligned}$$

Die Kraft im Ruhesystem S' des Teilchens ist also

$$F'_z = q \cdot E'_r = \frac{2q\lambda v_0 v \gamma(v)}{2\pi\epsilon_0 c^2} \cdot \frac{1}{r} \quad (3.92)$$

Wir verwenden die Lorentztransformation der Impulse

$$\begin{aligned} p'_x &= p_x & (3.93) \\ p'_y &= \gamma(v) \left(p_y - v \frac{E}{c^2} \right) \\ p'_z &= p_z \\ E' &= \gamma(v) (E - v \cdot p_y) \end{aligned}$$

Der *Vierervektor* $(p_x, p_y, p_z, \frac{E}{c^2})$ transformiert sich wie der Vierervektor (x, y, z, t) . Die Kraft transformiert sich also wie

$$F'_z = \frac{dp'_z}{dt'} = \frac{dp_z}{\sqrt{1 - \beta^2} \cdot dt} = \gamma(v) F_z \quad (3.94)$$

Der Strom in S ist

$$I = 2\lambda v_0 \quad (3.95)$$

Damit bekommen wir

$$F_z(r) = \frac{q \cdot v \cdot I}{2\pi\epsilon_0 \cdot c^2} \cdot \frac{1}{r} \quad (3.96)$$

Multipliziert man Gleichung (3.96) mit der Dichte der Ladungsträger n , so erhält man die zu I_2 proportionale Kraft.

$$F(r) = n \cdot F_z(r) = \frac{n \cdot q \cdot v \cdot I}{2\pi\epsilon_0 \cdot c^2} \cdot \frac{1}{r} = \frac{I_2 \cdot I}{2\pi\epsilon_0 \cdot c^2} \cdot \frac{1}{r} \quad (3.97)$$

Die magnetische Kraft F_m im Laborsystem S ist die relativistisch transformierte elektrostatische Kraft auf die Ladung q in deren Ruhesystem S' . Die magnetische Kraft kann als relativistische Korrektur zur elektrostatischen Kraft verstanden werden.

3.7. Eigenschaften des B -Feldes

Dieser Stoff wurde am 23. 12. 2004 behandelt

(Siehe Leisi, Klassische Physik II [Lei98, pp. 98])



Versuch zur Vorlesung:

Fadenstrahlrohr (Versuchskarte EM-11)

Um nicht immer die *Lorentz-Transformation* ausrechnen zu müssen, führen wir die *magnetische Feldstärke* oder die *magnetische Induktion* \mathbf{B} ein. Ein magnetisches Feld lenkt Elektronen ab. Wie wir schon früher gesehen haben, ist eine Bewegung der Ladungsträger für die magnetische Kraft notwendig. Wird das Magnetfeld der *Helmholtzspulen* so gedreht, dass es parallel zur Bewegungsrichtung der *Elektronen* liegt, verschwindet die Magnetkraft. Das folgende Kraftgesetz

$$\mathbf{F}_L = q \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (3.98)$$

beschreibt die magnetischen Kräfte auf Elektronen. Die Kraft \mathbf{F}_L heisst *Lorentz-Kraft*.

Durch den Vergleich von Gleichung (3.98) und Gleichung (3.96) kann man für die magnetische Feldstärke einer linienförmigen Stromverteilung schreiben

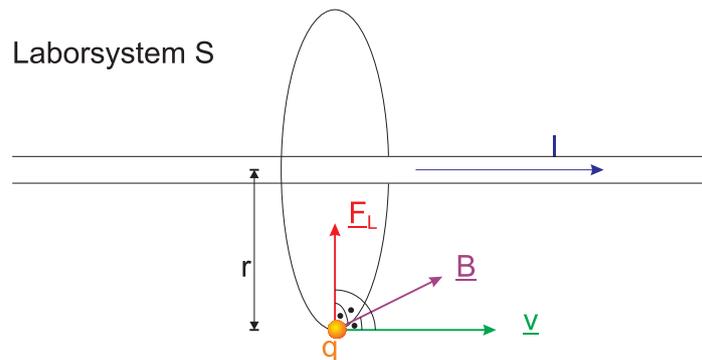
$$B(r) = \frac{I}{2\pi\epsilon_0 c^2} \cdot \frac{1}{r} \quad (3.99)$$

Die *Induktionskonstante*

$$\mu_0 = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \quad (3.100)$$

ermöglicht es Gleichung (3.99) kompakter zu schreiben

$$B(r) = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I}{r} \quad (3.101)$$



Die magnetische Induktion B ist durch den Strom I (Daumen der magnetischen Hand) bestimmt.

Lage der magnetischen Induktion zum Strom und zur Geschwindigkeit der Ladung.



Versuch zur Vorlesung:

Magnetische Feldlinien (Versuchskarte EM-50)

Die magnetische Induktion eines geraden, unendlich ausgedehnten Stromes bildet Feldlinien, die kreisförmig in einer Ebene senkrecht zum Strom liegen. Der Mittelpunkt der kreisförmigen Feldlinien ist der Strom.

Die Kraft zwischen zwei stromdurchflossenen Leitern kann neu berechnet werden. Mit

$$\mathbf{F}_L = q_2 \cdot \mathbf{v}_2 \times \mathbf{B}_1(r) \quad (3.102)$$

wobei q_2 eine Ladung im Leiter 2 ist, und mit n_2 der Ladungsträgerdichte im Leiter 2, ℓ die betrachtete Länge, A_2 der Querschnitt des Leiters und $\langle v_2 \rangle = |\mathbf{v}_2|$, bekommt man

$$F_M = q_2 \cdot \langle v_2 \rangle \cdot B_1(r) \cdot n_2 \cdot \ell \cdot A_2 \quad (3.103)$$

Der Strom im Leiter 2 ist nun aber

$$I_2 = \langle v_2 \rangle \cdot q_2 \cdot n_2 \cdot A_2 \quad (3.104)$$

Damit ist

$$F_M = I_2 \cdot B_1(r) \cdot \ell \quad (3.105)$$

Wenn wir Gleichung (3.101) einsetzen, bekommen wir

$$F_M = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\ell \cdot I_1 \cdot I_2}{r} \quad (3.106)$$

Diese Gleichung wird zur Definition der Einheit der magnetischen Induktion im *SI-System* verwendet.

$$\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} \frac{N}{A^2} \quad (3.107)$$

Die Einheit der magnetischen Induktion ist

$$[B] = \text{Tesla} = T = \frac{N \cdot s}{C \cdot m} = \frac{N}{Am} = \frac{V \cdot s}{m^2} \quad (3.108)$$

- Die gesamte Kraft einer bewegten Ladung q in einer beliebigen Ladungs- und Stromverteilung ist

$$\mathbf{F} = q \cdot \mathbf{E} + q \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (3.109)$$

Dies ist das *Kraftgesetz der Elektrodynamik*

- Das magnetische Feld ist kein fundamentales Feld, sondern eine relativistische Korrektur zu dem elektrostatischen Feld.

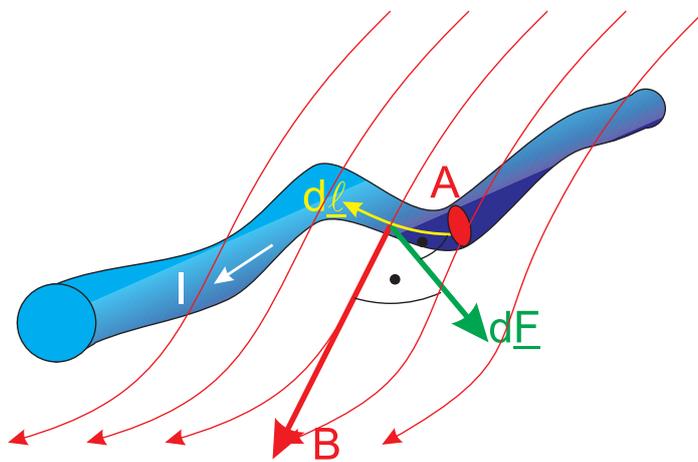
Dieser Stoff wurde am 13. 1. 2005 behandelt



Materialien

Folien zur Vorlesung vom 13. 01. 2005: [PDF](#)

Die Kraft auf einen stromdurchflossenen Leiter in einem beliebigen Magnetfeld kann mit dem *Gesetz von Biot-Savart* berechnet werden.



Berechnung der Kraft auf ein Leiterelement.

Der Betrag des Vektors $d\mathbf{F}$, der senkrecht auf $d\mathbf{l}$ und senkrecht auf $d\mathbf{B}$ steht, ist

$$dF = q \cdot \langle v \rangle \cdot \sin \phi \cdot B \cdot n \cdot dl \cdot A \tag{3.110}$$

wobei n die Dichte der Ladungsträger und ϕ der Winkel zwischen \mathbf{B} und $d\mathbf{l}$ ist. Mit der Stromdichte $\mathbf{i} = n \cdot \langle v \rangle \cdot q$ erhalten wir

$$dF = i \cdot A \cdot dl \cdot \sin \phi \cdot B = I \cdot dl \cdot \sin \phi \cdot B \tag{3.111}$$

Die vektorielle Schreibweise der *Biot-Savart-Kraft* ist demnach

$$d\mathbf{F} = I \cdot d\mathbf{l} \times \mathbf{B} \tag{3.112}$$

Beispiele

1. Die Kraft für eine beliebig geformte geschlossene Leiterschleife in einem homogenen Magnetfeld ist

$$\mathbf{F} = \oint I \cdot d\mathbf{l} \times \mathbf{B} = I \cdot \left(\oint d\mathbf{l} \times \mathbf{B} \right) \tag{3.113}$$

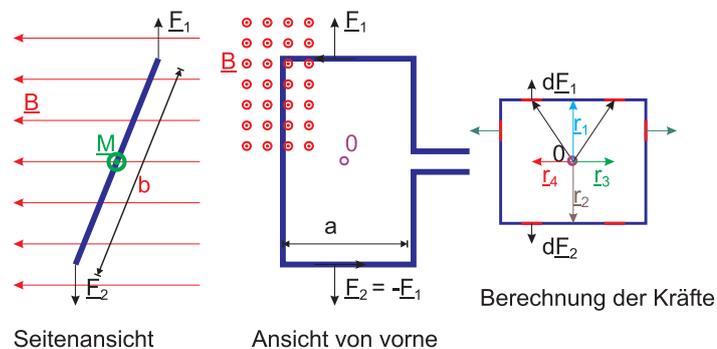
Da das Linienintegral $\oint d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$ über eine geschlossene Schleife null ist (die positiven und die negativen Anteile heben sich auf) ist $\mathbf{F} = 0$.

2. Das Drehmoment auf eine Leiterschleife in einem homogenen Magnetfeld kann durch summieren der Kraftanteile auf die vier Segmente berechnet werden.

Link zur Vorlesung: [\(Elektromotor\)](#)

Versuch zur Vorlesung:

Lorentz-Kraft ([Versuchskarte EM046](#))



Be-

Drehmoment auf eine Leiterschleife im homogenen Magnetfeld züglich 0 ist die Situation symmetrisch. Die in der Zeichnung vertikalen



Leiterelemente liefern kollineare sich aufhebende Kräfte. Die horizontalen Segmente ergeben das Drehmoment

$$\begin{aligned} d\mathbf{M} &= (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_3) \times d\mathbf{F}_1 + (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_4) \times d\mathbf{F}_1 \\ &\quad + (\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3) \times d\mathbf{F}_2 + (\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_4) \times d\mathbf{F}_2 \\ &= 2 \cdot \mathbf{r}_1 \times d\mathbf{F}_1 + 2 \cdot \mathbf{r}_2 \times d\mathbf{F}_2 \end{aligned} \quad (3.114)$$

Das gesamte *Drehmoment* ist

$$\mathbf{M} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 = 2 \cdot \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 \quad (3.115)$$

Das Drehmoment \mathbf{M} liegt in der Ebene der Leiterschleufe. Wenn ϕ der Winkel zwischen der Normalen auf die Ebene der Leiterschleufe und \mathbf{B} ist, gilt mit $F_1 = a \cdot I \cdot B$:

$$M = 2 \frac{b}{2} \sin \phi \cdot F_1 = a \cdot b \cdot I \cdot \sin \phi \cdot B \quad (3.116)$$

Wir definieren das *magnetische Moment* \mathbf{m} so, dass es senkrecht auf die Ebene der Leiterschleufe steht und dass $|\mathbf{m}| = \text{Fläche} \cdot \text{Strom} = a \cdot b \cdot I$ ist. Damit ist

$$\mathbf{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} \quad (3.117)$$

Das Drehmoment auf eine Leiterschleufe im homogenen Magnetfeld wird in *Drehspulinstrumenten*, in *Motoren* oder bei der Sichtbarmachung von Magnetfeldern mit Eisenfeilspänen verwendet.

- Die potentielle Energie einer um den Winkel ϕ gegenüber dem Magnetfeld verdrehten stromdurchflossenen Leiterschleufe wird berechnet, indem man von $\phi = 0$ ausgeht und die Schleufe langsam zum Winkel ϕ dreht. Die Arbeit, um von ϕ' nach $\phi' + d\phi'$ zu drehen ist

$$dU = 2 \cdot F_1 \sin \phi' \cdot \frac{b}{2} \cdot d\phi' = a \cdot b \cdot I \cdot B \cdot \sin \phi' \cdot d\phi' \quad (3.118)$$

Damit erhalten wir

$$U(\phi) = a \cdot b \cdot I \cdot B \cdot \int_0^\phi \sin \phi' \cdot d\phi' = -a \cdot b \cdot I \cdot B \cdot (\cos \phi - 1) \quad (3.119)$$

Wenn wir $U(\phi = \pi/2) = 0$ wählen haben wir

$$U = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B} \quad (3.120)$$

Ein weiteres Beispiel einer Kraftwirkung auf *Ladungen* ist das *Barlowsche Rad*.



Versuch zur Vorlesung:
Barlowsches Rad (Versuchskarte EM004)

3.7.1. Das Ampèresche Durchflutungsgesetz

Dieser Stoff wurde am 13. 1. 2005 behandelt

(Siehe Leisi, Klassische Physik II [Lei98, pp. 104])

Beim unendlich ausgedehnten geraden Leiter war das durch einen Strom I erzeugte Magnetfeld durch kreisförmige Magnetfeldlinien mit der Stärke $B = \frac{\mu_0}{2\pi r} I$ charakterisiert, wobei das \mathbf{B} -Feld tangential zu den Kreisen liegt. Das Linienintegral entlang der Feldlinien, also entlang des Kreises S , ergibt

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \oint_S r d\phi = \mu_0 I \quad (3.121)$$

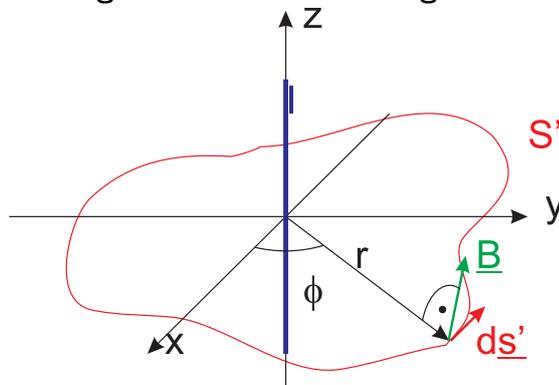
Dieses Linienintegral ist unabhängig von r . Die Behauptung ist, dass die obige Gleichung, ein einfacher Fall des Ampèreschen Durchflutungsgesetzes, allgemeingültig ist.

Ampèresches Durchflutungsgesetz

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \iint_{A(S)} \mathbf{i} \cdot d\mathbf{a} \quad (3.122)$$

Der Beweis geht in mehreren Schritten:

Eine beliebige Kurve S um einen geraden Leiter



ds' ist die Projektion des Weglängenelementes ds auf der Kurve S auf die in der xy -Ebene liegende Projektion der Kurve S' . Es ist

$$\mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}' = B(r) \cdot \cos \alpha ds' = B(r) \cdot r \cdot d\phi$$

da $\mathbf{B}(r)$ keine Komponente in die z -Richtung hat. Es ist

$$\mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot d\phi$$

und damit

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi = \mu_0 I$$

Eine beliebige Kurve S'' , die den Leiter nicht umschliesst Es ist

$$\begin{aligned}\oint_{S'} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} &= \int_A^B \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} + \int_B^A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_A^B d\phi + \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_B^A d\phi \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} (\phi_B - \phi_A) + \frac{\mu_0 I}{2\pi} (\phi_A - \phi_B) = 0\end{aligned}$$

Das bedeutet, dass Ströme durch Leiter, die nicht vom Integrationsweg S umschlossen werden, keinen Beitrag zum Integral geben.

Eine beliebige Kurve S um eine beliebige Stromverteilung Wir betrachten viele Ströme I_k , die von der Integrationskurve S umschlossen werden. Wegen der Linearität des Problems gilt

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \sum_k I_k$$

wobei diejenigen Ströme, die mit dem Umlaufsinn von S eine Rechtsschraube bilden, positiv zu zählen sind.

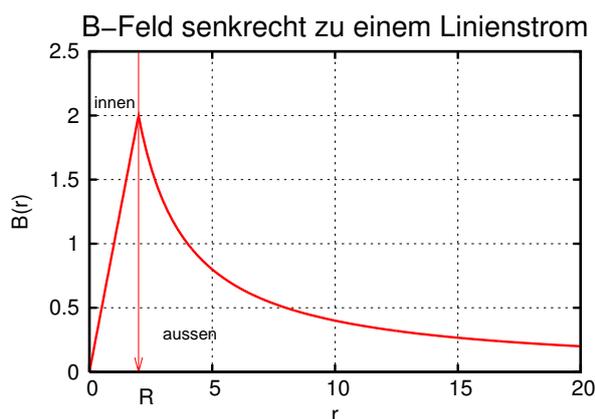
Beispiel

Ein zylindrischer Leiter mit dem Radius R soll homogen vom Strom I durchflossen werden. Aus Symmetriegründen sind die Magnetfeldlinien konzentrische Kreise um den Leiter. Ausserhalb des Leiters ($r > R$) haben wir

$$\oint \mathbf{B}(r) \cdot d\mathbf{s} = 2\pi r \cdot B(r) = \mu_0 \iint \mathbf{i} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \cdot I$$

Innerhalb des Leiters ($r \leq R$) gilt

$$\oint \mathbf{B}(r) \cdot d\mathbf{s} = 2\pi r \cdot B(r) = \mu_0 \iint \mathbf{i} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \cdot i \cdot \pi r^2 = \mu_0 \cdot \frac{I}{2\pi R^2} \cdot \pi r^2 = \mu_0 I \frac{r^2}{R^2}$$



Tangentiales Magnetfeld eines ausgedehnten, unendlich langen Linienstromes.

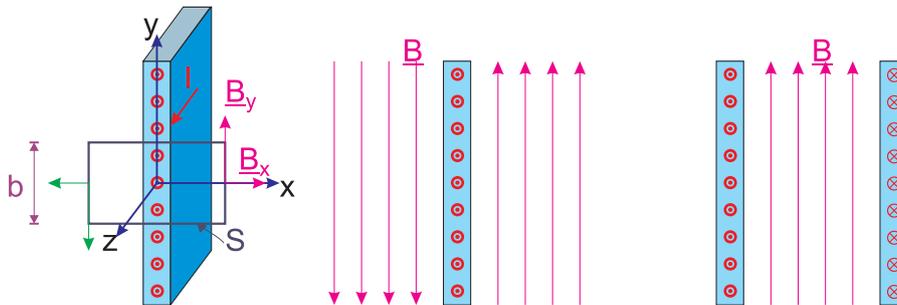
Mit dem Stokeschen Satz (Gleichung (A.43)) kann man die Integralform des Ampèreschen Gesetzes umschreiben

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \iint_{A(S)} \text{rot } \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \mu_0 \iint_{A(S)} \mathbf{i} \cdot d\mathbf{a} \quad (3.123)$$

Da diese Gleichungen für alle Integrationsflächen $A(S)$ gelten müssen, muss auch die differentielle Form des Ampèreschen Gesetzes gelten

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{i} \quad (3.124)$$

Beispiel: homogene Stromverteilung in einem unendlich ausgedehnten Leiter



Magnetfeld einer homogenen Stromverteilung in einer dünnen Platte. Links: die Geometrie zur Berechnung, Mitte: das Magnetfeld eines homogenen Stromflusses und Rechts: das Magnetfeld zweier antiparallel von Strom durchflossener Platten.

Wir definieren eine lineare Stromdichte $j = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{I(\Delta y)}{\Delta y}$. Das Stromfeld können wir uns als Parallelschaltung vieler linearer Leiter vorstellen. Aus dem Superpositionsprinzip folgt, dass

$$\mathbf{B}_z \equiv 0 \quad (3.125)$$

Das resultierende Feld dieser Superposition muss in der xy -Ebene liegen. Auf den beiden Seiten senkrecht zur Platte finden sich immer zwei Stromfäden, die die x -Komponente kompensieren. Wenn wir später das Ampèresche Gesetz auf diese beiden Seiten anwenden, gibt es keine Komponente von \mathbf{B} parallel zur Seite: dieser Teil des Linienintegrals ist null.

Wir betrachten weiter das Feld $\mathbf{B}_x(x)$ und $\mathbf{B}_y(x)$ im Abstand x von der Platte. Wir werden zwei Symmetrieoperationen an:

- Wir drehen die Platte um π um die z -Achse. Die neue Situation (Ströme) ist identisch mit der Ursprungssituation. Deshalb muss

$$\mathbf{B}(x) = -\mathbf{B}(-x)$$

sein.

- Wir drehen die Platte um π um die y -Achse und drehen gleichzeitig die Flussrichtung des Stromes um $j \rightarrow -j$. Die Endsituation ist ununterscheidbar von der am Anfang. Also gilt auch

$$\mathbf{B}_x(-x) = \mathbf{B}_x(x)$$

und

$$B_y(-x) = -B_y(x)$$

Mit den beiden Symmetrieüberlegungen folgt:

$$\mathbf{B}_x(x) \equiv 0 \quad (3.126)$$

Um \mathbf{B}_y zu bestimmen, nehmen wir an, dass unser Integrationspfad S symmetrisch bezüglich der Platte ist. Das Ampèresche Gesetz sagt

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 2B_y(x) \cdot b + 2 \cdot 0 = \mu_0 \iint id\mathbf{f} = \mu_0 \cdot j \cdot b$$

Das Resultat ist unabhängig von x und homogen im Raum. Die Magnetfeldlinien sind parallel zur Platte und links und rechts antiparallel (siehe Abbildung oben Mitte).

$$B_y = \frac{\mu_0}{2} j \quad (3.127)$$

Bei zwei antiparallel von Strom durchflossenen Platten ist das Magnetfeld auf den Raum zwischen den Platten beschränkt.

$$B = \mu_0 j \quad (3.128)$$

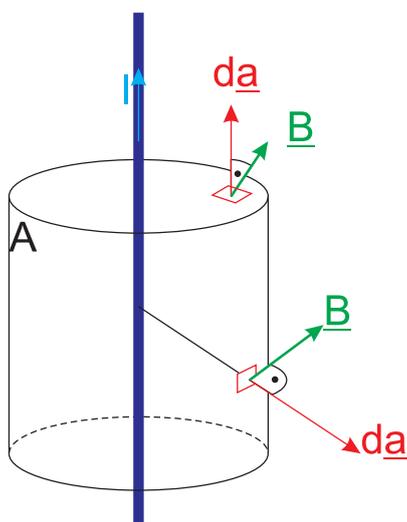
Anwendungsbeispiele: Streifenleiter, Koaxialkabel

3.7.2. Quellenfreiheit

Dieser Stoff wurde am 13. 1. 2005 behandelt

(Siehe Leisi, Klassische Physik II [Lei98, pp. 111])

In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, dass das Magnetfeld *quellenfrei* ist.



Integrationsfläche zur Analyse der Quellenfreiheit des Magnetfeldes

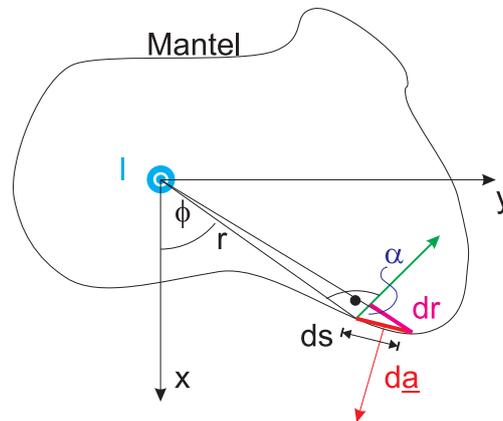
Da überall auf der Integrationsfläche A gilt: $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = 0$, ist

$$\iint_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = 0 \quad (3.129)$$

Wir verallgemeinern das Resultat, indem wir einen Zylinder mit beliebiger Grund- und Deckfläche nehmen. Auf der Grund und Deckfläche gilt das vorherige Argument, so dass

$$\iint_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \iint_{\text{Mantel}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$$

ist.



Integration über die Mantelfläche.

An der Mantelfläche gilt mit $da = h \cdot ds$

$$\begin{aligned} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} &= B(r) \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) h \cdot ds = -B(r) \sin(\alpha) h \cdot ds \\ &= -B(r) \cdot dr \cdot h = -B(r) \cdot \frac{dr}{d\phi} d\phi \cdot h = -B(r) \cdot r'(\phi) \cdot d\phi \cdot h \end{aligned}$$

und damit

$$\iint_{\text{Mantel}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = -\frac{\mu_0 I h}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r'(\phi)}{r(\phi)} d\phi = -\frac{\mu_0 I h}{2\pi} \ln(r(\phi)) \Big|_0^{2\pi} = 0$$

Damit gilt auch für allgemeine Zylinderflächen

$$\iint_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = 0 \quad (3.130)$$

Mit diesem Resultat zeigt man, dass dieses Integral für beliebige Flächen um einen Leiter null ist. Schliesslich zeigt man, dass das Resultat auch für beliebige Stromverteilungen gilt. Mit dem Gausschen Satz (Gleichung (A.41)) zeigt man

Quellenfreiheit des Magnetfeldes

$$0 = \iint_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \iiint_{V(A)} \text{div } \mathbf{B} \, dV \quad (3.131)$$

oder in differentieller Form

$$\text{div } \mathbf{B} = 0 \quad (3.132)$$

Die Quellenfreiheit des magnetischen Feldes bedeutet, dass **es keine magnetischen Ladungen gibt und dass die Feldlinien im Endlichen geschlossen sind.**

3.7.3. Das B -Feld einer beliebigen Stromverteilung: das Vektorpotential A

Dieser Stoff wurde am 13. 1. 2005 behandelt

(Siehe Leisi, Klassische Physik II [Lei98, pp. 114])



Versuch zur Vorlesung:

Magnetfeld von Leitern (Versuchskarte Em021)

Jedes Magnetfeld muss das *Ampèresche Gesetz* $\mathbf{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{i}$ und die Quellenfreiheit $\mathbf{div} \mathbf{B} = 0$ erfüllen. Analog zur Poissongleichung Gleichung (2.68) soll auch für das Magnetfeld eine Potentialgleichung gelten. Mit dem *Vektorpotential*

$$\mathbf{B}(x; y; z) = \mathbf{rot} \mathbf{A}(x; y; z) \quad (3.133)$$

werden beide Gleichungen erfüllt. Wegen der Vektoridentität

$$\mathbf{div} (\mathbf{rot} \mathbf{A}) = 0 \quad (3.134)$$

ist die Quellenfreiheit bei beliebiger Wahl von \mathbf{A} garantiert. Mit der zweiten Vektoridentität $\mathbf{rot} (\mathbf{rot} \mathbf{A}) = \mathbf{grad} (\mathbf{div} \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A}$ bekommen wir aus dem Ampèreschen Gesetz

$$\Delta \mathbf{A} - \mathbf{grad} (\mathbf{div} \mathbf{A}) = -\mu_0 \mathbf{i} \quad (3.135)$$

Das *Vektorpotential* \mathbf{A} kann immer so gewählt werden, dass $\mathbf{div} \mathbf{A} = 0$ gilt.

Dieser Stoff wurde am 20. 1. 2005 behandelt



Materialien

Folien zur Vorlesung vom 20. 01. 2005: PDF

Seminar vom 20. 01. 2005: Aufgabenblatt 06 (HTML oder PDF)

Das *Vektorpotential* ist nicht eindeutig bestimmt. Nehmen wir an, dass ein *Vektorpotential* mit $\mathbf{div} \mathbf{A} = f \neq 0$ existiert. Dann existiert auch ein Vektorfeld $\mathbf{V} = \mathbf{grad} \phi$ mit

$$\begin{aligned} \mathbf{div} \mathbf{V} &= f \\ \mathbf{rot} \mathbf{V} &= 0 \end{aligned} \quad (3.136)$$

mit einer eindeutigen Lösung, denn die obigen Gleichungen sind formal äquivalent zur *Elektrostatik*. Wir definieren ein *Vektorpotential*

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} - \mathbf{V}$$

Wegen Gleichung (3.137) gilt dann

$$\mathbf{rot} \mathbf{A}' = \mathbf{rot} \mathbf{A} - \mathbf{rot} \mathbf{V} = \mathbf{rot} \mathbf{A}$$

Dies bedeutet, dass das neue *Vektorpotential* das gleiche \mathbf{B} -Feld erzeugt wie das ursprüngliche. Wegen Gleichung (3.137) gilt auch

$$\operatorname{div} \mathbf{A}' = \operatorname{div} \mathbf{A} - \operatorname{div} \mathbf{V} = f - f = 0$$

Zu jedem *Vektorpotential* \mathbf{A} kann ein *Vektorpotential* \mathbf{A}' gefunden werden, so dass $\operatorname{div} \mathbf{A}' = 0$ ist.

Das zu einer realen physikalischen Situation gehörende *Vektorpotential* \mathbf{A} ist nicht eindeutig bestimmt. Die Wahl eines der zur gleichen Lösung von \mathbf{B} gehörenden Potentiale nennt man *Eichung*

In der *Relativitätstheorie* und in der *Quantenmechanik* rechnet man bevorzugt mit dem *Vektorpotential*.

Aus der Gleichung für das *Vektorpotential* einer Stromverteilung

$$\Delta \mathbf{A}(x; y; z) = -\mu_0 \mathbf{i}(x; y; z) \quad (3.137)$$

kann man die Umkehrfunktion berechnen und erhält, analog zur Elektrostatik,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (3.138)$$

Wenn wir mit $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ den Abstand von einem Beobachtungspunkt \mathbf{r} zu einem Punkt \mathbf{r}' mit der Stromdichte $\mathbf{i}(\mathbf{r}')$ eines linearen Leiterstückes $d\boldsymbol{\ell}$ bezeichnen und $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ setzen, ist der Beitrag zum magnetischen Feld

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{d\boldsymbol{\ell} \times \boldsymbol{\rho}}{\rho^3} \quad (3.139)$$

Durch Integration der *Formel von Laplace* oder des *Gesetzes von Biot-Savart* bekommt man

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{\text{Leiter}} \frac{d\boldsymbol{\ell} \times \boldsymbol{\rho}}{\rho^3} \quad (3.140)$$

Mit diesem Gesetz kann man das Magnetfeld einer beliebigen Spule berechnen. **Achtung: nur die integrale Form hat eine physikalische Bedeutung!** Die Formel von Laplace wird über das *Vektorpotential* berechnet.

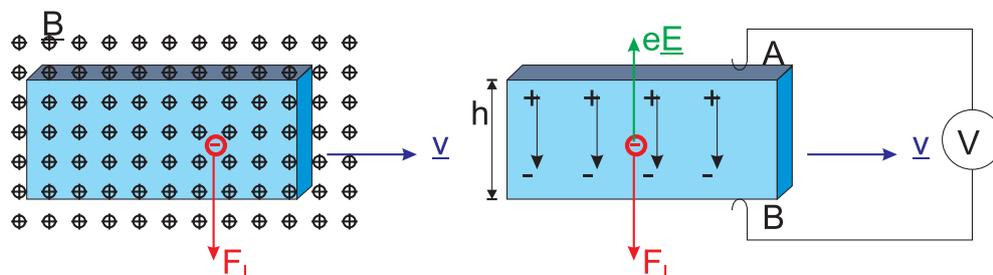
3.8. Hall-Effekt

Dieser Stoff wurde am 20. 1. 2005 behandelt

(Siehe Tipler, Physik [Tip94, pp. 831]) (Siehe Leisi, Klassische Physik II [Lei98, pp. 126])



Versuch zur Vorlesung: Halleffekt (Versuchskarte EM023)



Hall-Effekt

Wenn Elektronen mit der Geschwindigkeit \mathbf{v} durch ein Metall in einem Magnetfeld mit der magnetischen Induktion \mathbf{B} fließen (in einer Geometrie wie im obigen Bild), werden sie von der Lorentzkraft

$$\mathbf{F}_L = -e \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

nach unten abgelenkt. Man kann sich dies klar machen, indem man annimmt, der gesamte Metallstreifen werde mit der Geschwindigkeit \mathbf{v} nach rechts bewegt. Da der Leiter eine begrenzte Ausdehnung hat, laden sich die Grenzflächen auf. Das elektrische Feld bewirkt eine Kraft $\mathbf{F}_E = e\mathbf{E}$ nach oben auf die Elektronen. Im Gleichgewicht gilt $\mathbf{F}_L + \mathbf{F}_E = 0$, oder

$$-e \cdot \mathbf{v} \cdot \mathbf{B} = -eE \quad (3.141)$$

Eine Einheitsladung, die langsam von A nach B herumgeführt wird, erfährt vom elektrischen Feld eine Arbeit $h \cdot E$, so dass diese elektromotorische Kraft als Spannung am Voltmeter abgelesen werden kann. Durch Kombination mit der Gleichung (3.141) bekommt man für die *Hallspannung*

$$U_{Hall} = h \cdot \mathbf{v} \cdot \mathbf{B} \quad (3.142)$$

Diese Hallspannung ist unabhängig vom Material. Die Geschwindigkeit der Ladungsträger ist die Driftgeschwindigkeit $\langle v \rangle$, die über

$$I = q \cdot n \cdot h \cdot b \cdot \langle v \rangle$$

mit der Driftgeschwindigkeit zusammen hängt. b ist hier die Dicke des Leiters und n die Ladungsträgerdichte.

Die *Hallspannung* hängt dann wie

$$U_{Hall} = \frac{I \cdot B}{q \cdot b \cdot n} \quad (3.143)$$

von Strom und Spannung ab. Für Elektronen ($q = -e$) erhalten wir dann

$$U_{Hall} = -\frac{I \cdot B}{e \cdot b \cdot n}$$

Bemerkung: Die Hallspannung kann zur Bestimmung der Ladungsträgerkonzentration verwendet werden.

3.9. Die Lorentztransformation der Felder E und B



Dieser Stoff wurde am 20. 1. 2005 behandelt

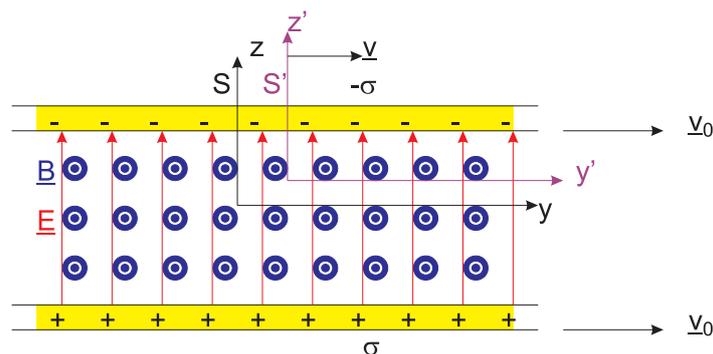
Materialien

Folien zur Vorlesung vom 20. 01. 2005: [PDF](#)

Seminar vom 20. 01. 2005: Aufgabenblatt 06 ([HTML](#) oder [PDF](#))

(Siehe Leisi, Klassische Physik II [Lei98, pp. 128])

Wir betrachten die Situation im Bild zum Halleffekt (Siehe Abschnitt 3.8), nun aber vom Ruhesystem der Platte aus. Hier haben die Elektronen keine Geschwindigkeit: es gibt keine *Lorentzkraft*.



Bewegte Magnetfelder und elektrische Felder.

Die obige Abbildung zeigt homogene Magnetfelder und elektrische Felder. Sie werden erzeugt, indem zwei parallele Platten positiv beziehungsweise negativ geladen sind. Wenn die Platten mit der Geschwindigkeit v_0 bewegt werden ergibt sich auch ein Magnetfeld.

Das elektrische Feld beider Platten im Bezugssystem S ist

$$E_z = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (3.144)$$

wenn σ die Ladungsdichte in diesem Bezugssystem ist. Das Magnetfeld ist

$$B_x = \mu_0 \cdot j = \mu_0 \cdot \sigma \cdot v_0 = \frac{v_0 \cdot \sigma}{\epsilon_0 \cdot c^2} \quad (3.145)$$

Die entsprechenden Felder im Bezugssystem S' müssen nun berechnet werden. Auch in S' sind die Platten homogen geladen. Also haben wir

$$E'_z = \frac{\sigma'}{\epsilon_0} \quad (3.146)$$

und

$$B'_x = \frac{v'_0 \cdot \sigma'}{\epsilon_0 \cdot c^2} \quad (3.147)$$

Wir brauchen die Transformationsgesetze für σ' und v_0

$$\begin{aligned} v'_0 &= \frac{v_0 - v}{1 - \frac{v \cdot v_0}{c^2}} \\ \sigma_0 &= \frac{\sigma}{\gamma_0} \\ \sigma_0 &= \frac{\sigma'}{\gamma'_0} \end{aligned} \quad (3.148)$$

wenn σ_0 das Ruhesystem der *Ladungen* und $\gamma_0 = \left(1 - \frac{v_0^2}{c^2}\right)^{-1/2}$ ist. Wir bekommen

$$\sigma' = \sigma \cdot \frac{\gamma'_0}{\gamma_0} = \sigma \sqrt{\frac{1 - v_0^2/c^2}{1 - v_0'^2/c^2}} \quad (3.149)$$

und damit

$$\begin{aligned} \sigma' &= \sigma \sqrt{\frac{1 - v_0^2/c^2}{1 - \left(\frac{v_0 - v}{1 - \frac{v \cdot v_0}{c^2}}\right)^2 / c^2}} \\ &= \sigma \frac{\sqrt{1 - v_0^2/c^2} \left(1 - \frac{v \cdot v_0}{c^2}\right)}{\sqrt{\left(1 - \frac{v \cdot v_0}{c^2}\right)^2 - (v_0 - v)^2/c^2}} \\ &= \sigma \frac{\sqrt{1 - v_0^2/c^2} \left(1 - \frac{v \cdot v_0}{c^2}\right)}{\sqrt{1 - 2\frac{v \cdot v_0}{c^2} + \frac{v^2 \cdot v_0^2}{c^4} - v_0^2/c^2 - v^2/c^2 + 2vv_0/c^4}} \\ &= \sigma \frac{\sqrt{1 - v_0^2/c^2} \left(1 - \frac{v \cdot v_0}{c^2}\right)}{\sqrt{1 - v_0^2/v^2} \cdot \sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ &= \sigma \cdot \gamma \cdot \left(1 - \frac{v \cdot v_0}{c^2}\right) \end{aligned} \quad (3.150)$$

Mit

$$v'_0 = \frac{v_0 - v}{1 - \frac{v \cdot v_0}{c^2}}$$

berechnet man

$$\begin{aligned} v'_0 \cdot \sigma' &= \sigma \cdot \gamma \cdot \left(1 - \frac{v \cdot v_0}{c^2}\right) v'_0 \\ &= \sigma \cdot \gamma \cdot \left(1 - \frac{v \cdot v_0}{c^2}\right) \frac{v_0 - v}{1 - \frac{v \cdot v_0}{c^2}} \\ &= \sigma \gamma (v_0 - v) \end{aligned} \quad (3.151)$$

Damit ist

$$E'_z = \frac{\sigma'}{\epsilon_0} = \gamma \left(\frac{\sigma}{\epsilon_0} - \frac{\sigma v \cdot v_0}{\epsilon_0 c^2} \right) = \gamma (E_z - v \cdot B_x) \quad (3.152)$$

und

$$B'_x = \frac{v'_0 \cdot \sigma'}{\epsilon_0 \cdot c^2} = \gamma \left(\frac{\sigma \cdot v_0}{\epsilon_0 c^2} - \frac{\sigma \cdot v}{\epsilon_0 c^2} \right) = \gamma \left(B_x - \frac{v}{c^2} E_z \right) \quad (3.153)$$

Damit sind die transversalen Felder B'_x und E'_z in S' Linearkombinationen der Felder B_x und E_z in S .

Die Transformationseigenschaften von B_z und E_x erhält man, indem man die obige Anordnung um $\pi/2$ um die y -Achse dreht. Dann gehen

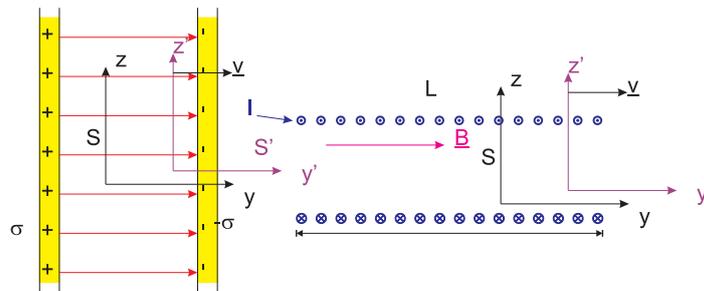
$$E_z \rightarrow E_x \quad (3.154)$$

$$B_x \rightarrow -B_z \quad (3.155)$$

über. Die Transformationsgleichungen sind dann

$$E'_x = \gamma (E_x + v \cdot B_z) \quad (3.156)$$

$$B'_z = \gamma \left(B_z + \frac{v}{c^2} E_x \right) \quad (3.157)$$



Skizze zur Transformation eines longitudinalen \mathbf{E} -Feldes (links) und des \mathbf{B} -Feldes (rechts).

Die Transformation des longitudinalen \mathbf{E} -Feldes ergibt sich aus dem Erkenntnis, dass transversal zur Geschwindigkeit keine Längenkontraktion auftritt und dass das elektrische Feld eines Plattenkondensators⁶ nicht vom Plattenabstand abhängt. Also ist

$$E_y = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (3.158)$$

$$E'_y = \frac{\sigma'}{\epsilon_0}$$

$$\sigma = \sigma'$$

Also ist auch

$$E'_y = E_y \quad (3.159)$$

Die Transformationseigenschaften des Magnetfeldes können mit der in der obigen Abbildung rechts angedeuteten Spule berechnet werden. Das Magnetfeld in der Spule ist

$$B_y = \mu_0 \frac{I \cdot N}{L} \quad (3.160)$$

⁶oder jeder anderen Anordnung von zwei parallelen, homogenen Flächenladungen

wobei N die Anzahl Windungen und L die Länge der Spule ist. Wir machen dabei die Annahme, dass die Spule sehr lang im Vergleich zum Durchmesser sei. Mit $I = \dot{Q}$ ist

$$B_y = \mu_0 \frac{N}{L} \frac{dQ}{dt} \quad (3.161)$$

Die Anzahl Windungen N und die *Ladung* sind relativistisch invariant. Das transformierte Feld ist dann

$$B'_y = \mu_0 \frac{N}{L'} \frac{dQ}{dt'} \quad (3.162)$$

Mit der Längenkontraktion $L' = \gamma L$ und der Zeitdilatation $dt' = dt/\gamma$ folgt, dass sich die relativistischen Effekte kompensieren und damit

$$B'_y = B_y \quad (3.163)$$

ist.

Bei einer Bewegung in die y -Richtung mit $\mathbf{v} = (0; v_y; 0)$ ($\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$) werden die elektrischen und magnetischen Felder wie

$$E'_x = \gamma (E_x + v \cdot B_z) \quad (3.164)$$

$$E'_y = E_y$$

$$E'_z = \gamma (E_z - v \cdot B_x)$$

$$B'_x = \gamma \left(B_x - \frac{v}{c^2} E_z \right)$$

$$B'_y = B_y$$

$$B'_z = \gamma \left(B_z + \frac{v}{c^2} E_x \right)$$

3.10. Zusammenfassung: Ströme

Makroskopischer Strom Gleichung (3.1)

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \Bigg|_{\text{Fläche}}$$

Mittlere Geschwindigkeit der Ladungsträger Gleichung (3.6)

$$\langle \mathbf{v} \rangle = \frac{1}{n} \sum_j n_j \cdot \mathbf{v}_j$$

Stromdichte Vektorfeld Gleichung (3.7)

$$\mathbf{i} = nq \langle \mathbf{v} \rangle$$

Gesamtstrom Gleichung (3.9)

$$I(F) = \int_F \mathbf{i} \cdot d\mathbf{a}$$

Strom bei mehreren Ladungsträgern Gleichung (3.10)

$$\mathbf{i} = \sum_k n_k q_k \langle \mathbf{v}_k \rangle$$

Kontinuitätsgleichung Integralform Gleichung (3.16)

$$\int_A \mathbf{i} \cdot d\mathbf{a} = \int_V \mathbf{div} \mathbf{i} dV = \int_V \frac{\partial}{\partial t} \rho_{el} dV$$

Differentialform Gleichung (3.17)

$$\mathbf{div} \mathbf{i}(\mathbf{x}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \rho_{el}(\mathbf{x}, t)$$

Ohmsches Gesetz lokal Gleichung (3.26)

$$\mathbf{i}(\mathbf{E}) = \sigma \mathbf{E}$$

integral Gleichung (3.28)

$$I = G \cdot U$$

Stromdichte und Relaxationszeit Gleichung (3.36)

$$\mathbf{i} = n \frac{q^2 \langle t \rangle}{M} \mathbf{E} = n \frac{q^2 \tau}{M} \mathbf{E}$$

Leitfähigkeit und Relaxationszeit Gleichung (3.37)

$$\sigma = \sum_k n_k \frac{q_k^2 \tau_k}{M_k}$$

Potential und Leitfähigkeit Gleichung (3.45)

$$\mathbf{div} [\sigma(x, y, z) \mathbf{grad} U(x, y, z)] = 0$$

Leistung und Strom Gleichung (3.59)

$$P = R \cdot I^2 = \frac{U^2}{R}$$

Magnetische Kraft zweier paralleler Leiter Gleichung (3.74)

$$F_M = \text{const} \cdot \frac{\ell \cdot I_1 \cdot I_2}{r}$$

Magnetische Kraft auf eine zu eine Strom parallel sich bewegende Ladung Gleichung (3.96)

$$F_z(r) = \frac{q \cdot v \cdot I}{2\pi\epsilon_0 \cdot c^2} \cdot \frac{1}{r}$$

Lorentz-Kraft Gleichung (3.98)

$$\mathbf{F}_L = q \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

Induktionskonstante Gleichung (3.100)

$$\mu_0 = \frac{1}{\epsilon_0 c^2}$$

Magnetfeld eines geraden Leiters mit dem Strom I Gleichung (3.101)

$$B(r) = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I}{r}$$

Kraftgesetz der Elektrodynamik Gleichung (3.109)

$$\mathbf{F} = q \cdot \mathbf{E} + q \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

Biot-Savart-Kraft Gleichung (3.112)

$$d\mathbf{F} = I \cdot d\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{B}$$

Ampèresches Durchflutungsgesetz, Integralform Gleichung (3.122)

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \iint_{A(S)} \mathbf{i} \cdot d\mathbf{a}$$

Ampèresches Durchflutungsgesetz, differentielle Form Gleichung (3.124)

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{i}$$

Quellenfreiheit von \mathbf{B} , Integralform Gleichung (3.131)

$$0 = \iint_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \iiint_{V(A)} \text{div } \mathbf{B} dV$$

Quellenfreiheit von \mathbf{B} , differentielle Form Gleichung (3.132)

$$\text{div } \mathbf{B} = 0$$

Ampèresches Durchflutungsgesetz und Quellenfreiheit(Vektorpotential) Gleichung (3.137)

$$\Delta \mathbf{A}(x; y; z) = -\mu_0 \mathbf{i}(x; y; z)$$

Berechnung des Vektorpotentials Gleichung (3.138)

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

Integralform der Formel von Laplace Gleichung (3.140)

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{\text{Leiter}} \frac{d\boldsymbol{\ell} \times \boldsymbol{\rho}}{\rho^3}$$

Hall-Spannung Gleichung (3.143)

$$U_{\text{Hall}} = \frac{I \cdot B}{q \cdot b \cdot n}$$

Lorentztransformation der Felder Gleichung (3.164)

$$\begin{aligned} E'_x &= \gamma (E_x + v \cdot B_z) \\ E'_y &= E_y \\ E'_z &= \gamma (E_z - v \cdot B_x) \\ B'_x &= \gamma \left(B_x - \frac{v}{c^2} E_z \right) \\ B'_y &= B_y \\ B'_z &= \gamma \left(B_z + \frac{v}{c^2} E_x \right) \end{aligned}$$

4. Elektrodynamik: zeitlich veränderliche Magnetfelder

Dieser Stoff wurde am 20. 1. 2005 behandelt

Das allgemeine Kraftgesetz für statische Felder lautet

$$\mathbf{F} = q \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{B} + q \cdot \mathbf{E} \quad (4.1)$$

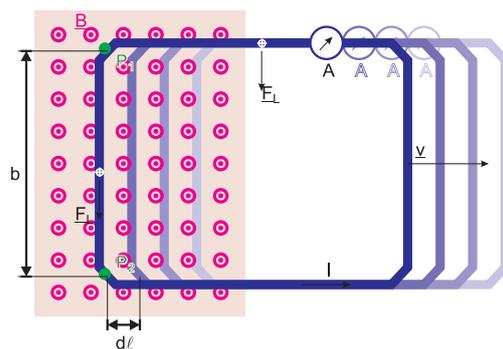
Bei zeitlich sich ändernden Feldern kommen neue Effekte hinzu, der *Verschiebungsstrom* und die *Induktion*.

4.1. Das Faradaysche Induktionsgesetz

Dieser Stoff wurde am 20. 1. 2005 behandelt

4.1.1. Eine bewegte Leiterschleife in einem stationären B -Feld

Dieser Stoff wurde am 20. 1. 2005 behandelt



Induktion eines Stromes in einer in einem inhomogenen Magnetfeld bewegten Leiterschleife.

Wir bewegen eine Leiterschleife mit der Geschwindigkeit \mathbf{v} aus dem begrenzten Gebiet mit einem homogenen Magnetfeld heraus. Auf die beweglichen Ladungsträger, hier positiv angenommen, wirkt die Lorentzkraft \mathbf{F}_L . Auf den horizontalen Teilen der Leiterschleife kennen wir den Effekt: eine Hallspannung (Siehe Abschnitt 3.8) auf. Im vertikalen Teil im Magnetfeld bewirkt die Hallspannung eine

Beschleunigung der Ladungsträger. Nach der Definition der elektromotorischen Kraft (Siehe Gleichung (3.60)) haben wir

$$U_{EMK} = \frac{1}{q_0} \oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{q_0} \oint \mathbf{F}_L \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{q_0} \int_{P_1}^{P_2} F_L \cdot ds = \frac{1}{q_0} (q_0 \cdot v \cdot B) \cdot b = v \cdot B \cdot b \quad (4.2)$$

Hat die Drahtschleife den Widerstand R , so fließt der Strom

$$I = \frac{U_{EMK}}{R} \quad (4.3)$$



Versuch zur Vorlesung:
Induktion (Versuchskarte EM025)



Versuch zur Vorlesung:
Induktion im Erdfeld (Versuchskarte EM027)

4.1.2. Der magnetische Fluss

Dieser Stoff wurde am 20. 1. 2005 behandelt

(Siehe Leisi, Klassische Physik II [Lei98, pp. 138]) (Siehe Tipler, Physik [Tip94, pp. 876])

Im Zusammenhang mit den elektrischen Feldern \mathbf{E} hatten wir den elektrischen Fluss ϕ_E (Siehe Abschnitt 2.3) eingeführt. Hier bewegen wir die Leiterschleife mit der Geschwindigkeit \mathbf{v} , wir ändern damit die vom Magnetfeld durchflossene Fläche um die Grösse $dA = -dl \cdot b$. Da die Geschwindigkeit $v = dl/dt$ ist, können wir auch schreiben

$$U_{EMK} = v \cdot B \cdot b = \frac{dl}{dt} b \cdot B = -\frac{dA}{dt} B = -\frac{B \cdot dA}{dt} \quad (4.4)$$

schreiben. Wir definieren den

magnetischen Fluss

$$\phi_B = \iint_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} \quad (4.5)$$

durch die Fläche A

Damit ist die induzierte EMK

$$U_{EMK} = -\frac{d\phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint_{A(S)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} \quad (4.6)$$

Sie wird durch den zeitlich sich ändernden Fluss erzeugt.
Die Einheit des magnetischen Flusses ist *Weber*.

$$1 \text{ Weber} = 1 \text{ Wb} = 1 \text{ T} \cdot \text{m}^2 \quad (4.7)$$

Das Minuszeichen in den Gleichungen für den magnetischen Fluss rührt daher, dass eine Geschwindigkeit in die positive x -Richtung eine Verkleinerung der Fläche A bewirkt.

Dieser Stoff wurde am 27. 1. 2005 behandelt

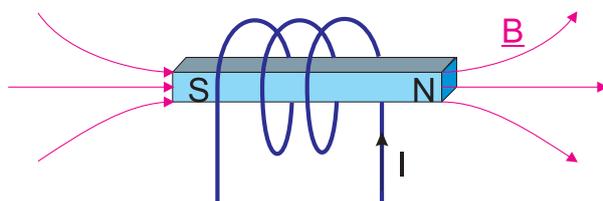


Materialien

Folien zur Vorlesung vom 27. 01. 2005: PDF

Das durch den Strom erzeugte Magnetfeld ist so gerichtet, dass die Bewegung der Spule gebremst wird. Dieses Verhalten wird in der *Lenzschen Regel* zusammengefasst:

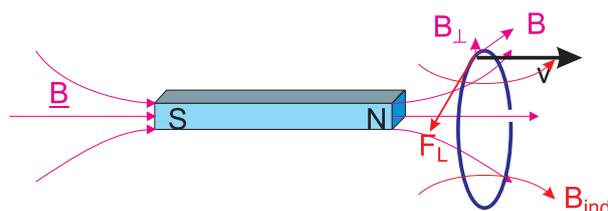
Die Induktionsspannung und der Strom, den sie bewirkt, sind stets so gerichtet, dass sie der Ursache entgegenwirken.



Vergleich eines Stabmagneten mit einer Spule.

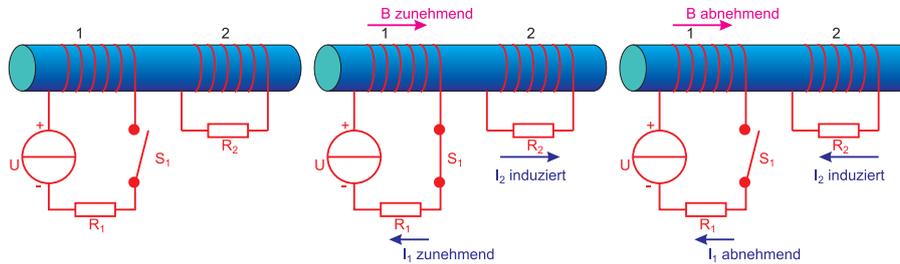
Eine *Spule* erzeugt ein axiales Magnetfeld. Die Richtung des Magnetfeldes wird mit der *Rechten Hand-Regel* aus der Stromrichtung abgeleitet. Ein Stabmagnet erzeugt ein gleiches Magnetfeld wie eine Spule.

Die Nord- und Südpole der Magnete sind so definiert: Die B -Feldlinien laufen vom Nordpol zum Südpol.



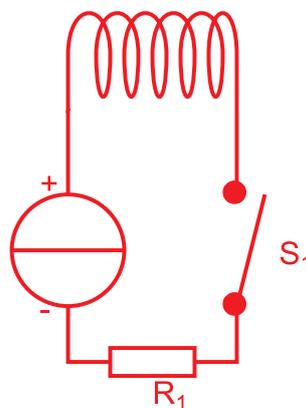
Induzierte Spannung

Bewegt man einen Magneten mit der Geschwindigkeit v von einem Stabmagneten weg, so bewirkt die *Lorentzkraft* einen Strom I , der ein Magnetfeld B_{ind} induziert. Dieses Magnetfeld ist so gerichtet, dass es gleichsinnig wie das Magnetfeld des Stabes ist. Der Metallring wird also vom Stabmagneten angezogen und in seiner Bewegung nach rechts gebremst (*Lenzsche Regel*).



Vorzeichen des Magnetfeldes und der induzierten Spannung beim Ein- und Ausschalten.

Hier wird ein Magnetfeld eingeschaltet. Die Richtung der Feldlinien wird durch die *Rechte-Hand-Regel* bestimmt. Ein zeitlich zunehmendes Magnetfeld in der rechten Spule ist äquivalent zu einer Bewegung der rechten Spule im inhomogenen Feld (links intensiver als rechts) nach links. Dabei zeigt die relevante Feldkomponente nach aussen. Aus der *Rechten Hand-Regel* ergibt sich die angegebene Stromrichtung. Nach dem Ausschalten des erregenden Stromes nimmt die Intensität des Magnetfeldes ab. Dies ist äquivalent zu einer Bewegung der rechten Spule nach rechts, bei gleichbleibender Richtung des Magnetfeldes. Entsprechend dreht sich die Richtung des Stromes um.



Selbstinduktion

Wenn eine Spule von einem Strom durchflossen ist, wird dadurch ein Magnetfeld erzeugt. Wenn nun der Strom durch die Spule geändert wird, wird eine Spannung induziert, die wie im vorigen Falle so gerichtet ist, dass sie der Änderung des Magnetfeldes entgegenwirkt, so also auch der Änderung des durch die Spule fließenden Stromes. Im besonderen Falle, dass der Strom abgeschaltet wird, dass also der Widerstand im Stromkreis um viele Größenordnungen steigt, bildet sich eine sehr hohe Spannung.

Anwendungen

- Zündspule bei Benzinmotoren

- Erzeugung der Beschleunigungsspannung in Fernsehröhren
- Teslatransformator, siehe auch **Versuch zur Vorlesung:**



Tesla-Transformator (Versuchskarte EM064)

4.1.3. Induktionsgesetz von Faraday, Integral- und Differentialform

Dieser Stoff wurde am 27. 1. 2005 behandelt

Wir betrachten die Situation in der Abbildung (Siehe Abschnitt 4.1.1) im Ruhesystem S' der Schleife. Im Laborsystem S ist das Magnetfeld

$$\mathbf{B} = (0; 0; B)$$

in die z -Richtung gerichtet. Die Geschwindigkeit zeigt in die y -Richtung. Mit der Lorentztransformation (Siehe Gleichung (3.164)) berechnen wir die Felder im System S' . Wir erhalten

$$\begin{aligned} \mathbf{B}' &= (0; 0; B') = (0; 0; \gamma(v) \cdot B) \\ \mathbf{E}' &= (E'; 0; 0) = (v \cdot \gamma(v) \cdot B; 0; 0) \\ &= (v \cdot B'; 0; 0) \end{aligned} \quad (4.8)$$

Die Leiterschleife ist im System S' in Ruhe. Also muss die EMK durch das elektrische Feld erzeugt werden.

$$U'_{EMK} = E' \cdot b = v \cdot B' \cdot b \quad (4.9)$$

Die Flussänderung ist

$$d\phi'_B = -B' \cdot v \cdot b \cdot dt' \quad (4.10)$$

Somit lauten das Induktionsgesetz und das Ohmsche Gesetz

$$\begin{aligned} U'_{EMK} &= -\frac{d\phi'_B}{dt'} \\ U'_{EMK} &= R \cdot I' \end{aligned} \quad (4.11)$$

Somit gilt für die EMK die *Transformation*

$$U'_{EMK} = \gamma(v)U_{EMK} \quad (4.12)$$

Die Gleichungen (4.12) gelten in jedem Falle. Wenn $v \ll c$ ist, kann man die Unterschiede im Strom I , in der EMK U_{EMK} und im Magnetfeld \mathbf{B} vernachlässigen. Die Transformationseigenschaften zeigen, dass das Induktionsgesetz auch bei stationären Leiterschleifen und zeitlich ändernden Magnetfeldern gelten muss (wir begeben uns in das System S'). Die Wirkung der Felder \mathbf{B} und \mathbf{E} sind unabhängig von ihrer Entstehung.



Versuch zur Vorlesung:

Magnetische Induktion (Versuchskarte EM051)

Für einen beliebig geformten ruhenden Leiter (gegeben durch die Kurve S) in einem zeitlich ändernden Magnetfeld gilt für die EMK

$$U_{EMK} = -\frac{d}{dt} \iint_{A(S)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} \quad (4.13)$$

Da der Leiter in Ruhe ist, muss die EMK durch ein elektrisches Feld erzeugt sein.

$$U_{EMK} = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \quad (4.14)$$

Ist der Leiter nicht in Ruhe, dann ist mit Gleichung (A.40) und dem Satz von Stokes (Siehe Gleichung (A.43))

$$U_{EMK} = -\frac{d}{dt} \iint_{A(S)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = -\iint_{A(S)} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} - \oint_S (\mathbf{B} \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{s} \quad (4.15)$$

Bei einer bewegten Leiterschleife ist nur die EMK relevant die im mitbewegten Bezugssystem gemessen wird. Also ist das *universelle Induktionsgesetz von Faraday*

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\iint_{A(S)} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} \quad (4.16)$$

Mit dem Satz von Stokes (Siehe Gleichung (A.43)) erhält man

$$\oint_{S(t)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \iint_{A(S(t))} \mathbf{rot} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = -\iint_{A(S(t))} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a} \quad (4.17)$$

Für zeitunabhängige Berandungen $A(S)$ kann man auch schreiben

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d}{dt} \iint_{A(S)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$$

Da diese Integralgleichung für beliebige Kurven S gelten muss, also auch für infinitesimal kleine, erhalten wir die *differentielle Form des Faradayschen Induktionsgesetzes*

$$\mathbf{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (4.18)$$

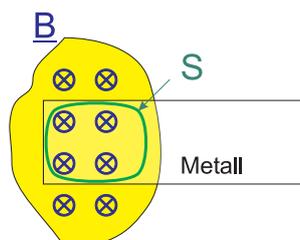
4.1.4. Wirbelströme

Dieser Stoff wurde am 27. 1. 2005 behandelt



Versuch zur Vorlesung:

Fallrohre (Versuchskarte EM057)



Wirbelströme in Metallen

Wenn sich ein Metallstück in einem inhomogenen Magnetfeld befindet, dann muss für jede Bahnkurve S das Faradaysche Induktionsgesetz gelten. Da der Leiter einen spezifischen Widerstand ρ_{el} hat, fließt bei einer Änderung des Flusses durch S , zum Beispiel, indem man den Leiter bewegt, ein durch die induzierte Spannung getriebener Strom. Die Richtung des Stromes ist so, dass er sich einer Änderung des magnetischen Flusses widersetzt. Bei einem perfekten Leiter, müssten enorm grosse Kräfte aufgebracht werden, um das Metallstück mit einer minimalen Geschwindigkeit bewegen zu können. Durch die Dissipation im Ohmschen Leiter wird der induzierte Strom geschwächt, so dass die der Bewegung entgegengesetzte Kraft umso kleiner ist, je schlechter die Leitfähigkeit des Metalls ist.

Wirbelströme können vermindert werden, indem das Metall geschlitzt wird oder in Lagen mit Isolatoren dazwischen gebündelt wird.

Anwendungen

- Wirbelstrombremse beim ICE
- Retarder in LKWs
- Dämpfung von Schwingungen in Rastertunnelmikroskopen
- In Transformatoren und Motoren verwendet man geschlitzte Bleche

4.1.5. Transformator

Dieser Stoff wurde am 27. 1. 2005 behandelt

Der magnetische Fluss in einer Spule entsteht durch Ströme in dieser Spule selber, oder in anderen Spulen. Nach dem Gesetz von Laplace oder Biot-Savart (Siehe Gleichung (3.139)) ist das Magnetfeld proportional zum Strom. Somit ist auch der Fluss ϕ_B proportional zum Strom. Diese Proportionalität wird mit

$$\phi_B = L \cdot I \quad (4.19)$$

ausgedrückt, wobei L die *Selbstinduktivität* der Spule ist. Die Einheit der Induktivität ist

$$1H = 1\text{Henry} = 1 \frac{\text{Wb}}{\text{A}} = 1 \frac{\text{T} \cdot \text{m}^2}{\text{A}}$$

In den meisten Fällen ist es schwierig, die Selbstinduktivität einer Schaltung zu berechnen. Für eine lange, dicht gewickelte Spule ist das Magnetfeld

$$B = \mu_0 \frac{N}{\ell} I \quad (4.20)$$

Dabei ist $N = n \cdot \ell$ die Anzahl Windungen auf der Länge ℓ . Hat die Spule den Querschnitt A , so ist der Fluss

$$\phi_B = N \cdot B \cdot A = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} I \cdot A = \mu_0 n^2 A \ell I \quad (4.21)$$

Damit ist die Induktivität der Spule

$$L = \frac{\phi_B}{I} = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} A = \mu_0 n^2 A \ell \quad (4.22)$$

Die magnetische Permeabilität μ_0 kann also auch als

$$\mu_0 = 10^{-7} \frac{\text{Henry}}{\text{m}} \quad (4.23)$$

Die Änderung der Stromstärke bedingt eine Änderung des magnetischen Flusses.

$$\frac{d\phi_B}{dt} = \frac{d(LI)}{dt} = L \frac{dI}{dt} \quad (4.24)$$

Somit wird mit Gleichung (4.6)

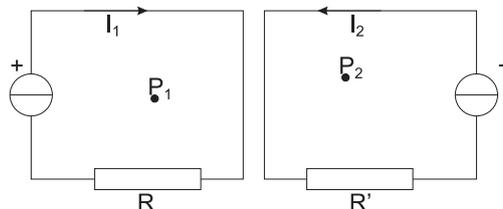
$$U = -\frac{d\phi_m}{dt} = -L \frac{dI}{dt} \quad (4.25)$$

Mit dieser Gleichung wird die Funktionsweise des *Funkeninduktors* klar.



Versuch zur Vorlesung:

Funkeninduktor (Versuchskarte EM017)



Zwei gekoppelte Stromkreise

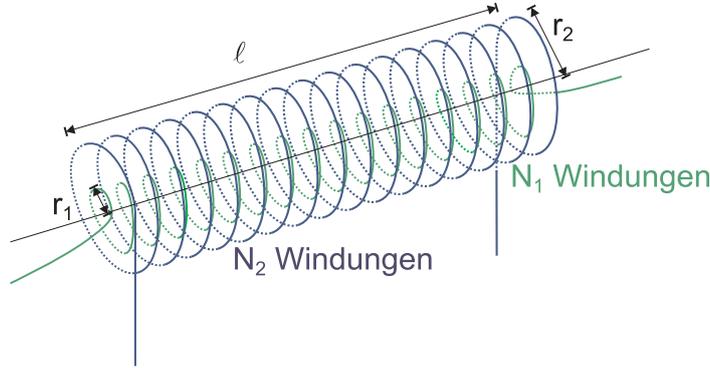
Der magnetische Fluss am Punkt P_2 hängt sowohl vom Strom I_2 wie auch vom Strom I_1 ab:

$$\phi_B(P_2) = L_2 \cdot I_2 + M_{12} \cdot I_1 \quad (4.26)$$

Ebenso hängt der magnetische Fluss am Punkt P_1 von beiden Strömen ab

$$\phi_B(P_1) = L_1 \cdot I_1 + M_{21} \cdot I_2 \quad (4.27)$$

Neben der *Selbstinduktivität* L_i müssen bei realen Systemen auch die *Gegeninduktivitäten* M_{ij} berücksichtigt werden. Wie bei den Induktivitäten hängt auch bei den Gegeninduktivitäten die Grösse allein von der Geometrie ab.



Symbolische Darstellung eines Transformators

Im allgemeinen ist es schwierig, die Gegeninduktivitäten zu berechnen. Bei zwei ineinander gewickelten Spulen, einem Beispiel für einen Transformator, gelingt dies. Wir wollen das Beispiel verwenden, um zu zeigen, dass $M_{12} = M_{21}$ ist. Durch die Spule 1 (Länge ℓ , Radius r_1 , Windungsdichte $n_1 = N_1/\ell$) fliesst der Strom I_1 , durch die zweite Spule 2 (Länge ℓ , Radius r_2 , Windungsdichte $n_2 = N_2/\ell$) soll der Strom I_2 fließen. Da wir lange Spulen betrachten, ist das Magnetfeld im Inneren der Spulen homogen. Also ist

$$B_1 = \mu_0 n_1 I_1 \quad (4.28)$$

Ausserhalb der Spule 1 ist das Magnetfeld $B_1 = 0$ (Annahme einer langen Spule). Deshalb ist der Fluss durch den Strom I_1 für die Spule 2 gegeben durch

$$\phi_{B_2} = N_2 \cdot B_1(\pi r_1^2) = n_2 \ell B_1(\pi r_1^2) = \mu_0 n_1 n_2 \ell(\pi r_1^2) I_1 \quad (4.29)$$

Die Gegeninduktivität M_{12} ist also

$$M_{12} = \frac{\phi_{B_2}}{I_1} = \mu_0 n_1 n_2 \ell(\pi r_1^2) \quad (4.30)$$

Im entgegengesetzten Falle beginnen wir mit

$$B_2 = \mu_0 n_2 I_2 \quad (4.31)$$

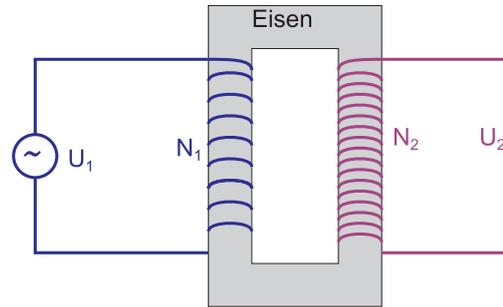
Der für die Spule 1 relevante Fluss ist durch die von der Spule 1 umschlossene Fläche, also $N_1(\pi r_1^2)$ gegeben.

$$\phi_{B_1} = N_1 \cdot B_2(\pi r_1^2) = n_1 \ell \mu_0 n_2 I_2(\pi r_1^2) = \mu_0 n_1 n_2 \ell(\pi r_1^2) I_2 \quad (4.32)$$

Damit wird die Gegeninduktivität

$$M_{21} = \frac{\phi_{B_1}}{I_2} = \mu_0 n_1 n_2 \ell(\pi r_1^2) = M_{12} \quad (4.33)$$

Diese Beziehung, die an einem Spezialfall gezeigt wurde, gilt auch allgemein (ohne Beweis).



Schematischer Aufbau eines Transformators

Die in einem Transformator induzierte Spannung kann wie folgt berechnet werden. In der Spule 1 fällt die Spannung

$$U_{L,1} = N_1 \frac{d\phi_B}{dt} \quad (4.34)$$

ab. Diese Spannung muss durch die Wechselspannungsquelle U erzeugt werden, so dass

$$U = U_{L,1} = N_1 \frac{d\phi_B}{dt} \quad (4.35)$$

ist. Durch die Anordnung des Eisens wird erreicht, dass der gesamte durch die erste Spule erzeugte magnetische Fluss durch die zweite Spule fließt. Dort haben wir die induzierte Spannung

$$U_2 = -N_2 \frac{d\phi_B}{dt} \quad (4.36)$$

und somit

$$U_2 = -\frac{N_2}{N_1} U_1 \quad (4.37)$$

N_2/N_1 heisst der *Übersetzungsfaktor* des Transformators.

Wird der Ausgang des Transformators mit dem Ohmschen Widerstand R belastet, fließt der Strom I_2 , der zu U_2 in Phase ist. Dieser Strom erzeugt einen magnetischen Fluss $\phi'_B \propto N_2 I_2$, der den ursprünglichen Fluss ϕ_B durch die Spule 2 schwächt. Da durch beide Spulen der gleiche magnetische Fluss fließt, muss auch der Fluss durch die erste Spule geschwächt werden. Da die Spannung durch die Spannungsquelle U vorgegeben ist, muss der Strom I_1 auf der Primärseite zusätzlich fließen, so dass $\phi'_B \propto N_1 I_1$ gilt. Da die Proportionalitätsfaktoren bis auf das Vorzeichen gleich sind, gilt dann auch

$$I_2 = -\frac{N_1}{N_2} I_1 \quad (4.38)$$

Wenn wir die Effektivwerte betrachten haben wir damit

$$U_2 I_2 = \left[-\frac{N_2}{N_1} U_1 \right] \left[-\frac{N_1}{N_2} I_1 \right] = U_1 I_1 \quad (4.39)$$

sofern man Verluste vernachlässigt. **Ideale Transformatoren übertragen also verlustfrei Leistung.**

Versuch zur Vorlesung:

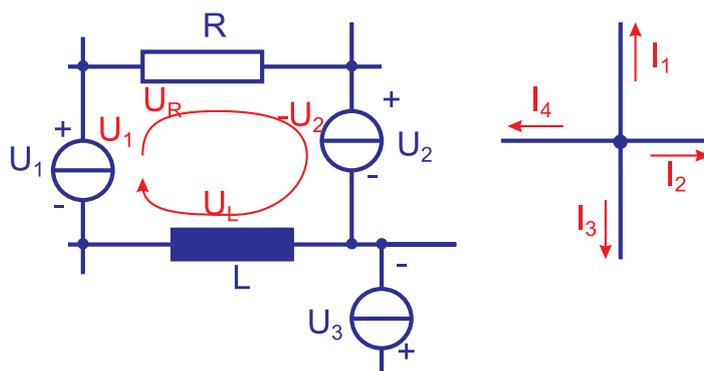
Hochspannungsleitung (Versuchskarte EM161)

Versuch zur Vorlesung:

Transformatorversuche (Versuchskarte EM066)

4.1.6. Kirchhoffsche Gesetze

Dieser Stoff wurde am 27. 1. 2005 behandelt



Kirchhoffsche Gesetze: links die Maschenregel, rechts die Knotenregel.

In einer komplizierten elektrischen Schaltung betrachtet man eine einzelne Masche. Nach der definition der *EMK* muss eine Probeladung langsam um die Masche herumgeführt werden. Dies führt auf die Maschenregel

$$\sum_{\forall k \text{ Quellen}} U_k = \sum_{\forall j \text{ Verbraucher}} U_j \quad (4.40)$$

wobei die Vorzeichen entsprechend dem Umlaufsinn einzusetzen sind. In unserem Beispiel bedeutet dies:

$$U_1 - U_2 = U_R + U_L$$

Die Knotenregel ist ein Ausdruck für die Ladungserhaltung. Wenn wir zum Beispiel alle zufließenden Ströme positiv und alle wegfließenden Ströme negativ zählen (oder umgekehrt), gilt an jedem Knoten

$$\sum_{\forall k \text{ eines Knotens}} I_k = 0 \quad (4.41)$$

Mit diesen beiden Regeln sowie der Kenntnis der Charakteristika der Bauelemente kann jede statische oder quasistatische elektronische Schaltung berechnet werden.

4.1.7. Wechselstromkreise, Impedanzen



Dieser Stoff wurde am 3. 2. 2005 behandelt

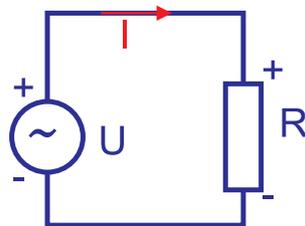
Materialien

Folien zur Vorlesung vom 03. 02. 2005: PDFSeminar vom 03. 02. 2004: Aufgabenblatt 07 ([HTML](#) oder [PDF](#))

In diesem Abschnitt betrachten wir die Wirkung von cosinusförmigen Wechselspannungen

$$U \equiv U(t) = U_0 \cos(\omega t - \varphi) \quad (4.42)$$

Die Zeitskala für die Wechselspannung wird so gewählt, dass $\varphi = 0$ ist. Weiter setzen wir voraus, dass die zeitliche Änderung aller Größen so gering sind, dass wir wie im stationären Falle rechnen können. Wir dies den quasistationären Fall.



Definition von Strömen und Spannungen bei Wechselspannungen

Da bei Wechselspannungen a priori keine Stromrichtung vorgegeben ist, definiert man, zum Beispiel wie in der Abbildung oben, die Stromrichtung zu einem bestimmten Zeitpunkt, hier für $t = 0$. Zu jedem Zeitpunkt muss die Spannung im Stromkreis insgesamt null sein. Also ist

$$U - U_R = 0 \quad (4.43)$$

und mit dem Ohmschen Gesetz

$$U_0 \cos(\omega t) - I \cdot R = 0 \quad (4.44)$$

oder

$$I(t) = \frac{U_0}{R} \cos(\omega t) = I_0 \cos(\omega t) \quad (4.45)$$

Der Strom und die Spannung erreichen immer dann einen Extremwert, wenn ωt ein ganzzahliges Vielfaches von π ist. **Der durch einen Widerstand fließende Strom ist in Phase mit der Spannung.**

Die momentane Leistung am Widerstand ist

$$P(t) = U(t) \cdot I(t) = U_0 \cos(\omega t) \cdot \frac{U_0}{R} \cos(\omega t) = \frac{U_0^2}{R} \cos^2(\omega t) = I_0^2 R \cos^2(\omega t) \quad (4.46)$$

Der Mittelwert der Leistung ist $\langle \cos^2 \omega t \rangle_t = 1/2$

$$\langle P(t) \rangle = \frac{1}{2} \frac{U_0^2}{R} = \frac{1}{2} I^2 R \quad (4.47)$$

Unter dem Effektivwert der Spannung (des Stromes) versteht man diejenige Gleichspannung, die an einem Ohmschen Widerstand die gleiche Verlustleistung erzeugt. Also ist für sinusförmige Spannungen

$$U_{eff} = \frac{1}{\sqrt{2}} U_0 \quad (4.48)$$

beziehungsweise

$$I_{eff} = \frac{1}{\sqrt{2}} I_0 \quad (4.49)$$

Für beliebige Spannungsverläufe (Stromverläufe) ist der Effektivwert (auch rms-Wert von "Root Mean Square")

$$U_{eff} = U_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_t^{t+T} U^2(\tau) d\tau} \quad (4.50)$$

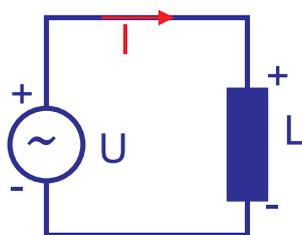
wobei T eine Zeit ist, die bei periodischen Signalen der Periodendauer entspricht und bei zufälligen Signalen lang gegenüber der charakteristischen Zeitdauer der Schwankungen sein muss. Für Ströme gilt die analoge Formel

$$I_{eff} = I_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_t^{t+T} I^2(\tau) d\tau} \quad (4.51)$$



Versuch zur Vorlesung:

Wechselstromwiderstand (Versuchskarte EM053)



Spule mit Wechselspannung

Wir verwenden Gleichung (4.25) um die Spannung über der Spule zu berechnen. Die induzierte Spannung ist der Flussänderung entgegengesetzt. Sie wirkt so, dass die Zunahme des Stromes bei zunehmender Anregungsspannung gebremst wird. Deshalb ist

$$U - U_L = 0 = U - L \frac{dI}{dt} \quad (4.52)$$

Setzen wir $U = U_0 \cos(\omega t)$ ein, erhalten wir

$$\frac{dI}{dt} = \frac{U_0}{L} \cos(\omega t) \quad (4.53)$$

und damit

$$I(t) = \frac{U_0}{L} \int_0^t \cos(\omega \tau) d\tau = \frac{U_0}{L\omega} \sin(\omega t) = \frac{U_0}{L\omega} \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) \quad (4.54)$$

Der Strom hat also den Scheitelwert

$$I = \frac{U_0}{\omega L} = \frac{U_0}{X_L} \quad (4.55)$$

wobei $X_L = \omega L$ die Impedanz oder der induktive Widerstand der Spule ist. Die Einheit der Impedanz ist gleich wie die Einheit des Widerstandes, das Ohm. Der Strom folgt der Spannung mit einer Phasenverschiebung von $-\pi/2$. Für die Effektivwerte gilt $I_{eff} = U_{eff}/X_L$, da für sinusförmige Spannungen und Ströme der gleiche Faktor zur Umrechnung von Scheitelwerten zu Effektivwerten verwendet werden muss.

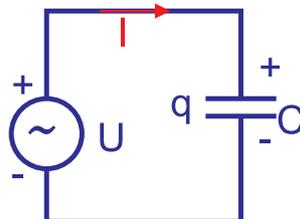
Die momentan dissipierte Leistung an einer Spule ist

$$P(t) = U(t) \cdot I(t) = U_0 \cos(\omega t) \cdot \frac{U_0}{\omega L} \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) = \frac{U_0^2}{\omega L} \cos(\omega t) \sin(\omega t) \quad (4.56)$$

Die dissipierte Leistung kann sowohl positiv wie auch negativ sein. Die mittlere dissipierte Leistung ist

$$\langle P \rangle_t = \frac{U_0^2}{\omega L} \langle \cos(\omega t) \sin(\omega t) \rangle_t = 0 \quad (4.57)$$

Im Mittel wird also keine Leistung an einer Spule dissipiert.



Kondensator mit Wechselspannung

Beim Kondensator ist $U_C = q/C$. Diese Spannung muss gleich der treibenden Spannung sein.

$$U - U_C = 0 = U - \frac{q}{C} \quad (4.58)$$

Wir setzen U ein und erhalten

$$q = C \cdot U_0 \cos(\omega t) \quad (4.59)$$

Der Strom ist dann für den Strom

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt} C \cdot U_0 \cos(\omega t) = -C\omega \cdot U_0 \sin(\omega t) = C\omega \cdot U_0 \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) \quad (4.60)$$

Wir nennen

$$X_C = \frac{1}{\omega C} \quad (4.61)$$

die Impedanz des Kondensators. Der Scheitelwert des Stromes ist

$$I_0 = \omega C U_0 \quad (4.62)$$

Analog wie bei der Spule gilt die Gleichung $I_{eff} = U_{eff}/X_C$ mit der gleichen Begründung auch für Kondensatoren. Die momentan dissipierte Leistung ist

$$P(t) = \omega C U_0^2 \cos(\omega t) \sin(\omega t) \quad (4.63)$$

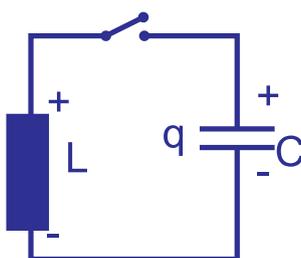
Sie ist, analog wie bei der Spule, positiv oder negativ. Deshalb ist die mittlere dissipierte Leistung

$$\langle P(t) \rangle_t = \omega C U_0^2 \langle \cos(\omega t) \sin(\omega t) \rangle_t = 0 \quad (4.64)$$



Versuch zur Vorlesung:

Elektrischer Schwingkreis (Versuchskarte Em056)



Schwingkreis

Der Kondensator soll zur Zeit $t = 0$ auf die Spannung $U_{C,0}$ aufgeladen sein. Zur Zeit $t = 0$ wird der Schalter geschlossen. Die Differentialgleichung dieser Schaltung lautet:

$$L \frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} = 0 \quad (4.65)$$

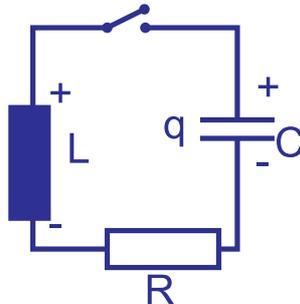
Wir differenzieren einmal und bekommen

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{1}{LC} I = 0 \quad (4.66)$$

Dies ist die aus der Mechanik bekannte Schwingungsdifferentialgleichung. Durch Analogieschluss sieht man, dass die Resonanzfrequenz

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad (4.67)$$

ist.



Schwingkreis mit Widerstand

Der gedämpfte Schwingkreis enthält neben dem Kondensator und der Spule auch einen Widerstand. Die Differentialgleichung des gedämpften Schwingkreises ist

$$L \frac{dI}{dt} + R \cdot I + \frac{Q}{C} = 0 \quad (4.68)$$

Wir differenzieren einmal und bekommen

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI}{dt} + \frac{1}{LC} I = 0 \quad (4.69)$$

Analog zur Mechanik ist die $\frac{R}{L}$ der Dämpfungsterm. Das in der Mechanik berechnete Verhalten eines schwingungsfähigen Systems gilt auch für den elektrischen Schwingkreis.

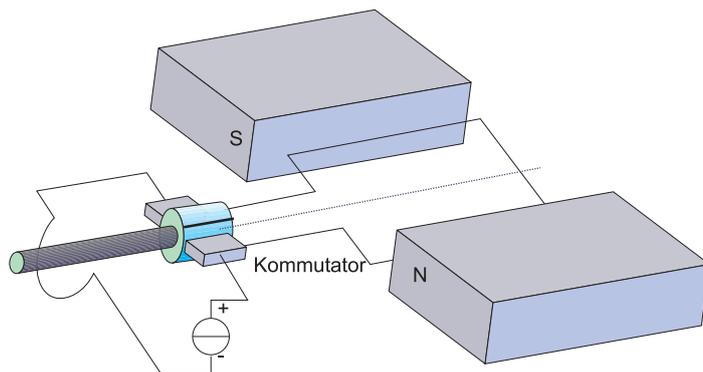
Wenn der elektrische Schwingkreis von einer Wechselspannungsquelle getrieben wird, ergeben sich die gleichen Phänomene wie bei einem getriebenen Pendel, also auch eine Resonanz.

Anwendungen

- Schwingkreise zur Signalfilterung in Radioempfängern
- Verhalten von langen Leitungen
- Verhalten elektrischer Maschinen

4.1.8. Elektromotoren

Dieser Stoff wurde am 3. 2. 2005 behandelt



Prinzipbild eines Elektromotors

**Versuch zur Vorlesung:**

Elektromotor und -generator (Versuchskarte EM101)

Wir betrachten zuerst den Elektromotor als Generator. Der Fluss durch die Leiterschleife mit N Windungen und einer Fläche A ist

$$\phi_B = NBA \cos \Theta \quad (4.70)$$

wobei Θ der Winkel zwischen der Normalen der Fläche der Leiterschleife und der Richtung des Magnetfeldes ist. Mit $\Theta = \omega t + \delta$ wird der zeitabhängige Fluss durch eine sich mit ω drehende Leiterschleife

$$\phi_B(t) = NBA \cos(\omega t + \delta) \quad (4.71)$$

Durch Ableiten erhält man die Induktionsspannung

$$U = -\frac{d\phi_B(t)}{dt} = -NBA \frac{d}{dt} \cos(\omega t + \delta) = NBA\omega \sin(\omega t + \delta) \quad (4.72)$$

Die induzierte effektive Spannung ist

$$U_{eff,i} = \frac{NBA\omega}{\sqrt{2}} \quad (4.73)$$

Wenn die Leiterschleife mit Spannung versorgt wird, arbeitet sie als Motor. Durch den Strom I wird nach Gleichung (3.116) ein Drehmoment

$$M = NAB \cdot I \cdot \sin \Theta \quad (4.74)$$

erzeugt¹. Das mittlere Drehmoment bei einem Motor, bei dem der Kommutator immer bei dem Winkel, bei dem das Drehmoment null wird, das Vorzeichen ändert, ist

$$M_{eff} = \frac{NAB}{\sqrt{2}} I = NABI_{eff} \quad (4.75)$$

Wenn der Widerstand des Ankers, der rotierenden Spule, R ist, kann man den mittleren Strom berechnen

$$I_{eff} = \frac{U - U_{eff,i}}{R} = \frac{U}{R} - \frac{NBA}{R\sqrt{2}} \omega \quad (4.76)$$

¹Beachte die Phasenverschiebung zwischen Fluss und Drehmoment!

Damit hängt das Drehmoment von der Drehzahl ab

$$M_{eff}(\omega) = NAB \left(\frac{U}{R} - \frac{NBA}{R\sqrt{2}} \omega \right) = \frac{NABU}{R} - \frac{N^2 A^2 B^2}{\sqrt{2}R} \omega \quad (4.77)$$

Das Drehmoment des ruhenden Motors ist also

$$M_{eff}(0) = M_{max} = \frac{NABU}{R} \quad (4.78)$$

und die maximale Drehzahl (da wo $M_{eff} = 0$) ist

$$\omega_{max} = \frac{\sqrt{2}U}{NAB} \quad (4.79)$$

Diese Charakteristik hat man immer dann, wenn das erregende Feld B unabhängig von der Drehzahl ist, bei Permanentmagneten oder wenn die Spule für die Erregerwicklung parallel zum Anker angeschlossen ist. Will man die Drehzahl erhöhen, muss man das Feld B schwächer machen.

Ist die Erregerwicklung in Serie zur Ankerwicklung geschaltet, gibt es keine maximale Drehzahl. Eine lange Zylinderspule (Länge ℓ , Windungszahl N) hat das Magnetfeld

$$B_Z = \mu_0 \frac{N}{\ell} I \quad (4.80)$$

Für andere Geometrien gilt das gleiche Gesetz, aber mit einem geometrieabhängigen Vorfaktor K . Im statischen Falle ist der Strom nur vom Gleichstromwiderstand R_E der Erregerwicklung abhängig. Wenn U_E der Spannungsabfall an der Erregerwicklung ist, ist

$$B(U_E) = K \mu_0 \frac{N_E}{\ell_E} \frac{U_E}{R_E} = K \mu_0 \frac{N_E}{\ell_E} I_E \quad (4.81)$$

Der durch den Anker fließende Strom ist dann durch

$$I_{eff} = \frac{U - U_E - U_{eff,i}}{R} = \frac{U}{R} - \frac{U_E}{R} - \frac{NB(U_E)A}{R\sqrt{2}} \omega \quad (4.82)$$

gegeben.

Da $I_{eff} = I_E$ ist, gilt

$$I_{eff} = \frac{U}{R} - \frac{R_E}{R} I_{eff} - \frac{\mu_0 \cdot K \cdot N \cdot N_E \cdot A}{\ell_E R \sqrt{2}} I_{eff} \omega \quad (4.83)$$

oder

$$I_{eff} = \frac{U}{R + R_E + \frac{\mu_0 \cdot K \cdot N \cdot N_E \cdot A}{\ell_E \sqrt{2}} \omega} \quad (4.84)$$

Damit wird das Drehmoment

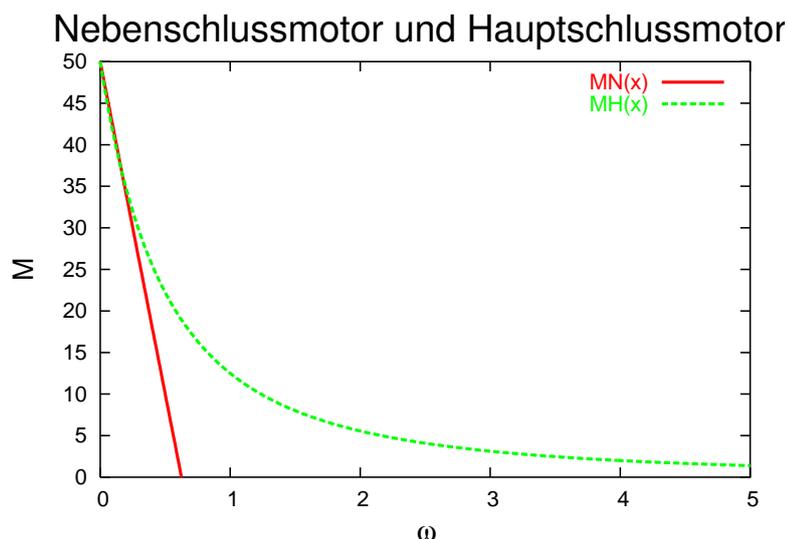
$$M_{eff}(\omega) = NAB(I_{eff})I_{eff} = NA \frac{\mu_0 N_E}{\ell_E} I_{eff}^2 \quad (4.85)$$

Eingesetzt bekommt man

$$M_{eff} = NA \frac{\mu_0 N_E}{\ell_E} \left[\frac{U}{R + R_E + \frac{\mu_0 \cdot K \cdot N \cdot N_E \cdot A}{\ell_E \sqrt{2}} \omega} \right]^2 \quad (4.86)$$

Dieser Motor hätte, ohne Lagerreibung, eine unendlich grosse maximale Drehzahl. Das Startdrehmoment für $\omega = 0$ ist

$$M_{eff}(0) = M_{max} = NA \frac{\mu_0 N_E}{\ell_E} \left[\frac{U}{R + R_E} \right]^2 \quad (4.87)$$



Kennlinien von Nebenschluss- und Hauptschlussmotoren.



Versuch zur Vorlesung:

Linearmotor (Versuchskarte EM113)

4.1.9. Betatron

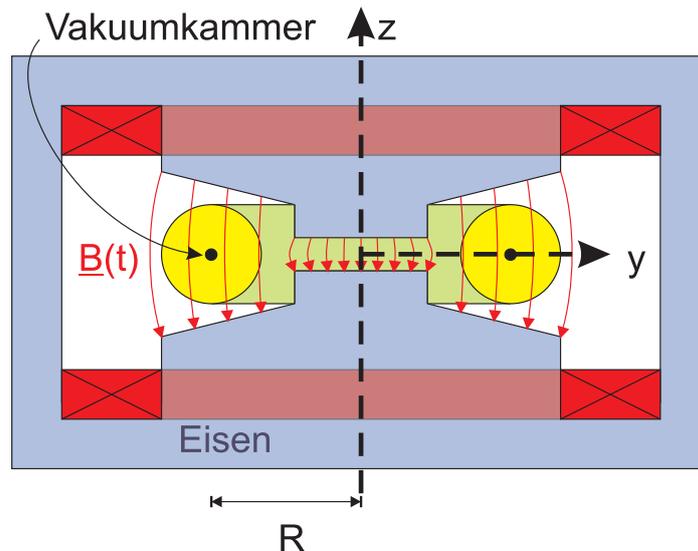
Dieser Stoff wurde am 3. 2. 2005 behandelt



Versuch zur Vorlesung:

Betatron (Versuchskarte EM167)

Die Idee hinter der Konstruktion des Betatrons ist, dass bei einem zeitabhängigen \mathbf{B} -Feld nach $\mathbf{rot} \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$ auch ein zeitabhängiges \mathbf{E} -Feld existiert.



Skizze eines Betatrons

Nach dem Induktionsgesetz $\mathbf{rot} \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$ hat das durch ein in die z -Richtung zeigende Magnetfeld induzierte elektrische Feld keine z -Komponente. Nehmen wir an, dass das \mathbf{E} -Feld eine Radialkomponente hätte. Sie könnte zum Beispiel in die y -Richtung zeigen. Rotieren wir die ganze Anordnung um π um die y -Achse und kehren die Richtung des \mathbf{B} -Feldes um, haben wir wieder die Ausgangsanordnung. Mit der Richtungsumkehr von \mathbf{B} hat aber auch \mathbf{E} die Richtung geändert (Induktionsgesetz). Dies ist aber im Widerspruch zur Ausgangssituation. Deshalb kann es kein radiales \mathbf{E} -Feld geben: das \mathbf{E} -Feld ist tangential und beschleunigt die geladenen Teilchen. Damit die Teilchen auf der Kreisbahn bleiben, muss

$$m \frac{v^2}{R} = e \cdot v \cdot B(t) \quad (4.88)$$

oder

$$mv(t) = p(t) = e \cdot B \cdot R \quad (4.89)$$

Das zweite Newtonsche Axiom in tangentialer Richtung angewandt bedeutet

$$\frac{dp(t)}{dt} = eE(t) \quad (4.90)$$

Mit der Integralform des Induktionsgesetzes erhält man mit einer stationären Kreisbahn $S(R)$ mit dem Radius R

$$\oint_{S(R)} \mathbf{E}(t) \cdot d\mathbf{s} = E(t) \cdot 2\pi R = -\frac{d}{dt} \iint_{A(R)} \mathbf{B}(t) \cdot d\mathbf{a} = \frac{d\bar{B}(t)}{dt} \cdot \pi R^2 \quad (4.91)$$

wobei \bar{B} das über die Fläche des Kreises gemittelte \mathbf{B} -Feld ist. Durch Kombination der obigen Gleichungen und unter Berücksichtigung der Vorzeichen erhalten wir

$$\frac{dp(t)}{dt} = \frac{e \cdot R}{2} \cdot \frac{d\bar{B}}{dt} \quad (4.92)$$

Die Integration mit den Anfangsbedingungen $p(0) = 0$ und $B(0) = 0$ liefert

$$p(t) = \frac{e \cdot R}{2} \cdot \bar{B}(t) \quad (4.93)$$

Der Vergleich mit der Bedingung für die Zentripetalkraft liefert die *Wideroe-Bedingung*

$$\bar{B}(t) = 2 \cdot B(t) \quad (4.94)$$

Diese Bedingung kann durch eine geeignete Wahl der Form der Polschuhe erreicht werden.

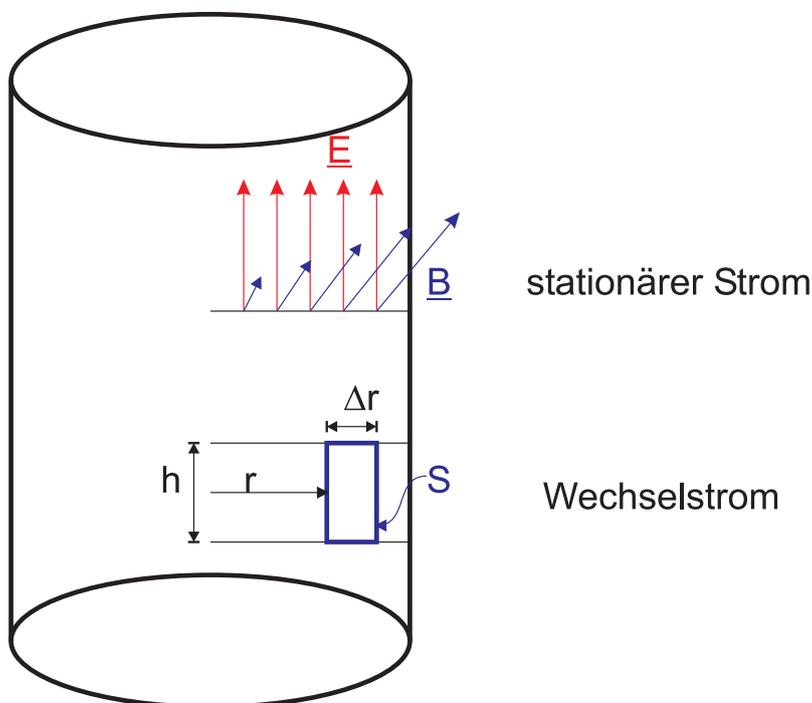
4.1.10. Skin-Effekt

Dieser Stoff wurde am 10. 2. 2005 behandelt



Materialien

Folien zur Vorlesung vom 10. 02. 2005: PDF



Berechnung des Skin-Effektes

Bei Gleichstrom in einem zylindrischen Leiter ist das elektrische Feld konstant über dem Querschnitt. Nach dem Ampèreschen Durchflutungsgesetz (Siehe Gleichung (3.122)) ist das Magnetfeld proportional zum Abstand.

Für den Fall eines Wechselstroms mit niedriger Frequenz müssen wir das Induktionsgesetz berücksichtigen. Nach dem Induktionsgesetz gilt für die zeitunabhängige Kurve S , die auf einer Ebene, in der auch die Zylinderachse liegt, liegt

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = - \frac{d}{dt} \iint_{A(S)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} \quad (4.95)$$

Für die eingezeichnete Schlaufe gilt ($d\mathbf{a}$ ist antiparallel zu \mathbf{B})

$$h [E(r) - E(r - \Delta r)] = \frac{d(-\bar{B})}{dt} \cdot (-h \cdot \Delta r) \quad (4.96)$$

wobei wieder \bar{B} das über die Fläche $\Delta r \cdot h$ gemittelte Magnetfeld ist. Als Zwischenresultat bekommen wir:

$$\frac{[E(r) - E(r - \Delta r)]}{\Delta r} = \frac{d(\bar{B})}{dt}$$

Da der Strom zeitabhängig ist, muss auch das \mathbf{E} -Feld ortsabhängig sein. Eine homogene Stromverteilung bei Wechselstrom ist bei einem Ohmschen Leiter nicht vereinbar mit dem *Induktionsgesetz*. Die Taylorentwicklung von Gleichung (4.95) liefert die betragsmässige Bedingung

$$\frac{\partial E(r, t)}{\partial r} = \frac{\partial B(r, t)}{\partial t} \quad (4.97)$$

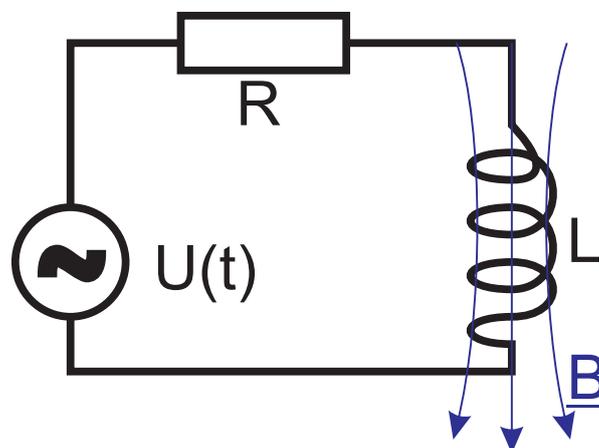
Das elektrische Feld muss also bei Wechselstrom mit zunehmendem Abstand vom Radius zunehmen. Da der Gesamtstrom gegeben ist, ist die Stromdichte an der Oberfläche konzentriert. Dies ist der *Skin-Effekt*.

Anwendung

- Bei Überlandleitungen wird um ein Stahlseil Kupfer (Luxusausführung) oder Aluminium (das Übliche) gewickelt. Dies erhöht den Widerstand kaum, da der Skin-Effekt die Stromleitung bei 50Hz auf etwa 1cm Tiefe beschränkt.

4.2. Energie des Magnetfeldes

Dieser Stoff wurde am 10. 2. 2005 behandelt



Berechnung der Energie im Magnetfeld

Wir betrachten eine mit einer Wechselstromquelle $U(t) = U_0 \sin(\omega t)$ verbundene reale Spule. Diese Spule wird modelliert durch einen Widerstand R und eine ideale Spule L . Die Differentialgleichung dieses Kreises lautet

$$U(t) = L \cdot \dot{I}(t) + R \cdot I(t) \quad (4.98)$$

Die stationäre Lösung dieser Gleichung hat die Form

$$I_S(t) = I_0 \cos(\omega t - \delta) \quad (4.99)$$

Für den Fall, dass $R \ll \omega L$ ist, bekommt man

$$I_S(t) = -\frac{U_0}{\omega L} \cdot \cos \omega t \quad (4.100)$$

Die momentane Leistung der Spannungsquelle ist

$$P_U(t) = U(t) \cdot I(t) = -\frac{U_0^2}{\omega L} \cdot \sin \omega t \cdot \cos \omega t = -\frac{U_0^2}{\omega L} \cdot \frac{1}{2} \sin(2\omega t) \quad (4.101)$$

Die Leistung der Spannungsquelle kann nur die Energie des \mathbf{B} -Feldes ändern, da wir keine dissipativen Elemente haben ($R = 0$). Wenn man die Differentialgleichung für den Fall mit $I(t)$ multipliziert, bekommt man

$$P_U = U(t) \cdot I(t) = L \cdot I \cdot \dot{I} = \frac{d}{dt} \left(\frac{L}{2} I^2 \right) \quad (4.102)$$

Nun ist aber $P = dE/dt$. Damit ist die Energie des Magnetfeldes

$$E_L = \frac{L}{2} I^2 \quad (4.103)$$

Um die Energiedichte eines Magnetfeldes zu berechnen betrachten wir eine Spule

$$B = \mu_0 n I \quad (4.104)$$

mit der Selbstinduktivität

$$L = \mu_0 n^2 A \ell \quad (4.105)$$

wobei A der Querschnitt der Spule und ℓ ihre Länge ist. Eingesetzt in die Gleichung für die Energie E_L bekommt man

$$E_L = \frac{1}{2} \cdot \mu_0 n^2 A \ell \cdot \left(\frac{B}{\mu_0 n} \right)^2 = \frac{B^2}{2\mu_0} A \ell \quad (4.106)$$

Deshalb ist die Energiedichte des \mathbf{B} -Feldes

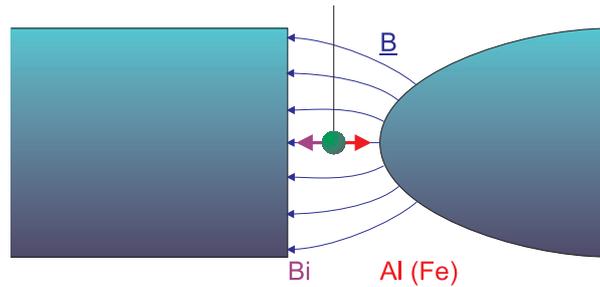
$$w_B = \frac{B^2}{2\mu_0} \quad (4.107)$$

4.3. Magnetische Eigenschaften der Materie

Dieser Stoff wurde am 10. 2. 2005 behandelt

4.3.1. Kugeln im inhomogenen Magnetfeld

Dieser Stoff wurde am 10. 2. 2005 behandelt



Diamagnetische (Bi), paramagnetische (Al) und ferromagnetische (Fe) Materialien im inhomogenen Magnetfeld.



Versuch zur Vorlesung:

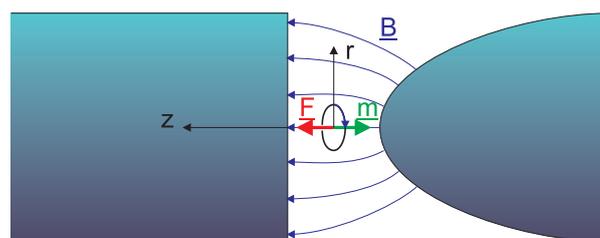
Dia- und Paramagnetismus (Versuchskarte EM177)

Materie im inhomogenen Magnetfeld zeigt zwei verschiedene Verhalten:

diamagnetisches Verhalten Die Materie wird aus dem starken magnetischen Feld herausgedrückt.

paramagnetisches Verhalten Die Materie wird in das starke Feld hineingezogen.

ferromagnetisches Verhalten Die Materie wird in das starke Feld hineingezogen, aber sehr viel stärker als bei paramagnetischen Substanzen. Zudem zeigen diese Substanzen ein remanentes Magnetfeld, auch wenn das äussere Magnetfeld wieder verschwunden ist.



Kreisströme als Ursache des Dia- und des Paramagnetismus

Die Materie im inhomogenen Magnetfeld verhält sich wie wenn die Materie aus einem Kreisstrom bestände. Auf diesen Kreisstrom wirkt, je nach Umlaufsinn eine Kraft zum hohen oder zum niedrigen Feld. Das magnetische Moment der Kreisströme ist beim *Diamagnetismus* antiparallel zu \mathbf{B} . Beim *Paramagnetismus* und beim *Ferromagnetismus* zeigt das magnetische Moment in die Richtung von \mathbf{B} . Der Kreisstrom ist induziert, das heisst, dass seine Richtung von der von \mathbf{B} abhängt. Die resultierende Kraft ist die *Biot-Savart-Kraft* (Siehe Gleichung (3.112)). Sie ist proportional zum Produkt $\mathbf{B} \times d\mathbf{l}$. Wenn man die Richtung des Magnetfeldes umkehrt, wird auch $d\mathbf{l}$ umgekehrt. Die Richtung der Kraft ist als unabhängig von der Richtung von \mathbf{B} .

Wenn der Kreisstrom (die Materie) sich auf der Symmetrieachse eines rotations-symmetrischen inhomogenen Magnetfeldes befindet, ist

$$F_z = m_z \cdot \frac{\partial B_z(z, 0)}{\partial z} \quad (4.108)$$

wobei m_z das induzierte magnetische Moment des Kreisstromes ist.

4.3.2. Der Satz von Larmor

Dieser Stoff wurde am 10. 2. 2005 behandelt

(Siehe Leisi, Klassische Physik II [Lei98, pp. 162])

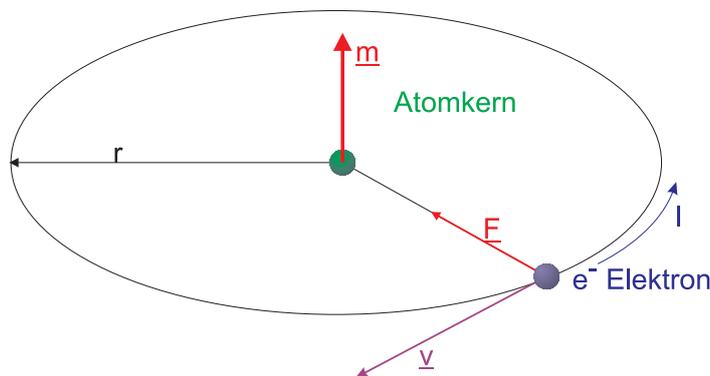


Illustration zum Satz von Larmor

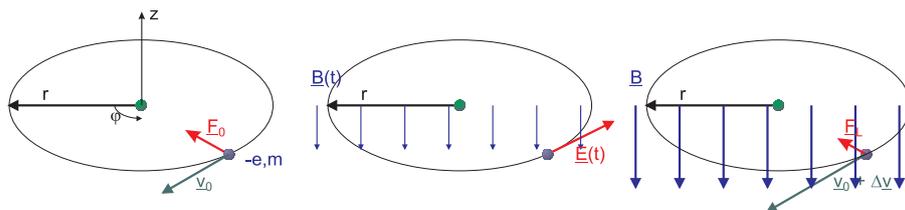
Wir hatten postuliert, dass das Verhalten der Materie in einem Gradienten eines Magnetfeldes durch atomare Kreisströme gegeben ist. Wenn wir ein Modell (nach der Quantenphysik nicht realistisch) eines Atoms betrachten, bei dem ein einzelnes Elektron auf einer Bahn mit dem Radius r sich um den positiv geladenen Kern bewegt, ist der resultierende Strom

$$I = -e \frac{v}{2\pi r} \quad (4.109)$$

Der Betrag des magnetischen Momentes ist dann

$$|\mathbf{m}| = \pi r^2 I = \frac{1}{2} e \cdot v \cdot r \quad (4.110)$$

Die Wirkung eines äusseren Magnetfeldes wird berechnet, indem man betrachtet, wie ein einzelnes Atom auf ein von null anwachsendes äusseres Feld reagiert.



Langsames Einschalten eines Magnetfeldes für ein Elektron in einem Atom. Im linken Schaubild sind die positiven Richtungen definiert.

Im Ausgangszustand ist die Zentripetalkraft $\mathbf{F}_0 = -m_e v^2/r$ die Coulombanziehung zwischen dem Elektron und dem Kern sowie durch die gemittelte Coulombabstossung durch die anderen Elektronen gegeben. Das anwachsende Magnetfeld hat die gleiche Wirkung wie beim Betatron: es entsteht ein tangenciales \mathbf{E} -Feld, das das Elektron beschleunigt. Wir setzen die z -Achse nach oben an. In einem rechtshändigen System ist dann

- das Magnetfeld: $-B$, Betrag: B
- die Geschwindigkeit: $-v$, Betrag: v
- die Zentripetalkraft: $-F_0$, Betrag: F_0
- das induzierte elektrische Feld: E , Betrag: E

Wir setzen diese Grössen ein, um vorzeichenrichtig zu rechnen. Aus dem Induktionsgesetz (Siehe Gleichung (4.16)) folgt

$$\oint_{S(r)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 2\pi \cdot r \cdot E(t) = -\frac{\partial \phi_B}{\partial t} = -\pi r^2 \cdot \frac{d(-B(t))}{dt} = \pi r^2 \cdot \frac{dB(t)}{dt} \quad (4.111)$$

Dabei ist $\phi_B = (-B) \cdot A$ Wir erhalten also

$$E(t) = \frac{r}{2} \cdot \frac{dB(t)}{dt} \quad (4.112)$$

Die Beschleunigung des Elektrons (nicht-relativistisch) ist durch das zweite Newtonsche Axiom gegeben

$$m_e \frac{dv}{dt} = -e \cdot E = -\frac{e \cdot r}{2} \cdot \frac{dB(t)}{dt} \quad (4.113)$$

Hier ist m_e die Ruhemasse des Elektrons. Die Geschwindigkeitsänderung hängt also mit der Magnetfeldänderung wie folgt zusammen

$$dv = -\frac{e \cdot r}{2m_e} \cdot dB \quad (4.114)$$

Der gesamte Geschwindigkeitszuwachs des Elektrons ist also

$$\Delta v = -\frac{e \cdot r}{2m_e} \cdot B \quad (4.115)$$

wenn B das Feld im Endzustand ist. Der Betrag der Geschwindigkeit hat also zugenommen. Nun bewirkt das äussere \mathbf{B} -Feld die Lorentzkraft

$$\mathbf{F}_L = -e \cdot (-v) \cdot (-B) \quad (4.116)$$

die, nach der rechten Hand-Regel zum Kreiszentrum zeigt. Die Zentripetalkraft ist im Endzustand durch

$$F = -m \frac{(-v + \Delta v)^2}{r} \quad (4.117)$$

Da $v \gg \Delta v$ ist, können wir nach Taylor entwickeln

$$\begin{aligned}
 F &\approx -\frac{m_e}{r} (v^2 - 2v \cdot \Delta v) & (4.118) \\
 &= -\frac{m_e}{r} \left(v^2 + 2v \cdot \frac{e \cdot r}{2m_e} \cdot B \right) \\
 &= -\frac{m_e}{r} v^2 - e \cdot v \cdot B \\
 &= F_0 + F_L
 \end{aligned}$$

Die Lorentz-Kraft bewirkt also, dass die Elektronenbahnen für kleine Geschwindigkeitsänderungen sich nicht ändern. Die *Larmorwinkelgeschwindigkeit* ist

$$\Omega \equiv \frac{\Delta v}{r} = \frac{e \cdot B}{2m_e} \quad (4.119)$$

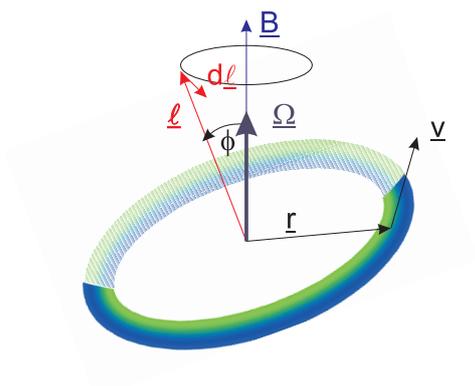
und vektoriell geschrieben

Larmorwinkelgeschwindigkeit

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{e}{2m_e} \mathbf{B} \quad (4.120)$$

In einem mit der Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\Omega}$ rotierenden System sind die Elektronenbahnen im Atom unverändert.

Der *Satz von Larmor* gilt allgemein, auch bei beliebiger Orientierung von Magnetfeld und Bahnebene des Elektrons. Der Satz von Larmor bildet die Grundlage des Verständnisses des Diamagnetismus



Berechnung der Larmorfrequenz mit einem Kreisel

Man kann den *Satz von Larmor* aus der Kreiseltheorie ableiten. Das Elektron ist, bei einer Bahn mit konstantem Radius, ein starrer Körper. Dieser Kreisel hat den Drehimpuls

$$\boldsymbol{\ell} = m \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \quad (4.121)$$

Das magnetische Moment des Kreisstromes ist nach Gleichung (4.110)

$$\mathbf{m} = -\frac{e}{2m}\boldsymbol{\ell} \quad (4.122)$$

Der Kreisel erfährt ein mechanisches Drehmoment

$$\mathbf{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} \quad (4.123)$$

Der Drehimpulssatz bedeutet, dass

$$\frac{d\boldsymbol{\ell}}{dt} = \mathbf{M} = -\frac{e}{2m}\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{B} = \frac{e}{2m}\mathbf{B} \times \boldsymbol{\ell} \quad (4.124)$$

Wir erhalten also eine Präzessionsbewegung des Drehimpulsvektors $\boldsymbol{\ell}$ um \mathbf{B} mit der Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\Omega}$

$$\frac{d\boldsymbol{\ell}}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\ell} \quad (4.125)$$

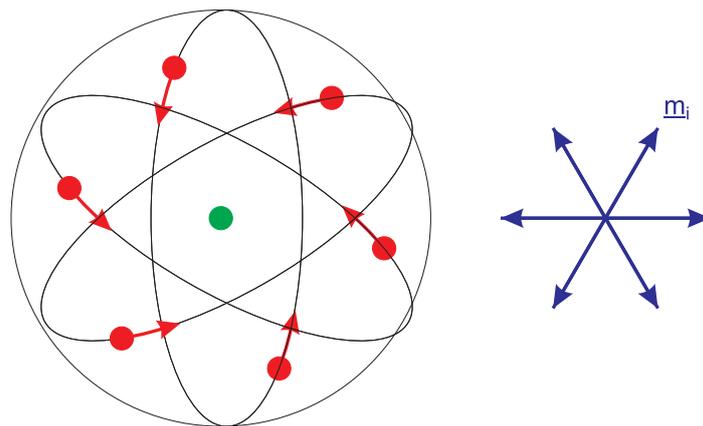
Wir erhalten die

vektorielle Schreibweise der Larmorfrequenz

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{e}{2m}\mathbf{B} \quad (4.126)$$

4.3.3. Diamagnetismus

Dieser Stoff wurde am 10. 2. 2005 behandelt



Berechnung des Diamagnetismus

Im diamagnetischen Atom ist die Summe aller magnetischer Momente der Elektronen exakt null.

$$\mathbf{m}_A = \sum_j \mathbf{m}_j = 0 \quad (4.127)$$

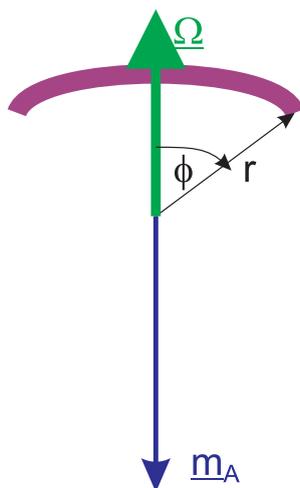
Man kann sich dies vereinfacht so vorstellen, dass jede Elektronenbahn von zwei gegenläufigen Elektronen besetzt ist. Ein diamagnetisches Atom hat deshalb, ohne

äusseres \mathbf{B} -Feld eine kugelsymmetrische Ladungsverteilung. Diese entsteht, weil sich die einzelnen Elektronenbewegungen über die Zeit ausmitteln.

Wenn ein \mathbf{B} -Feld eingeschaltet wird, beginnt diese kugelsymmetrische Ladungsverteilung mit der Larmorfrequenz zu präzedieren. Durch diese Präzession im Magnetfeld entsteht ein von null verschiedenes magnetisches Moment \mathbf{m}_A , das zum Diamagnetismus führt. Zur vereinfachten Berechnung nimmt man an, dass das Atom eine homogen geladene Kugel ist mit der Ladungsdichte

$$\rho_{el} = -\frac{Ze}{(4/3)\pi R^3} \quad (4.128)$$

wobei Z die Kernladungszahl und R der Radius der Elektronenwolke ist.



Ein einzelner Kreisstrom

Diese homogen geladene Kugel rotiert im äusseren Magnetfeld mit

$$\Omega = \frac{e}{2m} B \quad (4.129)$$

Durch ein raumfestes Flächenelement fliesst der Strom

$$\delta I = \rho_{el} \cdot r \cdot dr \cdot d\varphi \cdot v(r, \varphi) \quad (4.130)$$

mit

$$v(r, \varphi) = \Omega \cdot r \cdot \sin \varphi \quad (4.131)$$

Da die *Ladungen* negativ sind, ist das magnetische Moment \mathbf{m}_A entgegengesetzt zu Ω und entgegengesetzt zu \mathbf{B} , hier also nach unten, gerichtet. Dieses magnetische Moment ist

$$\delta m_A(r, \varphi) = \text{Fläche} \cdot \text{Strom} = \pi r^2 \sin^2 \varphi \cdot \delta I \quad (4.132)$$

oder

$$\begin{aligned} \delta m_A(r, \varphi) &= \pi r^2 \sin^2 \varphi \cdot \rho_{el} \cdot r \cdot dr \cdot d\varphi \cdot v(r, \varphi) & (4.133) \\ &= \pi r^2 \sin^2 \varphi \cdot \rho_{el} \cdot r \cdot dr \cdot d\varphi \cdot \Omega \cdot r \cdot \sin \varphi \\ &= \pi r^4 \sin^3 \varphi \cdot \rho_{el} \cdot \Omega \cdot dr \cdot d\varphi \end{aligned}$$

Der Betrag des gesamten magnetischen Momentes erhält man durch Integration über r und φ Er ist

$$\begin{aligned}
 |\mathbf{m}_A| &= \int_0^R \int_0^\pi \delta m_A(r, \varphi) dr d\varphi & (4.134) \\
 &= \pi \cdot \rho_{el} \cdot \Omega \cdot \int_0^R r^4 \cdot dr \cdot \int_0^\pi \sin^3 \varphi \cdot d\varphi \\
 &= \pi \cdot \rho_{el} \cdot \Omega \cdot \int_0^R r^4 \cdot dr \cdot \frac{4}{3} \\
 &= \pi \cdot \rho_{el} \cdot \Omega \cdot \frac{R^5}{5} \cdot \frac{4}{3} \\
 &= \pi \cdot \frac{Z \cdot e}{\frac{4\pi}{3} R^3} \cdot \Omega \cdot \frac{R^5}{5} \cdot \frac{4}{3} \\
 &= \pi \cdot \frac{Z \cdot e}{\frac{4\pi}{3} R^3} \cdot \frac{eB}{2m_e} \cdot \frac{R^5}{5} \cdot \frac{4}{3} \\
 &= \frac{Z \cdot e^2 \cdot B \cdot R^2}{10m_e}
 \end{aligned}$$

Vektoriell geschrieben erhalten wir für das diamagnetische Moment

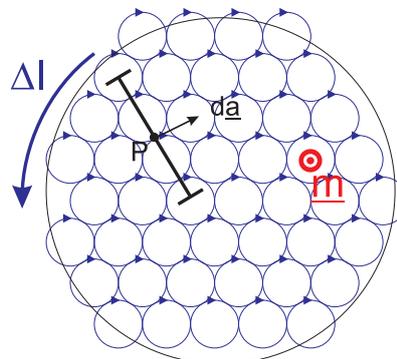
$$\mathbf{m}_A = -\frac{Z \cdot e^2 \cdot R^2}{10m_e} \mathbf{B} \quad (4.135)$$

Diese diamagnetische Moment ist in allen Atomen vorhanden. Bei paramagnetischen und ferromagnetischen Substanzen wird es unterdrückt.

4.3.4. Magnetisierung

Dieser Stoff wurde am 10. 2. 2005 behandelt

(Siehe Leisi, Klassische Physik II [Lei98, pp. 170])



Atomare Kreisströme

Die gesamte makroskopische *Magnetisierung* ist das mittlere magnetische Moment pro Volumeneinheit

$$\mathbf{M}(\mathbf{R}) = \frac{\sum_{\Delta V} \mathbf{m}_{A_i}}{\Delta V} \quad (4.136)$$

Dabei ist \mathbf{m}_{A_1} das magnetische Moment eines Atoms oder einer Atomgruppe, wobei ΔV ein geeignetes Volumenelement ist. Eine Probe heisst homogen magnetisiert, wenn $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ unabhängig vom Probenort ist.

Das externe Magnetfeld soll senkrecht zur Bildebene des obigen Bildes sein. Die atomaren Kreisströme müssen dann in der Bildebene liegen. Betrachten wir ein Flächenelement $d\mathbf{a}$, das senkrecht zur Bildebene liegt, dann stellen wir fest, dass alle Kreisströme zweimal durch dieses Ebenenelement gehen, einmal in positiver und einmal in negativer Richtung. Bis auf die Ströme an den Rändern heben sich alle Ströme auf. Das heisst, dass das mittlere Stromdichtefeld

$$\mathbf{i} = 0 \quad (4.137)$$

ist, da $dI(a) = \mathbf{i} \cdot d\mathbf{a}$. Nur die Ströme am Rand, die Oberflächenströme mit der Stromdichte j , können deshalb die Quelle der beobachteten makroskopischen Magnetisierung sein. Für eine Probe der Höhe Δz ist der gesamte Strom an der Oberfläche

$$\Delta I = \Delta z \cdot j \quad (4.138)$$

Diese makroskopischen Oberflächenströme erklären die experimentellen Beobachtungen. Da für ein diamagnetisches Atom \mathbf{m} entgegengesetzt zum Magnetfeld gerichtet ist, und da damit auch die makroskopische Magnetisierung \mathbf{M} entgegengesetzt zum Magnetfeld gerichtet ist, wird diese Probe wie beobachtet vom Magnetfeldgradienten abgestossen.

Das magnetische Feld aller Kreisströme muss identisch mit dem externen Feld \mathbf{B} sein. Nun ist aber das magnetische Moment eines Kreisstromes in genügender Entfernung nicht von der Fläche dieses Stromes abhängig. Deshalb muss die Summe aller einzelner atomarer magnetischer Momente dem magnetischen Moment des Oberflächenstromes gleich sein.

$$m_a \cdot n \cdot A \cdot \Delta z = A \cdot I = A \cdot j \cdot \Delta z \quad (4.139)$$

wobei n die Volumendichte der Atome ist. Die Oberflächenstromdichte

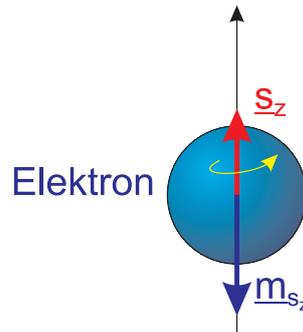
$$j = m_a \cdot n = M \quad (4.140)$$

ist gleich der Magnetisierung.

4.3.5. Das magnetische Moment des Elektrons: Spin

Dieser Stoff wurde am 10. 2. 2005 behandelt

Neben den von der Bahnbewegung herrührenden magnetischen Momenten hat zum Beispiel das *Elektron* ein magnetisches Moment, das von seinem Drehimpuls \mathbf{s} (*Spin*) herrührt.



Elektronenspin

Zu diesem Drehimpuls oder Spin gehört ein entsprechendes magnetisches Moment \mathbf{m}_s . Aus der Quantenmechanik weiss man, dass die Projektion des Spins auf eine raumfeste Achse einen festen Betragswert

$$s_z = \frac{1}{2} \frac{h}{2\pi} = \frac{1}{2} \hbar \quad (4.141)$$

hat, wobei das Plancksche Wirkungsquantum durch

$$h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ Js} \quad (4.142)$$

oder mit $2\pi\hbar = h$

$$\hbar \approx 10^{-34} \text{ Js}$$

ist. Nach der Quantenmechanik gilt

$$\mathbf{m}_s = -\frac{e}{m} \mathbf{s} \quad (4.143)$$

Nach der klassischen Mechanik (rotierende homogen geladene Kugel) wäre $\mathbf{m}_s = -(1/2)\frac{e}{m}\mathbf{s}$. Die Grösse des magnetischen Momentes eines Elektrons ist

$$|m_{s,z}| = \frac{e}{2m} \hbar \equiv 1\mu_B = 0.927 \times 10^{-23} \text{ A} \cdot \text{m}^2 \quad (4.144)$$

auch bekannt unter dem Namen *Bohrsches Magneton*.

4.3.6. Paramagnetismus

Dieser Stoff wurde am 10. 2. 2005 behandelt

(Siehe Kneubühl, Repetitorium der Physik [Kne74, pp. 262])

Bei paramagnetischen Atomen hebt sich das magnetische Bahnmoment der einzelnen Elektronen eines Atoms sowie deren von den Spins herrührendes magnetisches Moment nicht vollständig auf.

$$\mathbf{m}_A \neq 0 \quad (4.145)$$

Das magnetische Moment eines paramagnetischen Atoms hat die Grössenordnung eines Bohrsche Magneton $1\mu_B$. Ohne äusseres Magnetfeld verschwindet die makroskopische Magnetisierung, da die einzelnen atomaren magnetischen Momente ungeordnet sind. Im äusseren Magnetfeld ordnen sich die magnetischen Momente

teilweise, da die thermische Brownsche Bewegung, temperaturabhängig, für Unordnung sorgt.

Die Magnetisierung kann mit der folgenden Überlegung berechnet werden. Wir setzen an

$$\begin{aligned}\mathbf{H} &= (0; 0; H) \\ \mathbf{m} &= (m \sin \Theta \cos \phi; m \sin \Theta \sin \phi; m \cos \Theta) \\ d\Omega &= \sin \Theta d\Theta d\phi = -d(\cos \Theta) d\phi\end{aligned}\quad (4.146)$$

Die Energie des magnetischen Dipols \mathbf{m} im Magnetfeld \mathbf{H} hängt nur von Θ ab. Wir machen eine Koordinatentransformation auf $u = \cos \Theta$. Die Energie ist dann

$$E_{pot} = -\mathbf{m}_A \cdot \mathbf{B} = -\mathbf{m}_A \cdot (\mu_0 \mathbf{H}) = -\mu_0 m_A H \cos \Theta = -\mu_0 m_A H u \quad (4.147)$$

Die Magnetisierung M_z in der z -Richtung, der Richtung des Magnetfeldes \mathbf{H} , ist

$$M_z = \frac{1}{V} \left(\sum \mathbf{m}_A \right)_z = N m_A \langle \cos \Theta \rangle = N m_A \langle u \rangle \quad (4.148)$$

Bei endlichen Temperaturen müssen die potentiellen Energien E_{pot} nach der *Boltzmannstatistik* verteilt sein, also

$$\langle \cos \Theta \rangle = \frac{\int_{\Omega} \cos \Theta e^{-E_{pot}/k_B T} d\Omega}{\int_{\Omega} e^{-E_{pot}/k_B T} d\Omega} = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \cos \Theta e^{x \cos \Theta} \sin \Theta d\Theta d\phi}{\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} e^{x \cos \Theta} \sin \Theta d\Theta d\phi} \quad (4.149)$$

mit $x = \mu_0 m_A H / k_B T$. In der Koordinate u und nach ausführen der trivialen Integration über ϕ lautet die Gleichung

$$\langle u \rangle = \frac{\int_{-1}^1 u e^{xu} du}{\int_{-1}^1 e^{xu} du} \quad (4.150)$$

Wir wechseln auf $\hat{u} = -u$ und erhalten

$$\langle u \rangle = -\frac{\int_{-1}^1 \hat{u} e^{-x\hat{u}} d\hat{u}}{\int_{-1}^1 e^{-x\hat{u}} d\hat{u}} = \coth x - \frac{1}{x} = L(x) \quad (4.151)$$

wobei $L(x)$ die *Langevin-Funktion* ist. Also ist

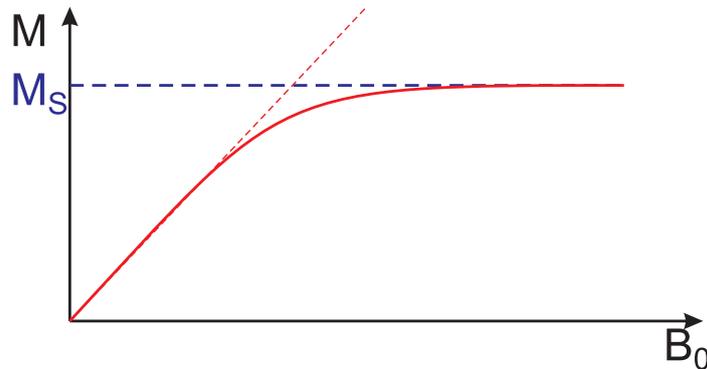
$$\begin{aligned}M_z &= N m_A L \left(\frac{\mu_0 m_A H}{k_B T} \right) \\ &= N m_A L \left(\frac{m_A B}{k_B T} \right) \\ &= N m_A \left[\coth \left(\frac{m_A B}{k_B T} \right) - \frac{k_B T}{m_A B} \right]\end{aligned}\quad (4.152)$$

Diese klassisch berechnete Magnetisierung ist für kleine Magnetfelder, also $kt \gg m_A B$ verifizierbar. Da für $x \ll 1$ die Reihenentwicklung $L(x) = x/3 + O(x^2)$ gilt bekommen wir das *Curie-Gesetz*

$$M = \frac{1}{3} \frac{N m_A^2}{k_B T} B = \frac{C}{T} B \quad (4.153)$$

Hier ist C die Curie-Konstante

$$C = \frac{m_A^2}{3k_b} \tag{4.154}$$



Schematischer Verlauf der Magnetisierung (Curie-Gesetz für kleine B).
 M_S ist die Sättigungsmagnetisierung.

4.3.7. Ferromagnetismus

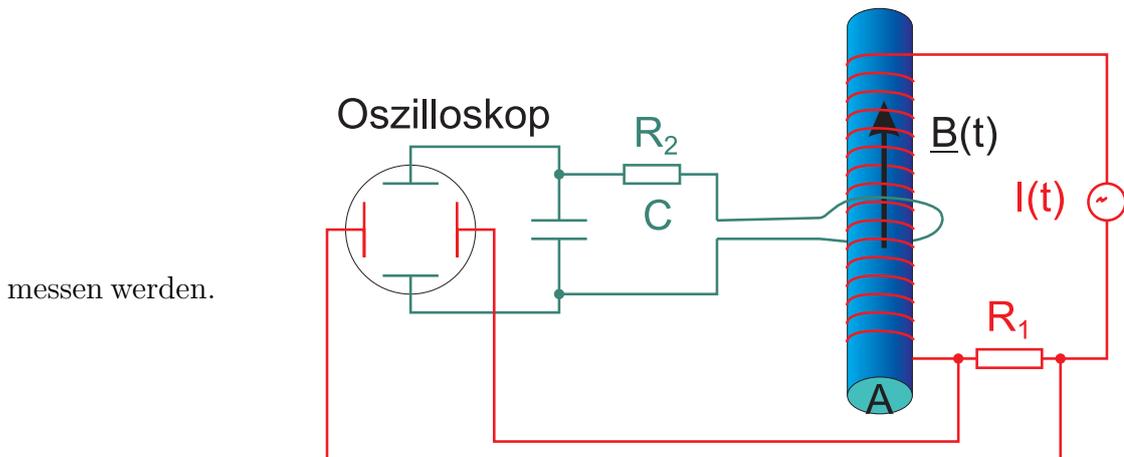
Dieser Stoff wurde am 10. 2. 2005 behandelt



Versuch zur Vorlesung:

Ferromagnetismus - Modellversuch (Versuchskarte EM175)

Ferromagnetische Atome haben genau so wie paramagnetische Atome ein permanentes magnetisches Moment m_A . Im Gegensatz zu den Paramagneten bleibt jedoch auch ohne äusseres Magnetfeld ein magnetisches Moment übrig. Die Magnetisierung als Funktion des Magnetfeldes kann mit der unten stehenden Apparatur ge-



Messung der Hysterese eines Ferromagneten. Rot ist der Primärkreis, grün der Sekundärkreis.

Unter Vernachlässigung der Selbstinduktion ist die Differentialgleichung für den Sekundärkreis

$$-A \cdot \frac{dB(t)}{dt} - \frac{Q(t)}{C} = R_2 \cdot I_2(t) \quad (4.155)$$

Dabei ist $Q(t)$ die *Ladung* am Kondensator. Wir schreiben den Strom als zeitliche Ableitung der *Ladung*.

$$-\frac{A}{R_2} \cdot \frac{dB(t)}{dt} = \frac{Q(t)}{RC} + \frac{dQ(t)}{dt} \quad (4.156)$$

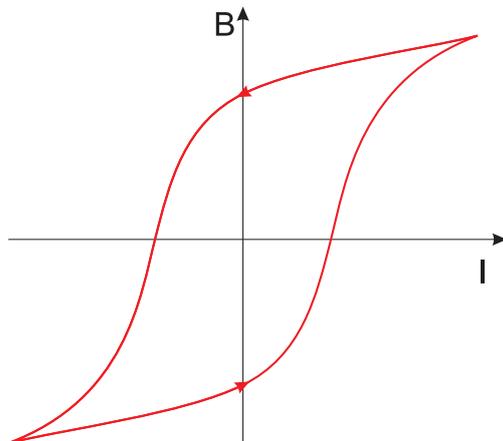
Die Anregung in dieser Schaltung ist ein Strom $I_1(t)$, der die Frequenz ω hat. Also ist auch $Q(t)$ eine periodische Funktion mit der gleichen Frequenz. Bei harmonischen Funktionen gilt, dass $dQ(t)/dt \approx \omega Q(t)$ ist. Wenn $1/RC \ll \omega$ ist, kann der erste Term auf der rechten Seite vernachlässigt werden. Dann gilt

$$Q(t) = \text{const} \cdot B(t) \quad (4.157)$$

und damit für die Spannung am Kondensator

$$U_C(t) = Q(t)/C \propto B(t) \quad (4.158)$$

Der Ausgangsstrom selber erzeugt das anregende Feld.



Hysteresekurve eines Ferromagneten

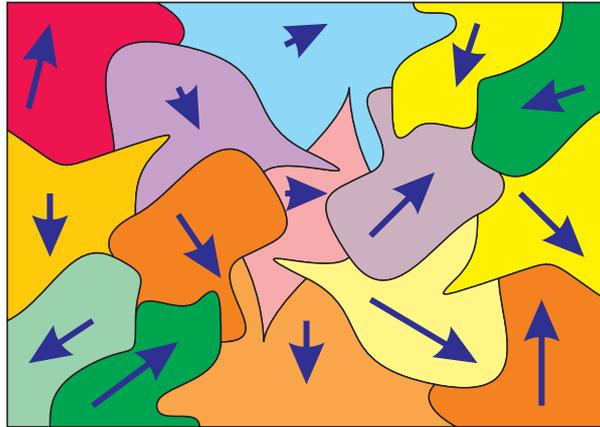
Diese Abbildung zeigt das skizzierte Resultat des obigen Versuches. Interessant ist, dass bei $I = 0$, also ohne anregendes Magnetfeld, trotzdem ein Feld $B \neq 0$ gemessen wird. Diese Feld kann nur von einer nichtverschwindenden Magnetisierung ohne äusseres Feld herrühren. Diese nichtverschwindende Magnetisierung $\mathbf{M} \neq 0$ ist das Kennzeichen eines *Ferromagneten*.

Andererseits gibt es zwei Punkte, bei denen das resultierende Magnetfeld null ist, obwohl ein äusseres Magnetfeld angelegt wurde. Dies kann nur sein, wenn die Magnetisierung im Material das äussere Feld gerade kompensiert.

Weiter nimmt für sehr grosse anregende Felder das resultierende Magnetfeld kaum mehr zu. Man spricht von einer Sättigung der Magnetisierung.

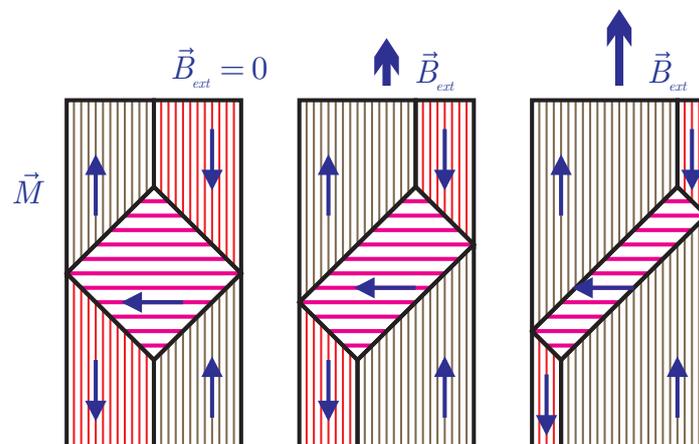


Versuch zur Vorlesung:
Magnetische Bezirke (Versuchskarte EM178)



Ferromagnetische Domänen

Das beobachtete Verhalten kann mit *ferromagnetischen Domänen*, auch Weiss'sche Bezirke genannt, erklärt werden. Das Material besteht, wie oben skizziert, aus einer grossen Zahl kleiner Bereiche, die jeder seine eigene Orientierung der Magnetisierung haben. Die gemittelte Magnetisierung hängt davon ab, wie zufällig die Domänen verteilt sind.

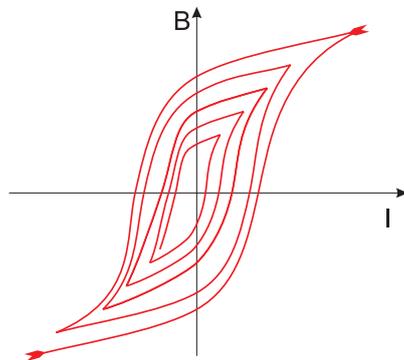


Änderung der Domänenstruktur bei stärker werdendem äusserem Magnetfeld

Wird ein äusseres Magnetfeld angelegt, beginnen die Domänen, die bezüglich des externen Feldes richtig orientiert sind, zu wachsen, die anderen schrumpfen. Die makroskopische Magnetisierung wächst, hinkt aber hinter der Anregung zurück.

Domänen ändern die Richtung ihrer Magnetisierung nicht, sie ändern nur ihre Grösse.

Bei der Änderung der Grösse der Domänen müssen Domänenwände verschoben werden. Dies kostet Energie und zeigt sich als *Hysterese*. Dieser Energieverlust bei der Grössenänderung stabilisiert aber auch die Domänen.



Löschen des remanenten Magnetismus

Um die makroskopische Orientierung der Domänen zum Verschwinden zu bringen, muss man die ferromagnetische Substanz langsam aus einem Wechselfeld entfernen. Das Bild oben zeigt die resultierenden Hysteresekurven. Die Hystereseschleife wird so quasikontinuierlich auf einen Punkt, den Ursprung des Koordinatensystems zusammengezogen.

Anwendung: Entmagnetisieren von Schraubenziehern, Löschen von Tonbändern.

4.4. Zusammenfassung: Elektrodynamik: zeitlich veränderliche Magnetfelder

Magnetischer Fluss Gleichung (4.5)

$$\phi_B = \iint_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}$$

Lorentztransformation der EMK Gleichung (4.12)

$$U'_{EMK} = \gamma(v)U_{EMK}$$

Induktionsgesetz von Faraday Gleichung (4.16)

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = - \iint_{A(S)} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$$

Differentielle Form des Induktionsgesetzes von Faraday Gleichung (4.18)

$$\text{rot } \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Magnetfeld einer langen Spule Gleichung (4.20)

$$B = \mu_0 \frac{N}{\ell} I$$

Fluss einer langen Spule Gleichung (4.21)

$$\phi_B = N \cdot B \cdot A = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} I \cdot A = \mu_0 n^2 A \ell I$$

Selbstinduktivität einer langen Spule Gleichung (4.22)

$$L = \frac{\phi_B}{I} = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} A = \mu_0 n^2 A \ell$$

Selbstinduktionsspannung Gleichung (4.25)

$$U = -\frac{d\phi_m}{dt} = -L \frac{dI}{dt}$$

Übersetzungsverhältnis eines Transformators Gleichung (4.37)

$$U_2 = -\frac{N_2}{N_1} U_1$$

Übersetzungsverhältnis eines Transformators Gleichung (4.38)

$$I_2 = -\frac{N_1}{N_2} I_1$$

Übersetzungsverhältnis eines Transformators für Leistungen Gleichung (4.39)

$$U_2 I_2 = U_1 I_1$$

Maschenregel Gleichung (4.40)

$$\sum_{\forall k \text{ Quellen}} U_k = \sum_{\forall j \text{ Verbraucher}} U_j$$

Knotenregel Gleichung (4.41)

$$\sum_{\forall k \text{ eines Knotens}} I_k = 0$$

Effektivspannung Gleichung (4.50)

$$U_{eff} = U_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_t^{t+T} U^2(\tau) d\tau}$$

Impedanz einer Spule Gleichung (4.54)

$$X_L = \omega L$$

Impedanz eines Kondensators Gleichung (4.61)

$$X_C = \frac{1}{\omega C}$$

Schwingkreis Gleichung (4.69)

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI}{dt} + \frac{1}{LC} I = 0$$

Induzierte Spannung in Generator Gleichung (4.73)

$$U_{eff,i} = \frac{NBA\omega}{\sqrt{2}}$$

Drehmomentkurve eines Nebenschlussmotors Gleichung (4.77)

$$M_{eff}(\omega) = \frac{NAB}{\sqrt{2}} \left(\frac{U}{R} - \frac{NBA}{R\sqrt{2}} \omega \right) = \frac{NABU}{R\sqrt{2}} - \frac{N^2 A^2 B^2}{2R} \omega$$

Drehmomentkurve eines Hauptschlussmotors Gleichung (4.86)

$$M_{eff} = NA \frac{\mu_0 N_E}{\ell_E} \left[\frac{U}{R + R_E + \frac{\mu_0 \cdot K \cdot N \cdot N_E \cdot A}{\ell_E \sqrt{2}} \omega} \right]^2$$

Wideroe-Beziehung für das Betatron Gleichung (4.94)

$$\bar{B}(t) = 2 \cdot B(t)$$

Energiedichte des Magnetfeldes Gleichung (4.107)

$$w_B = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

Larmorfrequenz Gleichung (4.126)

$$\Omega = \frac{e}{2m} B$$

Diamagnetisches Moment Gleichung (4.135)

$$\mathbf{m}_A = -\frac{Z \cdot e^2 \cdot R^2}{10m_e} \mathbf{B}$$

Magnetisches Moment des Elektrons Gleichung (4.143)

$$\mathbf{m}_s = -\frac{e}{m} \mathbf{s}$$

5. Die Maxwell'schen Gleichungen

Dieser Stoff wurde am 17. 2. 2005 behandelt



Materialien

Folien zur Vorlesung vom 17. 02. 2005: PDF

(Siehe Leisi, Klassische Physik II [Lei98, pp. 251])

Maxwellgleichungen werden gebraucht, um die Funktionsweise von

- Radiowellen
- Mikrowellen
- Mobiltelefonen

zu erklären.

Bis jetzt kennen wir die folgenden Gleichungen um die elektrischen Phänomene zu beschreiben:

Gauss'sches Gesetz	$\mathbf{div} \mathbf{E} = \frac{\rho_{el}}{\epsilon_0}$	I
Induktionsgesetz	$\mathbf{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	II
Quellenfreiheit	$\mathbf{div} \mathbf{B} = 0$	III
Durchflutungsgesetz	$\mathbf{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{i}$	IV

Zusätzlich zu den obigen Gleichungen muss die Kontinuitätsgleichung für *Ladungen* gelten

$$\mathbf{div} \mathbf{i} = -\frac{\partial \rho_{el}}{\partial t} \quad (5.1)$$

Diese Kontinuitätsgleichung ist im Widerspruch zum Durchflutungsgesetz. Dies sieht man, indem man die Divergenz auf das Durchflutungsgesetz anwendet.

$$\mathbf{div} (\mu_0 \mathbf{i}) = \mu_0 \mathbf{div} \mathbf{i} = -\mu_0 \frac{\partial \rho_{el}}{\partial t} = \mathbf{div} \mathbf{rot} \mathbf{B} = 0 \quad (5.2)$$

im Widerspruch zur Kontinuitätsgleichung. Dieser Widerspruch wurde von *Maxwell* aufgelöst, indem er das Durchflutungsgesetz ergänzt hat.

$$\mathbf{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{i} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \quad (5.3)$$

Die Grösse $\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ hat die Dimension einer Stroddichte. Diese *Maxwellsche Verschiebungsstromdichte* macht das Durchflutungsgesetz mit der Kontinuitätsgleichung kompatibel. Der Strom ist bei dem modifizierten Durchflutungsgesetz durch

$$\mathbf{i} = \frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \mathbf{B} - \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (5.4)$$

Die Divergenz davon ist

$$\operatorname{div} \mathbf{i} = -\epsilon_0 \operatorname{div} \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = -\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \mathbf{E}) = -\frac{\partial \rho_{el}}{\partial t} \quad (5.5)$$

Damit ist gezeigt, dass die Gleichungen **I-III** zusammen mit dem modifizierten Durchflutungsgesetz auch die Kontinuitätsgleichung beinhalten. Dieser Satz Gleichungen wird die

Maxwell-Gleichungen

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E} &= \frac{1}{\epsilon_0} \rho_{el} & \mathbf{I} \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & \mathbf{II} \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 & \mathbf{III} \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \mu_0 \left(\mathbf{i} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) & \mathbf{IV} \end{aligned} \quad (5.6)$$

genannt.

Zusammen mit dem Kraftgesetz

$$\mathbf{F} = q \cdot \mathbf{E} + q \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (5.7)$$

hat man eine vollständige Charakterisierung der Elektrodynamik für isotrope Materialien.

Die Maxwellsche Verschiebungsstromdichte, die eingeführt wurde um die Maxwellgleichungen mit der Kontinuitätsgleichung kompatibel zu machen, führt dazu, dass man aus den Maxwellgleichungen elektromagnetische Wellen vorhersagen kann.

Die Maxwellgleichungen sind nicht invariant unter der Galilei-Transformation. Diese Beobachtung war ein wichtiger Meilenstein auf dem Weg zur speziellen Relativitätstheorie.

Die Integralform des modifizierten Durchflutungsgesetzes ist

$$\iint_{A(S)} \operatorname{rot} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \iint_{A(S)} \mu_0 \left(\mathbf{i} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{a} = \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} \quad (5.8)$$

wenn man den Satz von Stokes (Siehe Gleichung (A.43)) anwendet. S ist eine beliebige Kurve und $A(S)$ die durch sie berandete Fläche.

Das Gaußsche Gesetz liefert

$$\frac{\partial \rho_{el}}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{div} \mathbf{E}) = \epsilon_0 \mathbf{div} \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \quad (5.9)$$

Damit wird die Kontinuitätsgleichung

$$\mathbf{div} \mathbf{i} + \frac{\partial \rho_{el}}{\partial t} = 0 = \mathbf{div} \mathbf{i} + \epsilon_0 \mathbf{div} \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = \mathbf{div} \left(\mathbf{i} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \quad (5.10)$$

Damit ist das Integral über die Fläche in Gleichung (5.9) unabhängig von S .

Die Integralformeln der Maxwellgleichungen lauten

$$\begin{aligned} \epsilon_0 \iint_{A(V)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} &= \iiint_V \rho_{el}(\mathbf{r}) dV & \text{I} & \quad (5.11) \\ \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} &= - \iint_{A(S)} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} & \text{II} & \\ \iint_{A(V)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} &= 0 & \text{III} & \\ \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} &= \iint_{A(S)} \mu_0 \left(\mathbf{i} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{a} & \text{IV} & \end{aligned}$$

Der Unterschied zwischen der zweiten und der dritten Maxwellgleichung ist, dass in der zweiten Gleichung über eine einfache, von der Kurve S aufgespannte Fläche $A(S)$ integriert wird, während in der dritten Gleichung über die das Volumen V einschliessende Fläche $A(V)$ integriert wird.

Für Medien mit tensoriellen Eigenschaften benötigt man die beiden Materialgleichungen

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \underline{\epsilon} \epsilon_0 \mathbf{E} \\ \mathbf{B} &= \underline{\mu} \mu_0 \mathbf{H} \end{aligned} \quad (5.12)$$

wobei $\underline{\epsilon}$ und $\underline{\mu}$ Tensoren sind.

Die Maxwellgesetze für allgemeine Materialien lauten

$$\begin{aligned} \mathbf{div} \mathbf{D} &= \rho_{el} & \text{I} & \\ \mathbf{rot} \mathbf{E} &= - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & \text{II} & \\ \mathbf{div} \mathbf{B} &= 0 & \text{III} & \\ \mathbf{rot} \mathbf{H} &= \mathbf{i} + \epsilon \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} & \text{IV} & \end{aligned} \quad (5.13)$$

in der differentiellen Schreibweise und

$$\begin{aligned}
\iint_{A(V)} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} &= \iiint_V \rho_{el}(\mathbf{r}) dV & \text{I} & \quad (5.14) \\
\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} &= - \iint_{A(S)} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} & \text{II} & \\
\iint_{A(V)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} &= 0 & \text{III} & \\
\oint_S \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} &= \iint_{A(S)} \left(\mathbf{i} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{a} & \text{IV} &
\end{aligned}$$

in der Integralschreibweise.

Anwendung

Wir betrachten einen langen kreiszylindrischen Leiter mit dem Durchmesser R , aus dem eine Scheibe mit der Dicke $d \ll R$ herausgeschnitten wurde. Dieser Leiter werde an eine Gleichstromquelle mit $I(t) = I_0$ angeschlossen. Die Endflächen beim herausgeschnittenen Stück wirken wie ein Kondensator. Also ist

$$Q(t) = I_0 \cdot t \quad (5.15)$$

Da wir eine zeitlich konstante Situation haben, sind alle zeitlichen Ableitungen null. Mit der Integralform des Gauss'schen Gesetzes bekommt man mit einer geschlossenen Fläche A , die eine Kondensatorplatte beinhaltet

$$\begin{aligned}
\epsilon_0 \iint_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} &= \iiint_{V(A)} \rho_{el} dV & (5.16) \\
\epsilon_0 E(t) \pi R^2 &= Q(t)
\end{aligned}$$

wobei wir berücksichtigt haben, dass innerhalb des Leiters sowie ausserhalb des herausgeschnittenen Stückes $\mathbf{E} = 0$ gilt. Damit erhalten wir

$$E(t) = \frac{Q(t)}{\epsilon_0 \pi R^2} = \frac{I_0(t)}{\epsilon_0 \pi R^2} t = \frac{i_0}{\epsilon_0} t \quad (5.17)$$

Dabei ist i_0 die Stromdichte im Draht, nicht in der Lücke. Das Vektorfeld

$$\left(\mathbf{i} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$$

ist homogen im ganzen Zylinder, einschliesslich des herausgeschnittenen Stückes. Im Leiter ist $\mathbf{E} = 0$, also

$$i_0 = \frac{I_0}{\pi R^2} \quad (5.18)$$

Im herausgeschnittenen Stück ist $i = 0$ und damit

$$i' = \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \frac{I_0(t)}{\epsilon_0 \pi R^2} t = \frac{I_0}{\pi R^2} = i_0 \quad (5.19)$$

Deshalb muss \mathbf{B} über den ganzen Leiter, inklusive des herausgeschnittenen Stückes, tangential und translationsinvariant entlang des Leiters sein.

$$B(r) = \frac{\mu_0}{2\pi} I_0 \cdot \frac{r}{R^2} \quad \text{für} \quad r < R \quad (5.20)$$

sowie

$$B(r) = \frac{\mu_0}{2\pi} I_0 \cdot \frac{1}{r} \quad \text{für} \quad r \geq R \quad (5.21)$$

Der Maxwell'sche Verschiebungsstrom bewirkt also, dass die Stromverteilung im Leiter in den Zwischenraum verschoben wird. Das modifizierte Ampèresche Durchflutungsgesetz ist die physikalische Rechtfertigung für den umgangssprachlichen Ausdruck **der Strom fließt durch den Kondensator**.

6. Elektromagnetische Wellen

Dieser Stoff wurde am 17. 2. 2005 behandelt

6.1. Die Wellengleichung im Vakuum

Dieser Stoff wurde am 17. 2. 2005 behandelt

Im *Vakuum* gibt es keine Teilchen, also auch keine geladenen Teilchen. Wir können also setzen:

$$\rho_{el}(\mathbf{r}) = 0$$

$$\mathbf{i}(\mathbf{r}) = 0$$

Damit lauten die Maxwellgleichungen in der Integralform

$$\iint_{A(V)} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} = 0 \quad \text{I} \quad (6.1)$$

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = - \iint_{A(S)} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} \quad \text{II}$$

$$\iint_{A(V)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = 0 \quad \text{III}$$

$$\oint_S \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \epsilon\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \iint_{A(S)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} \quad \text{IV}$$

oder in der differentiellen Form

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0 \quad \text{I} \quad (6.2)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \text{II}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad \text{III}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \epsilon\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad \text{IV}$$

Im Vakuum ist $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ sowie $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$ sowie $\mu = 1$ und $\epsilon = 1$. Zur Ableitung der Wellengleichung sind die differentiellen Maxwellgleichungen besser als die integralen geeignet. Wir verwenden $\mu_0 \epsilon_0 = 1/c^2$ und erhalten also

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0 \quad \text{I} \quad (6.3)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \text{II}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad \text{III}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad \text{IV}$$

Die Maxwellgleichungen im *Vakuum* sind symmetrisch bezüglich \mathbf{E} und \mathbf{B} . Wir nehmen die Rotation der zweiten Maxwellgleichung.

$$\mathbf{rot rot E} = -\mathbf{rot} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{rot B} \quad (6.4)$$

Indem wir die Austauschbarkeit von Ableitungen verwenden. Nun setzt man die vierte Maxwellgleichung in die zweite Gleichung ein. Wir erhalten eine Differentialgleichung für \mathbf{E} allein.

$$\mathbf{rot rot E} = -\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (6.5)$$

Nun gilt die Vektoridentität

$$\mathbf{rot rot E} = \mathbf{grad div E} - \mathbf{div grad E} = \mathbf{grad div E} - \Delta \mathbf{E} \quad (6.6)$$

Wegen der ersten Maxwellgleichung verschwindet der erste Term auf der rechten Seite. Also lauten die *Wellengleichungen*

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = c^2 \Delta \mathbf{E} \quad (6.7)$$

sowie nach einer analogen Ableitung für \mathbf{B}

$$\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = c^2 \Delta \mathbf{B} \quad (6.8)$$

Die nicht-trivialen Lösungen der *Wellengleichungen* heissen *elektromagnetische Wellen*. Dieses Phänomen ist implizit in den Maxwellgleichungen enthalten, die aus makroskopischen Experimenten abgeleitet wurden. Die *Wellengleichung* beschreibt alle Wellenphänomene aus der Kommunikationstechnik, der *Optik* und der Wechselwirkung von Atomen und Molekülen untereinander, für Abstände von 1nm oder mehr. Die Maxwellgleichungen sind invariant unter der *Lorentz-Transformation*, nicht aber unter der *Galilei-Transformation*. In jedem Inertialsystem im Vakuum ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \approx 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (6.9)$$

Damit haben die Maxwellgleichungen implizit schon 1864 die spezielle Relativitätstheorie vorweggenommen.

In Medien ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit entsprechend

$$c_m = \frac{1}{\sqrt{\mu \mu_0 \epsilon \epsilon_0}} = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} \cdot c \quad (6.10)$$

wobei μ die relative Permeabilitätszahl und ϵ die relative Dielektrizitätszahl ist.

6.2. Elektromagnetische Wellen im Doppelleitersystem

Dieser Stoff wurde am 17. 2. 2005 behandelt

Wir untersuchen die Wellenphänomene an 3 Testsystemen,

- A. Doppelleitung oder *Lecher-Leitung*, die besonders einfach auszumessen ist
- B. Der Doppelleitung aus parallelen Ebenen, die wichtig für die Printplattentechnologie ist und besonders einfach zu berechnen ist
- C. dem Koaxialkabel, der technisch wichtigen Anwendung für Verbindungen.



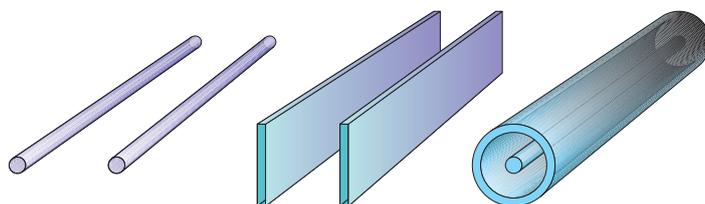
Versuch zur Vorlesung:

Lecherleitung (Versuchskarte SW025)



Versuch zur Vorlesung:

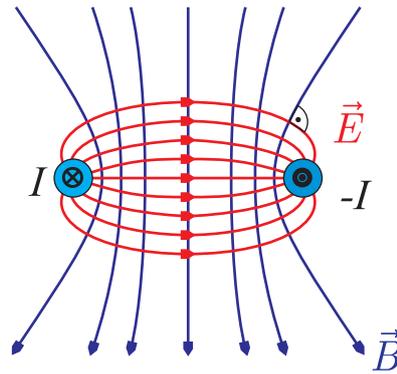
Koaxialleitung (Versuchskarte SW085)



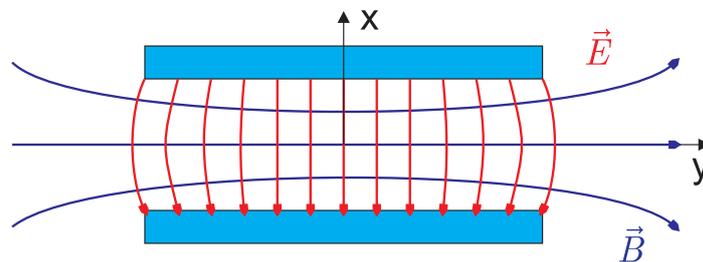
3 mögliche Doppelleitersysteme. Links die Lecherleitung, in der Mitte eine Doppelleiterleitung, wie sie bei Printplatten üblich ist und rechts ein Koaxialkabel

Wenn man das Doppelleitersystem mit elektromagnetischen Wellen mit einer Wellenlänge von etwa $\lambda = 1m$ speist, beobachtet man folgendes

1. Das am Ende offene Doppelleitersystem zeigt Knoten und Bäuche des \mathbf{E} - und des \mathbf{B} -Feldes in Richtung ℓ . Der Abstand der Intensitätsmaxima beträgt $\lambda/2$ für beide Felder. Die Maxima der \mathbf{E} -Feldes sind gegen denen des \mathbf{B} -Feldes verschoben. Wir haben stehende Wellen.
2. Das am Ende mit einem Kurzschlussbügel versehene System zeigt das gleiche Verhalten wie vorher. Die Maxima sind jedoch verschoben. Wieder haben wir stehende Wellen.
3. Wenn das Doppelleitersystem mit einem Widerstand von etwa 400Ω abgeschlossen ist, verschwinden die Maxima. Es gibt keine stehenden Wellen.
4. Die Richtungen von \mathbf{E} und \mathbf{B} sind analog wie beim Kondensator.



Magnetfelder und elektrische Felder bei einer Lecherleitung



Magnetfelder und elektrische Felder bei einer Doppelleitung aus parallelen Platten

Wir setzen für die \mathbf{E} -Welle in der Geometrie der obigen Zeichnung an

$$\begin{aligned} E_x(z, t) &= -E_0 \cos(kz - \omega t) \\ E_y(z, t) &= 0 \\ E_z(z, t) &= 0 \end{aligned} \quad (6.11)$$

Dieses Feld erfüllt die Wellengleichung. Wir behaupten, dass das \mathbf{B} -Feld durch

$$\begin{aligned} B_x(z, t) &= 0 \\ B_y(z, t) &= -\frac{E_0}{c} \cos(kz - \omega t) \\ B_z(z, t) &= 0 \end{aligned} \quad (6.12)$$

gegeben ist. Auch diese Gleichung erfüllt sie Wellengleichung. Wir verwenden die zweite Maxwellgleichung, um zu zeigen, dass die Kopplung richtig ist. Wir schreiben $\mathbf{rot} \mathbf{E} = -(\partial/\partial t)\mathbf{B}$ in Komponenten

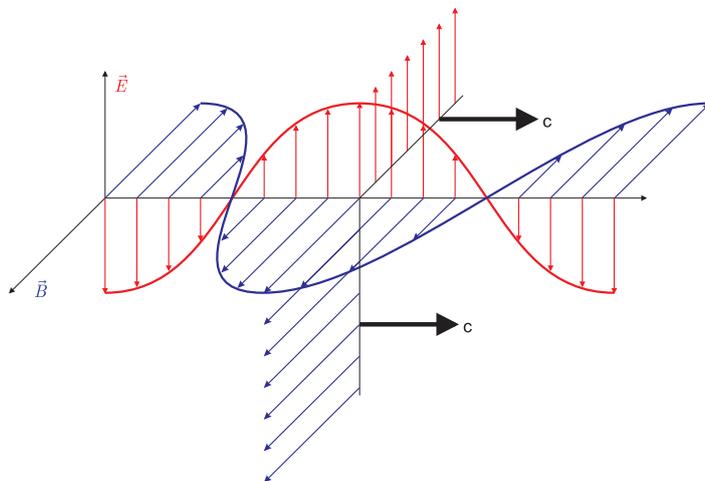
$$\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}, \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}, \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) = - \left(\frac{\partial B_x}{\partial t}, \frac{\partial B_y}{\partial t}, \frac{\partial B_z}{\partial t} \right) \quad (6.13)$$

Die x - und die z -Komponenten sind null, nach der Voraussetzung. Die y -Komponente lautet

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \quad (6.14)$$

Mit $c = \omega/k$ ist diese Kopplungsgleichung, die zweite Maxwellgleichung erfüllt. Die vierte Maxwellgleichung ist ebenfalls erfüllt. Aus ihr erhält man

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = -c^2 \frac{\partial B_y}{\partial z} \quad (6.15)$$



Ausbreitung von elektromagnetischen Wellen

Diese elektromagnetischen Wellen im Innenraum zwischen den beiden Leitern müssen auch in den angrenzenden Leitern Ladungswellen und Stromwellen erzeugen, die mit den Maxwellgleichungen kompatibel sind. Für die *Ladungen* gilt mit der ersten Maxwell'schen Gleichung für die Oberflächenladungsdichte

$$\sigma(z, t) = -\epsilon_0 E_x(z, t) = \epsilon_0 E_0 \cdot \cos(kz - \omega t) \quad (6.16)$$

Die Oberflächenladungsdichte ist eine fortlaufende Welle. Die Erhaltung der elektrischen *Ladung* bedingt für die Oberflächenladungsdichte in einem Abschnitt der Breite b

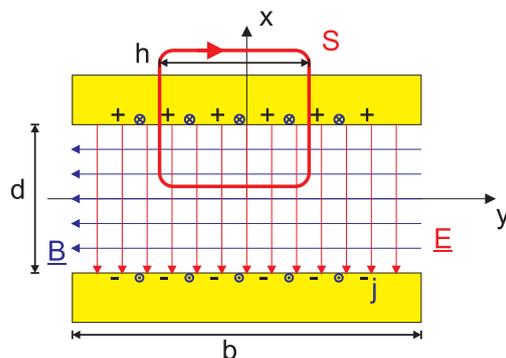
$$b \cdot [j(z + dz, t) - j(z, t)] = -\frac{\partial \sigma(z, t)}{\partial t} \cdot b \cdot dz \quad (6.17)$$

und damit

$$\frac{\partial j(z, t)}{\partial z} = -\frac{\partial \sigma(z, t)}{\partial t} = \epsilon_0 E_0 \cdot \omega \cdot \sin(kz - \omega t) \quad (6.18)$$

Die Integration über z und die Verwendung von $c = \omega/k$ ergibt

$$j(z, t) = \epsilon_0 E_0 \cdot c \cdot \cos(kz - \omega t) \quad (6.19)$$



Integrationspfad zur Anwendung des vierten Maxwell'schen Gesetzes

Mit dem vierten Maxwell'schen Gesetz $\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \iint_{A(S)} \mu_0 \left(\mathbf{i} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{a}$ erhalten wir mit dem eingezeichneten Integrationsweg, da der Term mit \mathbf{E} keinen Beitrag gibt (er liegt in der Integrationsebene)

$$-B_y(z, t) \cdot h = \mu_0 \cdot h \cdot j(z, t) = \mu_0 \cdot h \cdot \epsilon_0 \cdot E_0 \cdot c \cdot \cos(kz - \omega t) \quad (6.20)$$

Mit $\epsilon_0 \cdot \mu_0 = 1/c^2$ folgt

$$B_y(z, t) = -\frac{E_0}{c} \cdot \cos(kz - \omega t) \quad (6.21)$$

eine identische Gleichung zu der im Zwischenraum abgeleiteten. Die Lösung für die auf dem Zweileitersystem transportierten Wellen ist also kompatibel mit den Maxwellgleichungen. *Ladungen* und *Ströme* bewegen sich als Wellen auf der Innenseite der Leiter.

6.2.1. Wellenwiderstand

Dieser Stoff wurde am 17. 2. 2005 behandelt

An einer festen Stelle z berechnen wir die *E.M.K.* zwischen den Leitern.

$$U_{emk}(z, t) = \int_{\text{unten}}^{\text{oben}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -d \cdot E_x(z, t) = d \cdot E_0 \cdot \cos(kz - \omega t) \quad (6.22)$$

Der gesamte Oberflächenstrom auf der oberen Platte an der Stelle z ist

$$I(z, t) = b \cdot j(z, t) = b \cdot \epsilon_0 \cdot E_0 \cdot c \cdot \cos(kz - \omega t) \quad (6.23)$$

Wenn man an einer beliebigen Stelle das Doppelleitersystem entzweischneidet und dort den Widerstand

$$R^* = \frac{U_{emk}(z, t)}{I(z, t)} = \frac{d}{b} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \quad (6.24)$$

den *Wellenwiderstand*, anschliesst, gibt es einen reflexionsfreien Abschluss, wir haben eine reine fortlaufende Welle. Das gleiche gilt für jede beliebige fortlaufende Welle, auch wenn sie nicht harmonisch ist.

Das Zweidraht-Doppelleitersystem hat den Wellenwiderstand

$$R^* = \frac{1}{\pi} \ln \left(\frac{4a}{d} \right) \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \quad (6.25)$$

Die Grösse

$$R_0^* = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 377\Omega \quad (6.26)$$

ist der Wellenwiderstand des Vakuums.

6.2.2. Stehende Wellen

Dieser Stoff wurde am 17. 2. 2005 behandelt

Stehende Wellen werden aus zwei fortlaufenden Wellen mit entgegengesetztem Wellenvektor \mathbf{k} zusammengesetzt. Dabei müssen \mathbf{E} , \mathbf{B} und \mathbf{k} in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem bilden¹. Die nach rechts laufende Welle wurde schon berechnet (hier sind nur die von null verschiedenen Komponenten angegeben)

$$\begin{aligned} E_x(z, t) &= -E_0 \cos(kz - \omega t) \\ B_y(z, t) &= -\frac{E_0}{c} \cos(kz - \omega t) \end{aligned} \quad (6.27)$$

Die nach links laufende Welle ist dann gegeben durch (Rechtssystem!)

$$\begin{aligned} E'_x(z, t) &= -E_0 \cos(kz + \omega t) \\ B'_y(z, t) &= \frac{E_0}{c} \cos(kz + \omega t) \end{aligned} \quad (6.28)$$

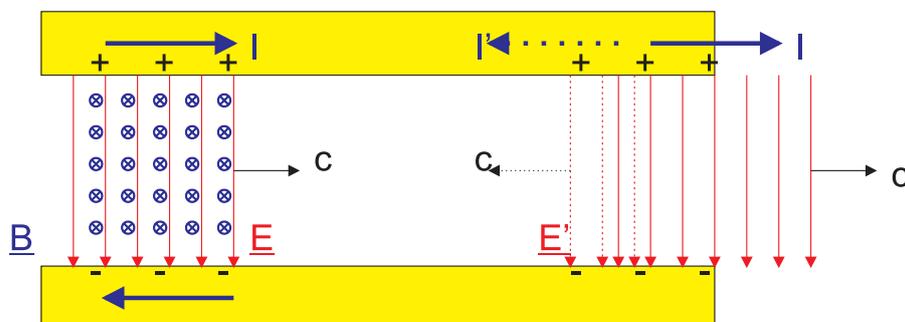
Die Superposition der beiden Wellen ergibt die folgenden nicht verschwindenden Komponenten

$$\begin{aligned} \hat{E}_x(z, t) &= -2E_0 \cos(kz) \cos(\omega t) \\ \hat{B}_y(z, t) &= -2\frac{E_0}{c} \sin(kz) \sin(\omega t) \end{aligned} \quad (6.29)$$

Im Gegensatz zu laufenden Wellen sind bei **stehenden Wellen** die Maxima der \mathbf{E} -Felder und der \mathbf{B} -Felder gegeneinander um $\lambda/4$ verschoben.

6.3. Poynting-Vektor und Energiefluss

Dieser Stoff wurde am 17. 2. 2005 behandelt



Berechnung des Poynting-Vektors

¹Wegen der Rotation in den Maxwellgleichungen!

Wir hatten gesehen, dass das elektrische wie das magnetische Feld eine Energiedichte haben. Da sich bei Wellen diese Felder mit der Geschwindigkeit c ausbreiten, muss es einen Energiefluss geben. Wir betrachten einen Rechteckpuls auf einem Zweileitersystem. Der Energiefluss durch eine raumfeste Fläche $A = b \cdot d$ bezeichnen wir mit S_z , dem Energiefluss pro Flächen- und Zeiteinheit. Die in der Zeit dt transportierte Energie ist

$$S_z \cdot A \cdot dt = \left(\frac{\epsilon_0}{2} E_x^2 + \frac{1}{2\mu_0} B_y^2 \right) \cdot A \cdot dt \cdot c \quad (6.30)$$

Für beliebige fortlaufende Wellen im Vakuum gilt

$$B_y(z, t) = \frac{1}{c} E_x(z, t) \quad (6.31)$$

Wir können damit die Gleichung (6.30) symmetrisch schreiben

$$S_z = \left(\frac{\epsilon_0 \cdot c}{2} E_x \cdot B_y + \frac{1}{2\mu_0 \cdot c} E_x \cdot B_y \right) \cdot c = \frac{1}{2\mu_0} E_x \cdot B_y + \frac{1}{2\mu_0} E_x \cdot B_y = \frac{1}{\mu_0} E_x \cdot B_y \quad (6.32)$$

Damit ist auch klar, dass das \mathbf{E} -Feld und das \mathbf{B} -Feld je zur Hälfte zum Energiefluss beitragen.

Die allgemeine Form des Energieflusses im Vakuum ist

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \quad (6.33)$$

In Medien muss der Energiefluss wie

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \quad (6.34)$$

geschrieben werden. $|\mathbf{S}|$ gibt die in Richtung \mathbf{S} fließende Energie pro Flächeneinheit und Zeit wieder. Die Einheit von S ist $J/(m^2 \cdot s)$. Da \mathbf{H} und \mathbf{B} über einen Tensor verbunden sein können, muss der Energiefluss nicht unbedingt in die Richtung des Wellenvektors zeigen. Dieses Verhalten ist die Grundlage von optisch doppelbrechenden Materialien.

6.4. Elektromagnetische Wellen im Raum

Dieser Stoff wurde am 17. 2. 2005 behandelt

Hier soll mit einer beschleunigten *Ladung* erklärt werden, wie Wellen im Raum entstehen.



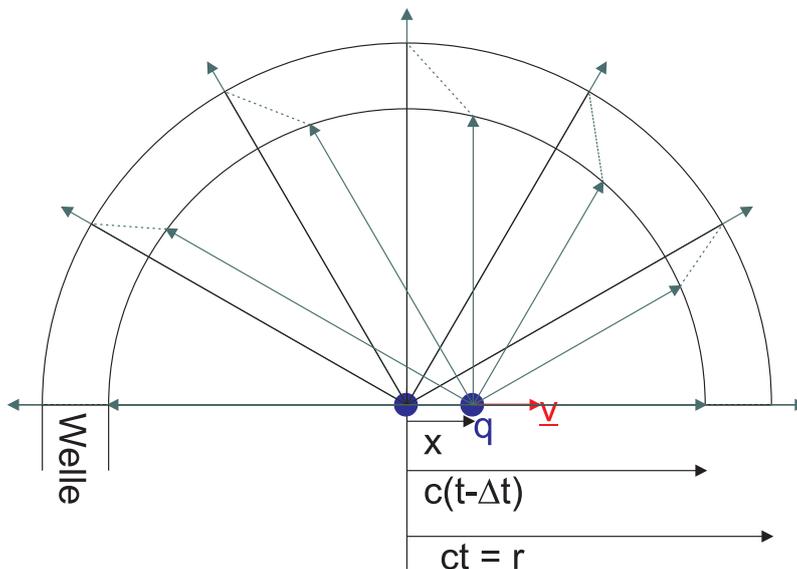
Versuch zur Vorlesung:

Hertzscher Dipol (Versuchskarte SW099)



Versuch zur Vorlesung:

Stehende Wellen (Versuchskarte SW032)

*Wellenausbreitung*Wir betrachten eine *Ladung* q , die die folgende Geschwindigkeit hat

$$\mathbf{v} = \begin{cases} 0 & \text{für } -\infty < t < 0 \\ \mathbf{a} \cdot t & \text{für } 0 \leq t < \Delta t \\ \mathbf{a} \cdot \Delta t & \text{für } t \geq \Delta t \end{cases}$$

Die Beschleunigungszeit Δt sowie die Beschleunigung \mathbf{a} sollen so gewählt sein, dass

$$v \ll c$$

gilt. Die Behauptung ist, dass das elektrische Feld \mathbf{E} für $t \gg \Delta t$ wie in der Zeichnung oben aussieht. In der Beschleunigungsphase soll eine elektromagnetische Welle erzeugt worden sein. Ausserhalb der Kugel mit dem Radius

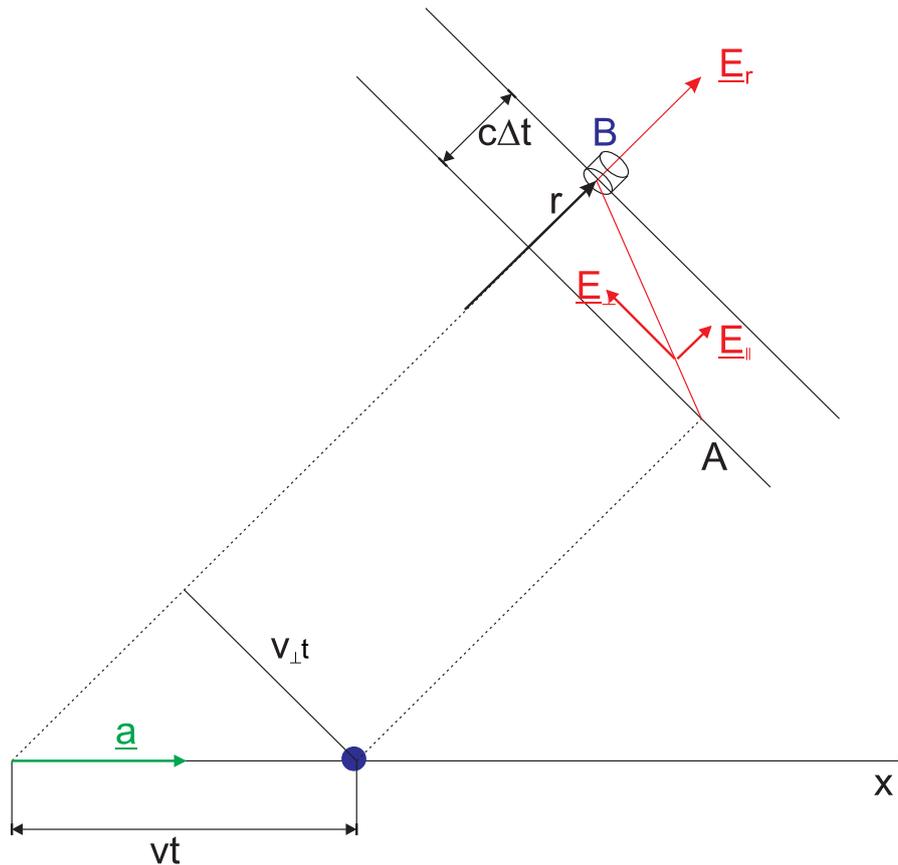
$$r = c \cdot t$$

muss das elektrische Feld das Feld einer im Ursprung ruhenden *Ladung* sein, da nach der *Relativitätstheorie* die Information über die Beschleunigung diesen Raum noch nicht erreicht haben kann.

Innerhalb der Kugel mit

$$r \leq c(t - \Delta t)$$

haben wir das Feld der *Ladung* q , die sich mit der konstanten Geschwindigkeit v bewegt, denn in diesem Bereich ist die Welle, so wie wir eine erzeugt haben, schon wieder vorbei. Die Feldlinien im Laborsystem können wir erhalten, indem wir das elektrische Feld im Ruhesystem der *Ladung* (radiale Feldlinien) in das Laborsystem transformieren. Wenn $v \ll c$ ist, haben wir auch im Laborsystem radiale Feldlinien, die von der momentanen Position der *Ladung* weggehen. Die Maxwellgleichung im Vakuum $\mathbf{div} \mathbf{E} = 0$ bedingt, dass die Feldlinien geschlossen und stetig sind. Die Vermutung ist, dass die Feldlinien in der Wellenzone linear die beiden Feldlinienmuster miteinander verbinden.



Berechnung der Wellenausbreitung

Da $t \gg \Delta t$ ist, kann die Beschleunigungsphase für die Bestimmung der Position der *Ladung* zur Zeit t vernachlässigt werden. Wir haben also

$$x(t) = v \cdot t \quad (6.35)$$

Wegen $v \ll c$ ist dann auch

$$r = c \cdot t \gg x \quad (6.36)$$

sowie wegen $t \gg \Delta t$ auch

$$r \gg c \cdot \Delta t \quad (6.37)$$

Wir bezeichnen mit \perp die Richtung senkrecht zum Radiusvektor \mathbf{r} . Wir erhalten dann, unter der Annahme, dass das \mathbf{E} -Feld in der Wellenzone linear sei,

$$\frac{E_\perp}{E_\parallel} = \frac{v_\perp \cdot t}{c \cdot \Delta t} \quad (6.38)$$

Mit

$$v_\perp = a_\perp \cdot \Delta t \quad (6.39)$$

sowie mit $t = r/c$ bekommen wir

$$\frac{E_\perp}{E_\parallel} = a_\perp \frac{r}{c^2} \quad (6.40)$$

Andererseits, wenn wir die Integralform der ersten Maxwellgleichung auf den kleinen Zylinder an der Stelle \mathbf{r} anwenden, erhalten

$$\iint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = 0 \quad (6.41)$$

und damit mit dem Coulombgesetz

$$E_{\parallel} = E_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} \quad (6.42)$$

Dies bedeutet, dass das radiale \mathbf{E}_r -Feld sich stetig durch die Kugelschale hindurch fortsetzt. Die Komponente \mathbf{E}_{\perp} existiert nur in der Wellenzone. Das \mathbf{E}_{\perp} -Feld ist das gesuchte Feld der elektromagnetischen Feldes, das *Strahlungsfeld*. Seine Grösse ist

$$E_{\perp} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{a_{\perp}}{c^2 \cdot r} \quad (6.43)$$

Vektoriell geschrieben lautet diese Gleichung

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \cdot \frac{\mathbf{a}_{\perp}(t')}{r} \quad t' = t - \frac{r}{c} \quad (6.44)$$

Das elektrische Feld \mathbf{E} an der Stelle \mathbf{r} ist proportional zur senkrechten Komponente der Beschleunigung, aber zur *retardierten Zeit* $t' = t - r/c$. Zum Strahlungsfeld gehört auch ein \mathbf{B} -Feld, das so gerichtet ist, dass \mathbf{E} , \mathbf{B} und \mathbf{r} ein Rechtssystem bilden. \mathbf{r} ist die Ausbreitungsrichtung. Das Magnetfeld ist, in vektorieller Schreibweise,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right) \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (6.45)$$

Wenn wir Δt halbieren, bleibt der äussere Teil der des Strahlungsfeldes konstant, der innere Teil liegt dann in der Mitte der Verbindungslinie durch die Wellenzone. Durch fortgesetzte Anwendung dieses Verfahrens wird die Linearität des elektrischen Feldes in der Wellenzone gezeigt.

Ein Elektron in einem Atom führe in die z -Richtung die harmonische Bewegung

$$z(t') = z_0 \cdot \sin \omega t' \quad (6.46)$$

durchführt. Dabei ist t' die retardierte Zeit. Die Beschleunigung ist

$$a(t') = \ddot{z}(t') = -z_0 \cdot \omega^2 \cdot \sin \omega t' \quad (6.47)$$

Das elektrische Feld ist

$$E(r, \Theta, t) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c^2} \cdot \frac{1}{r} \cdot |a(t')| \sin \Theta = \frac{e z_0 \omega^2}{4\pi\epsilon_0 c^2} \cdot \frac{1}{r} \cdot \sin \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \sin \Theta \quad (6.48)$$

Das Magnetfeld ist

$$B(r, \Theta, t) = \frac{1}{c} E(r, \Theta, t) \quad (6.49)$$

Der Poynting-Vektor oder Energiefluss ist

$$S(r, \Theta, t) = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E^2(r, \Theta, t) \quad (6.50)$$

Mit $\langle \sin^2(\omega t - kr) \rangle_t = 1/2$ wird die Intensität

$$I(r, \Theta) = \langle S(r, \Theta, t) \rangle_t = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \frac{e^2 z_0^2 \omega^4}{(4\pi\epsilon_0 c^2)^2} \frac{\sin^2 \Theta}{2r^2} \quad (6.51)$$

Damit haben wir gezeigt, dass die Annahme eines harmonischen Oszillators das Strahlungsfeld eines Atoms erklären kann. Die abgeführte Energie dämpft dabei den Oszillator. Je stärker die Dämpfung ist, das heisst, je kürzer die Lebensdauer ist, desto breiter wird das Frequenzspektrum sein.

6.5. Zusammenfassung

Maxwellgleichungen im Vakuum Gleichung (6.3)

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E} &= 0 & \text{I} \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & \text{II} \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 & \text{III} \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} & \text{IV} \end{aligned}$$

Wellengleichung für \mathbf{E} Gleichung (6.7)

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -c^2 \Delta \mathbf{E}$$

Wellengleichung für \mathbf{B} Gleichung (6.8)

$$\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = -c^2 \Delta \mathbf{B}$$

Wellenwiderstand eines Zweidrahtsystems Gleichung (6.25)

$$R^* = \frac{1}{\pi} \ln \left(\frac{4a}{d} \right) \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$$

Wellenwiderstand des Vakuums Gleichung (6.26)

$$R_0^* = \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = 377 \Omega$$

Energiefluss im Vakuum, Poynting-Vektor Gleichung (6.33)

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$$

Energiefluss in Materie, Poynting-Vektor Gleichung (6.34)

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$$

Elektrisches Strahlungsfeld eines Atoms Gleichung (6.48)

$$E(r, \Theta, t) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c^2} \cdot \frac{1}{r} \cdot |a(t')| \sin \Theta = \frac{e z_0 \omega^2}{4\pi\epsilon_0 c^2} \cdot \frac{1}{r} \cdot \sin \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \sin \Theta$$

Magnetisches Strahlungsfeld eines Atoms Gleichung (6.49)

$$B(r, \Theta, t) = \frac{1}{c} e(r, \Theta, t)$$

Energiefluss des Strahlungsfeldes eines Atoms Gleichung (6.50)

$$S(r, \Theta, t) = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E^2(r, \Theta, t)$$

Intensität des Strahlungsfeldes eines Atoms Gleichung (6.51)

$$I(r, \Theta) = \langle S(r, \Theta, t) \rangle_t = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \frac{e^2 z_0^2 \omega^4}{(4\pi\epsilon_0 c^2)^2} \frac{\sin^2 \Theta}{2r^2}$$

A. Mathematische Sätze

A.1. Vektoridentitäten

(Siehe Bronstein, Taschenbuch der Mathematik [BSMM00, pp. 190])

Im Folgenden sind \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} und \mathbf{f} Vektoren oder vektorielle Funktionen, a , b , c und f ihre Längen, k eine Zahl und $\varphi(\mathbf{r})$ eine skalare Funktion. Die Komponenten der Vektoren in kartesischen Koordinaten sind

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$

Für die anderen Vektoren werden die Komponenten analog geschrieben.

A.1.1. Produkte mit Vektoren

Skalarprodukt

$$k = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = a b \cos(\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})) \quad (\text{A.1})$$

Vektorprodukt

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} \quad |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = a b \sin(\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})) \quad (\text{A.2})$$

Vertauschung der Reihenfolge (Kommutationsgesetze)

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} \quad (\text{A.3})$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a} \quad (\text{A.4})$$

Zwei Vektoren sind orthogonal, wenn

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \quad (\text{A.5})$$

Sie sind kollinear, wenn

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad (\text{A.6})$$

Doppeltes Vektorprodukt

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c} \quad (\text{A.7})$$

Spatprodukt oder gemischtes Produkt

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} &= (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} \\ &= (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} \\ &= -(\mathbf{b} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{c} \\ &= -(\mathbf{c} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} \\ &= -(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{b} \\ &= a_x b_y c_z + a_y b_z c_x + a_z b_x c_y - (a_z b_y c_x + a_x b_z c_y + a_y b_x c_z) \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Drei Vektoren sind komplanar, wenn

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = 0 \quad (\text{A.9})$$

Lagrangesche Identität

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{f}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{f}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{f})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \quad (\text{A.10})$$

Vierfaches Vektorprodukt

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = ((\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{f}) \mathbf{c} - ((\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}) \mathbf{f} \quad (\text{A.11})$$

A.1.2. Ableiten von Vektoren

Ableiten eines Vektors

$$\frac{d}{dt} \mathbf{a} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{da_x}{dt} \\ \frac{da_y}{dt} \\ \frac{da_z}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{a}_x \\ \dot{a}_y \\ \dot{a}_z \end{pmatrix} \quad (\text{A.12})$$

Ableitung eines Produktes

$$\frac{d}{dt} (\varphi(t) \mathbf{a}(t)) = \frac{d\varphi}{dt} \mathbf{a} + \varphi \frac{d\mathbf{a}}{dt} \quad (\text{A.13})$$

Ableitung des Skalarproduktes

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \frac{d\mathbf{a}}{dt} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \frac{d\mathbf{b}}{dt} \quad (\text{A.14})$$

Ableitung des Vektorproduktes

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \frac{d\mathbf{a}}{dt} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \frac{d\mathbf{b}}{dt} \quad (\text{A.15})$$

Ableitung eines Vektors mit konstantem Betrag. Hier ist $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a^2 = \text{const.}$ Aus Gleichung (A.14) folgt

$$0 = \frac{da^2}{dt} = \frac{d}{dt} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) = \frac{d\mathbf{a}}{dt} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{d\mathbf{a}}{dt} \cdot \mathbf{a} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mathbf{a}}{dt} \perp \mathbf{a} \quad (\text{A.16})$$

Taylorentwicklung einer Vektorfunktion

$$\mathbf{a}(t + \tau) = \mathbf{a}(t) + \tau \left. \frac{d\mathbf{a}}{dt} \right|_t + \frac{\tau^2}{2} \left. \frac{d^2\mathbf{a}}{dt^2} \right|_t + \dots + \frac{\tau^n}{n!} \left. \frac{d^n\mathbf{a}}{dt^n} \right|_t + \dots \quad (\text{A.17})$$

A.1.3. Vektorableitungen bei Skalarfeldern

Ableitung eines skalaren Feldes nach einer Richtung

$$\frac{\partial \varphi(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{c}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varphi(\mathbf{r} + \varepsilon \mathbf{c}) - \varphi(\mathbf{r})}{\varepsilon} \quad (\text{A.18})$$

Ableitung $\frac{\partial \varphi(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{e}_c}$ in Richtung des Einheitsvektors \mathbf{e}_c in Richtung von \mathbf{c}

$$\frac{\partial \varphi(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{c}} = |\mathbf{c}| \frac{\partial \varphi(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{e}_c} \quad (\text{A.19})$$

Richtungsableitung einer skalaren Funktion im Vergleich zur Richtung mit dem stärksten Abfall (Einheitsvektor \mathbf{n})

$$\frac{\partial \varphi(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{e}_c} = \frac{\partial \varphi(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{n}} \cos(\angle \mathbf{e}_c, \mathbf{n}) \quad (\text{A.20})$$

A.1.4. Vektorableitungen bei Vektorfeldern

Ableitung eines Vektorfeldes \mathbf{a} nach einer Richtung

$$\frac{\partial \mathbf{a}(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{c}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathbf{a}(\mathbf{r} + \varepsilon \mathbf{c}) - \mathbf{a}(\mathbf{r})}{\varepsilon} \quad (\text{A.21})$$

Ableitung $\frac{\partial \mathbf{a}(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{e}_c}$ in Richtung des Einheitsvektors \mathbf{e}_c in Richtung von \mathbf{c}

$$\frac{\partial \mathbf{a}(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{c}} = |\mathbf{c}| \frac{\partial \mathbf{a}(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{e}_c} \quad (\text{A.22})$$

Richtungsableitung einer Vektorfunktion

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{a}(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{c}} &= (\mathbf{c} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{a} \\ &= \frac{1}{2} [\mathbf{rot} (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) + \mathbf{grad} (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}) + \mathbf{c} \cdot \mathbf{div} \mathbf{a} \\ &\quad - \mathbf{a} \cdot \mathbf{div} \mathbf{c} - \mathbf{c} \times \mathbf{rot} \mathbf{a} - \mathbf{a} \times \mathbf{rot} \mathbf{c}] \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

Gradient eines Produktes

$$\mathbf{grad} (\varphi_1 \varphi_2) = \varphi_1 \mathbf{grad} \varphi_2 + \varphi_2 \mathbf{grad} \varphi_1 \quad (\text{A.24})$$

Kettenregel beim Gradienten

$$\mathbf{grad} \varphi_1 (\varphi_2) = \frac{d\varphi_1}{d\varphi_2} \mathbf{grad} \varphi_2 \quad (\text{A.25})$$

Gradient eines Skalarproduktes

$$\mathbf{grad} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{a} + \mathbf{a} \times \mathbf{rot} \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathbf{rot} \mathbf{a} \quad (\text{A.26})$$

Gradient eines Skalarproduktes eines konstanten Vektors \mathbf{k} mit einem Ortsvektor \mathbf{r}

$$\mathbf{grad} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{k}) = \mathbf{k} \quad (\text{A.27})$$

Divergenz eines Produktes

$$\mathbf{div} (\varphi \mathbf{a}) = \varphi \mathbf{div} \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{grad} \varphi \quad (\text{A.28})$$

Divergenz eines Skalarproduktes eines konstanten Vektors \mathbf{k} mit einem Ortsvektor \mathbf{r}

$$\mathbf{div} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{k}) = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{k}}{|\mathbf{r}|} \quad (\text{A.29})$$

Divergenz eines Vektorproduktes

$$\mathbf{div} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{b} \quad (\text{A.30})$$

Rotation eines Produktes

$$\mathbf{rot} (\varphi \mathbf{a}) = \varphi \mathbf{rot} \mathbf{a} + \mathbf{grad} \varphi \times \mathbf{a} \quad (\text{A.31})$$

Rotation eines Vektorproduktes

$$\mathbf{rot} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{b} + \mathbf{a} \operatorname{div} \mathbf{b} - \mathbf{b} \operatorname{div} \mathbf{a} \quad (\text{A.32})$$

Rotation eines Potentialfeldes

$$\mathbf{rot} (\mathbf{grad} \varphi) = \mathbf{0} \quad \forall \varphi \quad (\text{A.33})$$

Divergenz einer Rotation

$$\operatorname{div} (\mathbf{rot} \mathbf{a}) = 0 \quad \forall \mathbf{a} \quad (\text{A.34})$$

Rotation einer Rotation

$$\mathbf{rot} (\mathbf{rot} \mathbf{a}) = \mathbf{grad} (\operatorname{div} \mathbf{a}) - \operatorname{div} (\mathbf{grad} \mathbf{a}) \quad (\text{A.35})$$

A.1.5. Totale Ableitung bei mitgeführten Koordinatensystemen

Wenn $\mathbf{v} = \frac{d}{dt} \mathbf{r}$ ein konstanter Geschwindigkeitsvektor ist und diese Grösse an einem mit der Geschwindigkeit \mathbf{v} bewegten Ort beobachtet wird, dann gilt (Siehe Jackson[[Jac75](#), p212]):

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \quad (\text{A.36})$$

wobei $\frac{d}{dt}$ die totale Ableitung im raumfesten Koordinatensystem und $\frac{\partial}{\partial t}$ die lokale, mitgeführte Ableitung ist. Mit Gleichung (A.32) kann man schreiben

$$\begin{aligned} \mathbf{rot} (\mathbf{B} \times \mathbf{v}) &= (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v} + \mathbf{B} \operatorname{div} \mathbf{v} - \mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{B} \\ \nabla \times (\mathbf{B} \times \mathbf{v}) &= (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \mathbf{B} \nabla \cdot \mathbf{v} - \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{B} \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

oder

$$\begin{aligned} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{B} &= \mathbf{rot} (\mathbf{B} \times \mathbf{v}) + (\mathbf{B} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v} - \mathbf{B} \operatorname{div} \mathbf{v} + \mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{B} \\ (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{B} &= \nabla \times (\mathbf{B} \times \mathbf{v}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \mathbf{B} \nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{B} \end{aligned} \quad (\text{A.38})$$

Nun ist $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$. Weiter ist $\operatorname{div} \left(\frac{d}{dt} \mathbf{v} \right) = \frac{d}{dt} \operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{d}{dt} (3) = 0$ und $\mathbf{grad} \mathbf{v} = \frac{d}{dt} \mathbf{grad} \mathbf{r} = \frac{d}{dt} \mathbf{E} = 0$, wobei \mathbf{E} die 3 mal 3 Einheits-Diagonalmatrix ist. Damit haben wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit

$$\begin{aligned} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{B} &= \mathbf{rot} (\mathbf{B} \times \mathbf{v}) \\ (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{B} &= \nabla \times (\mathbf{B} \times \mathbf{v}) \end{aligned} \quad (\text{A.39})$$

und

$$\frac{d}{dt} \mathbf{B} = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{B} = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} + \nabla \times (\mathbf{B} \times \mathbf{v}) \quad (\text{A.40})$$

A.2. Satz von Gauss

Der *Satz von K. F. Gauss (1777-1855)* verknüpft ein Volumenintegral mit einem Oberflächenintegral.

Gegeben seien

- eine vektorielle Ortsfunktion $\mathbf{v}(\mathbf{r})$
- eine geschlossene Fläche S , die das Volumen $V(S)$ umschließt.

$$\int_{V(S)} \operatorname{div} \mathbf{v} dV = \int_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{a} = \int_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} da \quad (\text{A.41})$$

Man kann auch schreiben $\operatorname{div} \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v}$, wobei $\nabla = (\partial/\partial x; \partial/\partial y; \partial/\partial z)$ der *Nabla-Operator* ist.

A.3. Satz von Green

Der *Satz von G. Green (1793-1841)* verknüpft ein Volumenintegral mit einem Oberflächenintegral.

Gegeben seien

- eine skalare Ortsfunktion $\Psi(\mathbf{r})$
- eine geschlossene Fläche S , die das Volumen $V(S)$ umschließt.

$$\int_{V(S)} \Delta \Psi dV = \int_S \operatorname{grad} \Psi da = \int_S \operatorname{grad} \Psi \mathbf{n} da \quad (\text{A.42})$$

Man kann auch schreiben $\operatorname{grad} \Psi = \nabla \Psi$, wobei $\nabla = (\partial/\partial x; \partial/\partial y; \partial/\partial z)$ der *Nabla-Operator* ist.

A.4. Satz von Stokes

Der *Satz von G. G. Stokes (1819-1903)* verknüpft ein Oberflächenintegral mit einem Linienintegral.

Gegeben seien

- eine vektorielle Ortsfunktion $\mathbf{v}(\mathbf{r})$
- eine geschlossener Weg s , der die Oberfläche $a(s)$ umrandet.

$$\int_{a(s)} \operatorname{rot} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{a} = \int_{a(s)} \operatorname{rot} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} da = \oint_s \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} \quad (\text{A.43})$$

Man kann auch schreiben $\operatorname{rot} \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v}$, wobei $\nabla = (\partial/\partial x; \partial/\partial y; \partial/\partial z)$ der *Nabla-Operator* ist.

Dabei wird jedes Flächenelement so umlaufen, dass die entsprechende Normale \mathbf{n} der Bewegung einer Rechtsschraube entspricht.

B. Berechnung elektrischer Felder

B.1. In der Nähe eines Leiterstückes

Entlang der x -Achse von $x = 0$ bis $x = \ell$ sei die *Ladung* Q homogen verteilt. Zu berechnen ist das elektrische Feld für einen Punkt $P = (\xi; 0; 0)$ auf der x -Achse! Die Linienladungsdichte ist

$$\lambda = \frac{Q}{\ell}$$

Das elektrische Feld bei P ist

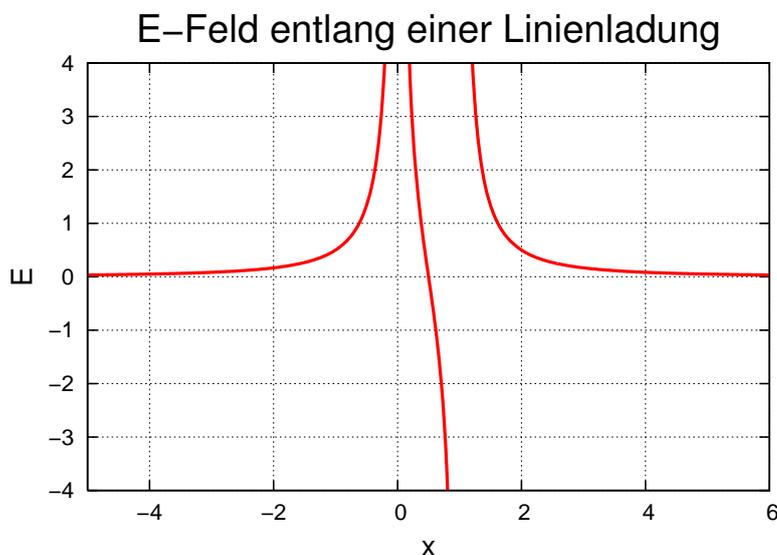
$$dE_x(x, \xi) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda(x - \xi) d\xi}{|x - \xi|^3}$$

Wir integrieren über die Länge des Drahtes

$$E_x(\xi) = \int_0^{\ell} dE_x(x, \xi) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \cdot \begin{cases} \int_0^{\ell} \frac{d\xi}{(x - \xi)^2}, & \text{für } x > \ell \text{ oder } x < 0; \\ \int_0^x \frac{d\xi}{(x - \xi)^2} - \int_x^{\ell} \frac{d\xi}{(x - \xi)^2}, & \text{für } 0 < x < \ell. \end{cases}$$

Die Lösung dieser Gleichung ist

$$E_x(x) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 x(x - \ell)} \begin{cases} \frac{\lambda\ell}{4\pi\epsilon_0 x(x - \ell)}, & \text{für } x > \ell \text{ oder } x < 0; \\ \frac{\lambda(2x - \ell)}{4\pi\epsilon_0 x(x - \ell)}, & \text{für } 0 < x < \ell. \end{cases}$$



Elektrisches Feld entlang einer Linienladung.

Wir berechnen nun das elektrische Feld entlang der Mittelsenkrechten einer Linienladung der Länge ℓ . Zur Berechnung legen wir das Koordinatensystem so, dass die Ladungsverteilung von $-\frac{\ell}{2}$ bis $\frac{\ell}{2}$ reicht. Aus Symmetriegründen existiert auf der Mittelsenkrechten keine Komponente in x -Richtung. Wir betrachten also die Komponente entlang y . Am Punkt $P = (0; y; 0)$ ist

$$dE_y(y) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} y$$

Ebenso ist

$$E_y(y) = \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{y}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} dx = \frac{\lambda y}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} \frac{dx}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Nach Bronstein[BSMM00] ist

$$\int \frac{dx}{X^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{a^2\sqrt{X}}$$

mit $X = x^2 + a^2$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} E_y(y) &= \frac{\lambda y}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{x}{y^2\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \Big|_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 y} \left(\frac{\ell}{2\sqrt{\frac{\ell^2}{4} + y^2}} + \frac{\ell}{2\sqrt{\frac{\ell^2}{4} + y^2}} \right) \\ &= \frac{\lambda\ell}{4\pi\epsilon_0 y} \frac{1}{\sqrt{y^2 + \frac{\ell^2}{4}}} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{y\sqrt{y^2 + \frac{\ell^2}{4}}} \end{aligned}$$

Für $y \gg \ell$ bekommt man

$$E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda\ell}{y^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 y^2}$$

Für $y \ll -\ell$ bekommt man

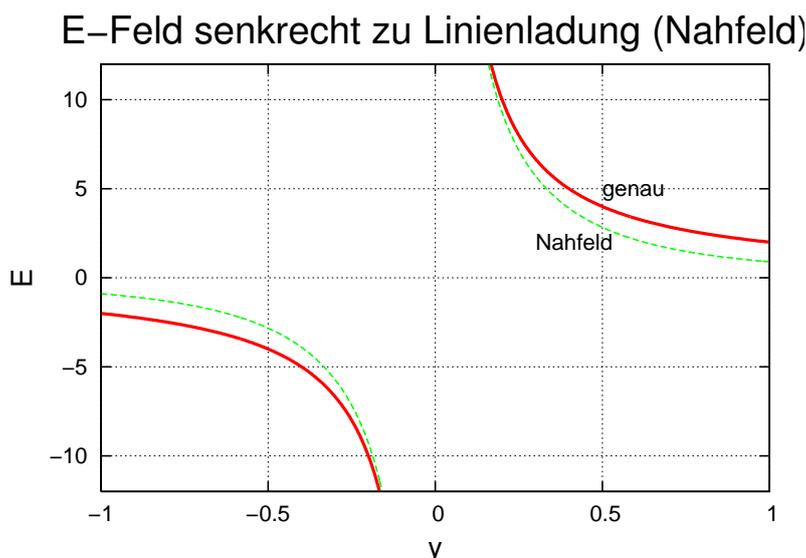
$$E_y = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda\ell}{y^2} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 y^2}$$

Wenn die Linienladung "unendlich" ausgedehnt ist, gilt

$$y \ll \ell$$

Dann ist

$$E_y \approx \frac{\lambda\ell}{4\pi\epsilon_0 y} \frac{1}{\sqrt{\frac{\ell^2}{4}}} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 |y|} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 \ell |y|}$$



Elektrisches Feld senkrecht zu einer Linienladung.

B.2. Auf der Symmetrieachse einer Kreisscheibe

Zur Berechnung setzen wir die Flächenladungsdichte auf

$$\sigma = \frac{g}{\pi r^2}$$

Das elektrische Feld auf der Symmetrieachse kann nur parallel zu dieser sein. Wir setzen also an

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma \hat{r} d\hat{r} d\varphi}{(\hat{r}^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} x$$

Also ist

$$E_x = \int_0^{2\pi} \int_0^r \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma \hat{r} x d\hat{r} d\varphi}{(\hat{r}^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sigma x}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^r \frac{\hat{r} d\hat{r} d\varphi}{(\hat{r}^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \int_0^r \frac{\hat{r} d\hat{r}}{(\hat{r}^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Nach Bronstein ist

$$\int \frac{r dr}{\sqrt{(r^2 + x^2)^3}} = -\frac{1}{\sqrt{r^2 + x^2}}$$

Also ist

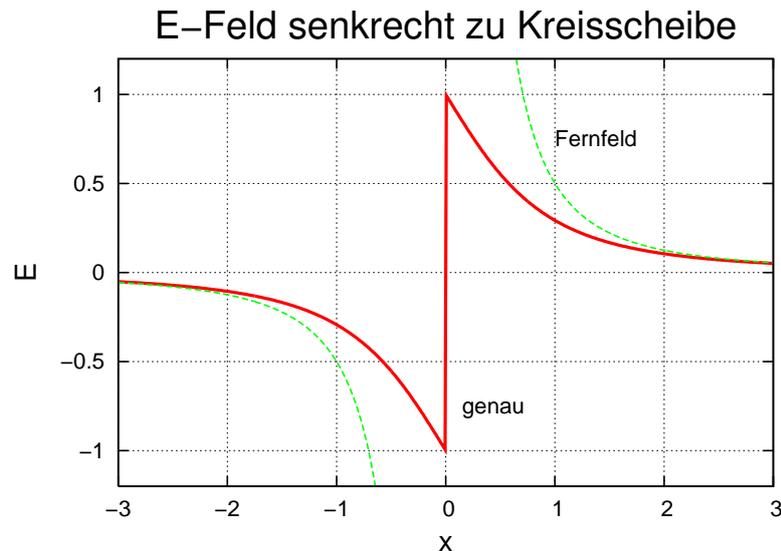
$$\begin{aligned} E_x &= \frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \left(-\frac{1}{\sqrt{\hat{r}^2 + x^2}} \right) \Big|_0^r \\ &= \frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \left(-\frac{1}{\sqrt{r^2 + x^2}} + \frac{1}{|x|} \right) \\ &= -\frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \cdot \frac{|x| - \sqrt{r^2 + x^2}}{|x|\sqrt{r^2 + x^2}} \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cdot \frac{x}{|x|} \cdot \frac{\sqrt{r^2 + x^2} - |x|}{\sqrt{r^2 + x^2}} \end{aligned}$$

Für $|x| \gg r$ ist

$$\sqrt{r^2 + |x|^2} - |x| = |x| \left(\sqrt{1 + \frac{r^2}{x^2}} \right) - |x| = |x| \left(1 + \frac{r^2}{2x^2} \right) - |x| = \frac{r^2}{2x^2}$$

und damit

$$E_x = \frac{\sigma}{4\epsilon_0} \frac{r^2}{x^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 x^2}$$



E-Feld einer homogen geladenen Kreisscheibe entlang einer Senkrechten durch den Mittelpunkt.

B.3. Innerhalb und ausserhalb einer geladenen Zylinderfläche

Der Zylindermantel habe den Radius R , die Flächenladungsdichte sei σ . Wir betrachten eine Zylinderfläche koaxial zur geladenen Fläche mit dem Radius $r < R$. Das \mathbf{E} -Feld ist aus Symmetriegründen radial symmetrisch. Der Fluss durch die Fläche ist:

$$\phi = \int_{\text{Fläche}} E_n dA = E_r \int_{\text{Fläche}} dA = E_r \cdot 2\pi r \ell = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Da keine *Ladung* umschlossen wird, ist

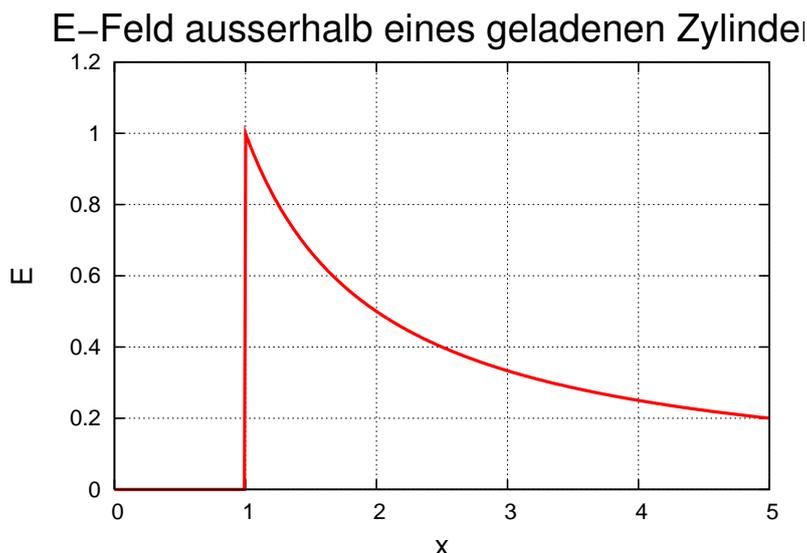
$$E_r = 0, \quad r < R$$

Für $r > R$ gilt

$$E_r \cdot 2\pi r \ell = \frac{\sigma \cdot 2\pi R \ell}{\epsilon_0}$$

oder

$$E_r = \frac{\sigma R}{\epsilon_0 r}$$



Ladung senkrecht zu einem Kreiszyylinder.

B.4. In allen Bereichen zweier koaxialer zylinderförmiger Leiter

Nach Abschnitt B.3 ist $E_r = \frac{\sigma R}{\epsilon_0 r}$ wenn die Ladungsdichte σ auf der Zylinderschale mit $R < r$ aufgebracht ist. Wir betrachten zwei konzentrische Zylinder mit den Radien $R_1 < R_2$ und deren Oberflächenladungsdichten σ_1 und σ_2 . Für $r < R_1$ gilt

$$E_r = 0 \text{ für } r < R_1$$

Für $R_1 < r < R_2$ existiert allein das Feld des inneren Kreiszyllinders. Also ist dort:

$$E_r = \frac{\sigma_1 R_1}{\epsilon_0 r} \text{ für } R_1 < r < R_2$$

Schliesslich ist für $r > R_2$:

$$E_r = \frac{\sigma_1 R_1}{\epsilon_0 r} + \frac{\sigma_2 R_2}{\epsilon_0 r} = \frac{\sigma_1 R_1 + \sigma_2 R_2}{\epsilon_0 r} \text{ für } r > R_2$$

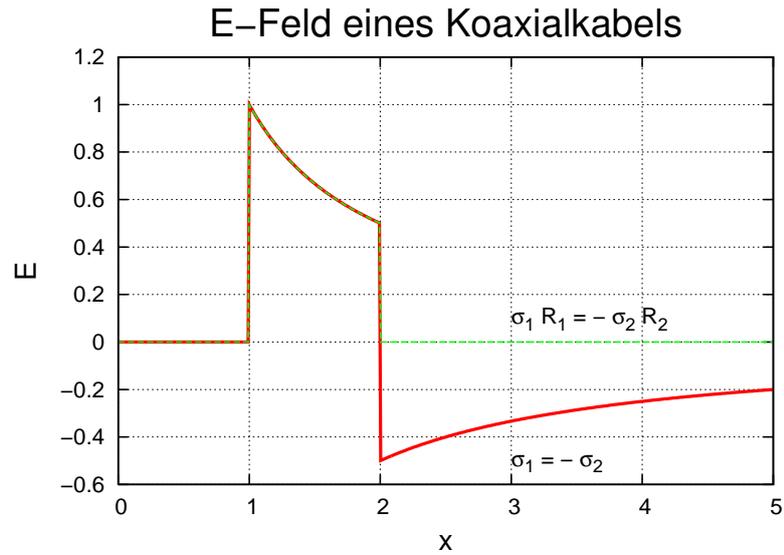
wobei hier die Additivität elektrischer Felder benutzt wurde. Wenn für $r > R_2$ $E_r = 0$ sein soll, muss gelten

$$\sigma_1 R_1 + \sigma_2 R_2 = 0$$

oder

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = -\frac{R_2}{R_1}$$

.



Elektrische Felder bei einem Koaxialkabel, wobei einmal (dünne Linie) die Oberflächenladungsdichten σ_i vom Betrage nach gleich und einmal (dicke Linie) die Produkte $R_i \cdot \sigma_i$ dem Betrage nach gleich sind.

Literaturverzeichnis

- [AF00] Marcelo Alonso and Edward J. Finn. *Physik*. JR. Oldenbourg Verlag, 3. durchgesehene Auflage edition, 2000.
- [BSMM00] I.N. Bronštein, K.A. Semendjajew, G. Musiol, and H. Mühlig. *Taschenbuch der Mathematik*. Verlag Harri Deutsch, 2000.
- [Dör01] Andreas Döring. *Rasterkraftmikroskopische Untersuchungen an Haftklebstoffen*. Phd thesis, University of Ulm, 2001. Seite 61.
- [GV95] Ch. Gerthsen and H. Vogel. *Physik*. Springer Verlag, 18. Auflage edition, 1995.
- [HRW03] David Halliday, Robert Resnick, and Jearl Walker. *Physik*. Wiley-VCH GmbH, 2003.
- [Jac75] J. D. Jackson. *Classical electrodynamics*. Wiley, 2nd edition, 1975.
- [Kän78] Werner Känzig. *Physik 2: Elektrizität und Magnetismus*. Verlag der Fachvereine Zürich, 1978.
- [Kne74] F. Kneubühl. *Repetitorium der Physik*. Teubner Verlag, 1974.
- [Lei98] Hans Jörg Leisi. *Klassische Physik*, volume 2. Birkhäuser, 1998.
- [Som78] A. Sommerfeld. *Theoretische Physik III, Elektrodynamik*. Verlag Harri Deutsch, 1978.
- [Tip94] Paul A. Tipler. *Physik*. Spektrum Verlag, 1994.

Index

- Übersetzungsfaktor, 116
- Ableitung
 - mitgeführt, 168
- Ampèresches Durchflutungsgesetz, 92–95
- Ampèresches Gesetz, 97
- Atom, 55
- atomare Polarisierbarkeit, 55
- B**-Feld
 - Eigenschaften, 87–98
- Barlowsches Rad, 91
- Betatron, 125–127
- Bezugssystem, 82
- Bildladung, 39–40
- Biot-Savart
 - Gesetz, 89, 98
 - Kraft, 90
- Biot-Savart-Kraft, 130
- Bohrsches Magneton, 138
- Boltzmannstatistik, 139
- Cavendish, 25
- Clausius, 59–60
- Coulomb
 - Gesetz, 26, 63
- Coulombsches Gesetz, 24–26
- Curie-Gesetz, 139, 140
- Curie-Konstante, 140
- D** dielektrische Verschiebung, 31
- Diamagnetismus, 130, 134–136
- Dielektrika, 56–61
- dielektrische Suszeptibilität, 66
- Dielektrische Verschiebung, 31
- dielektrische Verschiebung, 64
 - Stetigkeit, 58, 66
- Dielektrizitätskonstante, 63
- Dielektrizitätskonstante des Vakuums, 25
- Dielektrizitätszahl, 59
- Dipol, 32–33
- Dipolmoment, 32
 - induziert, 55, 66
- Divergenz, 32
- Domäne
 - ferromagnetisch, 142
- Doppelleitersystem, 155–158
- Drehmoment, 91
- Drehspulinstrument, 91
- Driftgeschwindigkeit, 67
- E.M.K., 158
- Eichung, 98
- Elektrische Eigenschaften
 - materie, 54–63
- elektrische Felder von Leitern, 33–40
- Elektrische Feldlinien, 63
- Elektrische Ladung, 24–26
- Elektrische Ströme, 67–106
- elektrischer Fluss, 64
- elektrisches Potential, 64
- Elektrisches Feld, 26–30, 63
 - Energie, 52–54
- elektrisches Feld
 - Energiedichte, 53, 65
 - Stetigkeit, 58, 66
- elektrisches Potential, 42
- Elektrodynamik
 - Kraftgesetz, 89
- Elektromagnetische Wellen, 153–164
- elektromagnetische Wellen, 154
- Elektromotor, 122–125
- Elektromotorische Kraft, 77–78
- elektromotorische Kraft, 78
- Elektron, 137
- Elektronen, 87
- Elektronenhülle, 55
- Elektrostatik, 23–66, 97
- elektrostatisches Potential, 64

- kontinuierliche Ladungsverteilung, 65
- Elektrostatisches Potential, 40–47
- EMK, 77–78, 111, 112, 117
- Energie
 - elektrisches Feld, 52–54
 - Magnetfeld, 128–129
 - potentiell, 64
- Energiedichte des elektrischen Feldes, 53, 65
- Energiefluss, 159–160
- ϵ_0 , 63
- ϵ_0 Dielektrizitätskonstante des Vakuums, 25, 63
- Faraday
 - Induktionsgesetz
 - differentiell, 111–112
 - integral, 111–112
 - Michael, 28
- Faradaysches Induktionsgesetz, 107–128
- Feld
 - elektrisch, 26–30, 63
- Feldlinien, 28
 - elektrisch, 63
- Feldstärke
 - magnetisch, 87
- Ferromagnet, 141
- Ferromagnetismus, 130, 140–143
- Fluss, 69
 - elektrisch, 64
 - magnetisch, 108–111
- Fluss des Vektorfeldes, 31
- Formel von Laplace, 98
- Funkeninduktor, 114
- Galilei-Transformation, 154
- Gauss
 - Gesetz, 58
- Gauss, K.F., 169
- Gauss'sches Gesetz, 30–32, 64
- Gegeninduktivitäten, 115
- Gesetz
 - Clausius und Mosotti, 59–60
 - Clausius-Mosotti, 60
 - Coulomb, 24–26, 63
 - Gauss, 30–32, 58, 64
 - Kirchhoff, 117–118
 - Ohm, 72–76
 - Gesetz von Biot-Savart, 98
 - Gleichung
 - Poisson, 65
 - Gleichungen
 - Maxwell, 147–151
 - Green, G., 169
 - Hall-Effekt, 99–100
 - Hallspannung, 99
 - Helmholtzspulen, 87
 - Hysterese, 143
 - i Stromdichte, 70
 - Impedanzen, 118–122
 - Induktion, 107
 - magnetisch, 87
 - Induktionsgesetz, 128
 - Faraday, 107–128
 - differentiell, 111–112
 - itegral, 111–112
 - universell, 112
 - Induktionskonstante, 88
 - Induktivität
 - Selbst-, 114
 - Inertialsystem, 83
 - Influenz, 39–40
 - Influenzladung, 39
 - Inhomogenes Magnetfeld, 130–131
 - Joulesche Wärme, 77–78
 - Kapazität, 48–52, 65
 - Kirchhoffsche Gesetze, 117–118
 - Klebestreifen, 37
 - Knotenregel, 117
 - Kondensator
 - Reihenschaltung, 52
 - Kondensatoren, 51
 - Parallelschaltung, 51
 - Kontinuitätsgleichung, 68–72
 - Kraft, 25
 - Biot
 - Savart, 90
 - Kraftgesetz der Elektrodynamik, 89
 - Ladung, 23–30, 32–35, 37–40, 42–44, 48–50, 52–54, 56, 57, 59, 61, 63, 64, 67, 68, 73, 77, 78, 82–89, 91, 101, 103, 104, 135, 141,

- 147, 157, 158, 160–162, 171, 174, 175
- elektrisch, 24–26
- magnetisch, 97
- Proton, 83
- Ladungsdichte, 36
- Ladungserhaltung, 70, 84
- Ladungsinvarianz, 84
 - relativistisch, 84
- Ladungsmenge, 68
- Ladungsträger, 67–69, 74
- Ladungstransport, 67
- Ladungsverteilung
 - kontinuierlich, 64
- Langevin-Funktion, 139
- Laplace
 - Formel, 98
- Larmor
 - Satz, 131–134
- Larmorfrequenz, 134
- Larmorwinkelgeschwindigkeit, 133
- Lecher-Leitung, 155
- Leiter, 64
 - elektrische Felder, 33–40
- Leiterschleife
 - bewegt(, 107
 - bewegt), 108
- Leitfähigkeit, 72
- Lenzsche Regel, 109, 110
- Lichtenberg, G.C. 1742–1799, 24
- Lorentz-Beziehung, 60, 66
- Lorentz-Kraft, 87
- Lorentz-Transformation, 87, 154
 - \mathbf{B} , 100–103
 - \mathbf{E} , 100–103
 - EMK, 111
- Lorentzkraft, 81–82, 100, 110
- Magnetfeld, 81–82
 - Eigenschaften, 87–98
 - Energie(, 128
 - Energie), 129
 - inhomogen, 130–131
 - Quellenfreiheit, 95–97
 - zeitlich veränderlich, 107–143
- Magnetische Eigenschaften der Materie, 129–143
- magnetische Feldstärke, 87
- magnetische Induktion, 87
- Magnetische Kraft
 - Berechnung, 82–87
- magnetischer Fluss, 108–111
- Magnetisches Moment, 91, 137–138
- Magnetisierung, 136–137
- Maschenregel, 117
- Materie
 - elektrische Eigenschaften, 54–63
 - magnetische Eigenschaften, 129–143
 - Magnetisierung, 136–137
- Maxwell
 - Gleichungen, 147–151
- Maxwell, James Clerk, 147
- Maxwellsche Gleichungen, 147–151
- Maxwellsche Verschiebungsstromdichte, 148
- Maxwellspannung, 53, 65
- Millikan, 26
- Moment
 - magnetisch, 91, 137–138
- Mosotti, 59–60
- Motor, 91
- grad** Nabla-Operator, 169
- Nabla-Operator, 169
- Oberflächenladungsdichte, 53
- Ohmscher Leiter, 72
- Ohmsches Gesetz, 72–76
- Optik, 154
- Orientierungspolarisation, 57
- \mathbf{p} Dipolmoment, 32
- Parallelschaltung, 51
 - Kondensatoren, 51, 65
- Paramagnetismus, 130, 138–140
- Φ Fluss, 31
- φ Potential, 42
- Poisson-Gleichung, 47–48, 65
- Poissongleichung, 48
- Polarisation, 59
- Polarisierbarkeit, 59
 - atomar, 55
- Potential
 - elektrostatistisch, 40–47, 64
 - kontinuierlich, 65
 - Stetigkeit, 58, 66
- potentielle Energie, 64

- Poynting-Vektor, 159–160
 Punktladung, 25
 Quantenmechanik, 98
 Quellen, 32
 Quellenfreiheit des Magnetfeldes, 95–97
 RC-Stromkreise, 79–81
 Rechte-Hand-Regel, 109, 110
 Regel
 Lenz, 109
 Reihenschaltung, 52
 Kondensatoren, 52, 65
 Relativitätstheorie, 161
 Relativitätstheorie, 82, 98
 retardierte Zeit, 163
 ρ_{el} elektrische Ladungsdichte, 27
 Satz von Gauss, 169
 Satz von Green, 169
 Satz von Larmor, 131–134
 Satz von Stokes, 169
 Schwingkreis, 121
 Selbstinduktion, 110
 Selbstinduktivität, 114, 115
 Serienschaltung, 52
 SI-System, 89
 Skin-Effekt, 127–128
 Spannung, 42, 64
 Spiegelsymmetrie, 36
 Spin, 137
 Elektron, 137–138
 Spule, 109
 Stehende Wellen, 159
 Stetigkeit, 57–58
 dielektrische Verschiebung, 58, 66
 elektrisches Feld, 58, 66
 Potential, 58, 66
 Stokes, G. G., 169
 Strahlungsfeld, 163
 Strom, 67–106
 Stromdichte, 69, 70
 Stromdichtefeld, 69
 Stromkreise, 79–81
 Stromverteilung
 Magnetfeld, 97–98
 Suszeptibilität
 dielektrisch, 66
 Symmetrieüberlegungen, 36
 Transformator, 113–117
 Translationsinvarianz, 36
 Vakuum, 153, 154
 van de Graaff-Generator, 77
 Vektorfeld
 Stromdichte, 70
 Vektorpotential, 97, 98, 105
 Verschiebung
 dielektrisch, 31
 Verschiebungspolarisation, 57
 Verschiebungsstrom, 107
 Vierervektor, 86
 Weber, 109
 Wechselstromkreise, 118–122
 Wellen
 Doppelleiter, 155–158
 elektromagnetisch, 153–164
 Raum, 160–163
 stehend, 159
 Wellengleichung, 153–154
 Vakuum, 153–154
 Wellenwiderstand, 158
 Wideroe-Bedingung, 127
 Wirbelstrom, 113
 zeitlich veränderliche Magnetfelder, 107–143