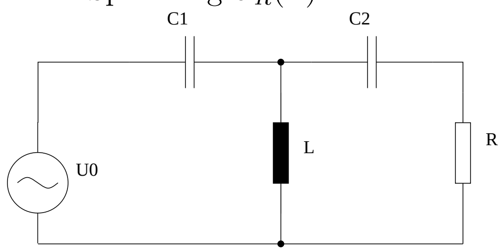
Übungsblatt 07
PHYS3100 Grundkurs IIIb (Physik, Wirtschaftsphysik, Physik Lehramt)

Othmar Marti, (othmar.marti@physik.uni-ulm.de)

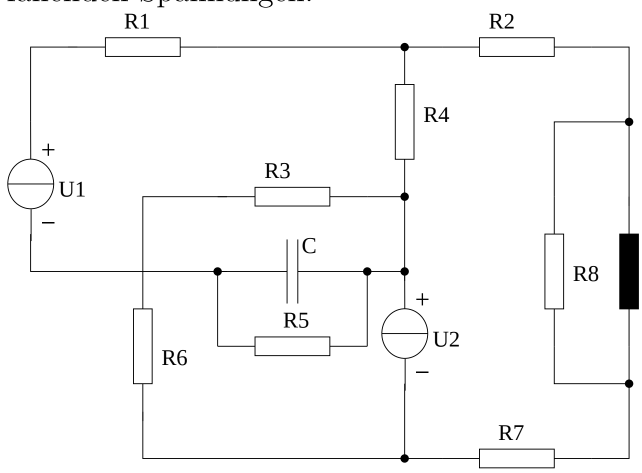
2. 2. 2004 oder 9. 2. 2004

1 Aufgaben

1. Berechnen Sie für die unten stehende Schaltung die am Widerstand abfallende Spannung $U_R(\omega)$.



2. Berechnen Sie für die unten stehende Schaltung die an allen Bauteilen abfallenden Spannungen.



3. Eine Kompassnadel habe die Länge $3cm$, den Radius $0.85cm$ und die Dichte $7.96g/cm^3$. Sie kann horizontal frei rotieren, und die horizontale Kompo-

nente des Magnetfeldes betrage 0.6 *Gauss*. Bei kleiner Auslenkung ergebe sich eine harmonische Schwingung um den Mittelpunkt mit $\nu = 1.4Hz$.

(a) Wie gross ist das magnetische Dipolmoment der Nadel?

(b) Wie gross ist die Magnetisierung M

(c) Wie gross ist der Ampèresche Strom an der Oberfläche der Nadel?

4. Ein Eisenstab mit der Länge $1.4m$ und dem Durchmesser $2cm$ habe die homogene Magnetisierung $M = 1.72 \cdot 10^6 A/m$, die entlang des Stabes ausgerichtet sei. Der Stab sei an einem dünnen Faden aufgehängt und befinde sich in der Mitte (koaxial) einer langen Spule in Ruhe. Durch die Spule werde kurzzeitig ein Strom geschickt, durch dessen Magnetfeld der Stab plötzlich entmagnetisiert werde. Wie gross ist die Winkelgeschwindigkeit des Stabes unter der Annahme, dass sein Drehimpuls erhalten bleibe? Nehmen Sie an, dass $\vec{m}_m = q\vec{L}/(2m)$ gelte, wobei m die Masse des Elektrons und $q = -e$ dessen Ladung ist. Der Effekt, der dieser Aufgabe zugrunde liegt, ist der **Einstein-De Haas-Effekt**.

5. Zwei Punktladungen q_1 und q_2 sind an der Peripherie einer mit der Winkelgeschwindigkeit ω um die z-Achse rotierenden Scheibe vom Radius a diametral gegenüber befestigt. Es ist $\omega \cdot a \ll c$ und $q_1 = -q_2$. Es ist $x(t) = a\cos(\omega t)$ und $y(t) = a\sin(\omega t)$.

   (a) Berechnen Sie das Strahlungsfeld an einem Punkt $P(y)$ auf der (raumfesten) y-Achse, wobei $y \gg a$ ist.

   (b) Geben Sie eine Skizze der Felder aus der Aufgabe 5a) an.

   (c) Berechnen Sie das Strahlungsfeld an einem Punkt $Q(z)$ auf der (raumfesten) z-Achse, wobei $z \gg a$ ist.

   (d) Geben Sie eine Skizze der Felder aus der Aufgabe 5c) an.

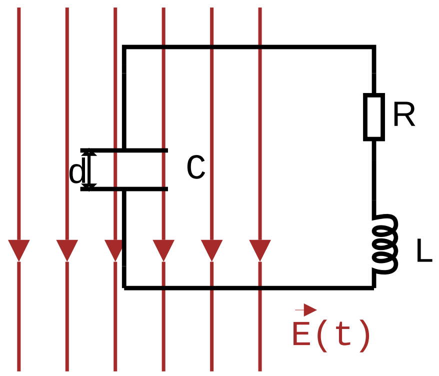
   (e) Berechnen Sie die Felder für die Anordnung aus der Aufgaben 5a), wenn $q_1 = q_2$ ist.

   (f) Berechnen Sie die Felder für die Anordnung aus der Aufgaben 5c), wenn $q_1 = q_2$ ist.

6. Ein Schwingkreis wird als empfindliches Nachweissystem eines zeitlich harmonischen $\vec{E}$-Feldes verwendet. Ein Plattenkondensator (Plattenabstand d, Kapazität C) befindet sich im räumlich homogenen $\vec{E}$-Feld

$$\vec{E}(t) = \vec{E}_0 \cdot \sin(\omega t)$$

wobei $\vec{E}_0$ senkrecht zur Fläche des Plattenkondensators orientiert ist. Eine Spule (Selbstinduktion L) und ein Ohmscher Widerstand R, beide ausserhalb des elektrischen Feldes, ergänzen den Plattenkondensator zu einem Schwingkreis.



(a) Stellen Sie die Differentialgleichung für die im Schwingkreis bewegte Ladung Q ohne äusseres Feld auf.

(b) Modifizieren Sie diese Differentialgleichung so, dass das äussere Feld als EMK wirkt. Schreiben Sie dazu das anregende Feld $E(t) = E_0 \sin(\omega t)$ als komplexe Funktion, aber so, dass der Realteil dieser Funktion gerade der gegebenen reellen Anregung entspricht.

(c) Wandeln Sie die Differentialgleichung in eine Differentialgleichung für den Strom $I(t)$ um.

(d) Berechnen Sie für die Frequenz ω der Anregung den komplexen Strom $I(t,\omega) = I_0(\omega)e^{i\omega t}$.

(e) Zwischenrechnung: Wenn der Strom $I(t) = I_0 e^{i\omega t}$ ist (ohne einsetzen), und dieser Strom durch den Widerstand R fliesst, was ist dann die über eine Anzahl $n \in \mathbb{N}$ gemittelte thermische Leistung an R?

(f) Berechnen Sie die zeitlich gemittelte Leistung $P(\omega)$, die als Joulsche Wärme im Widerstand R deponiert wird.

(g) Wie gross ist die unbedämpfte Resonanzfrequenz ω_0 des Schwingkreises?

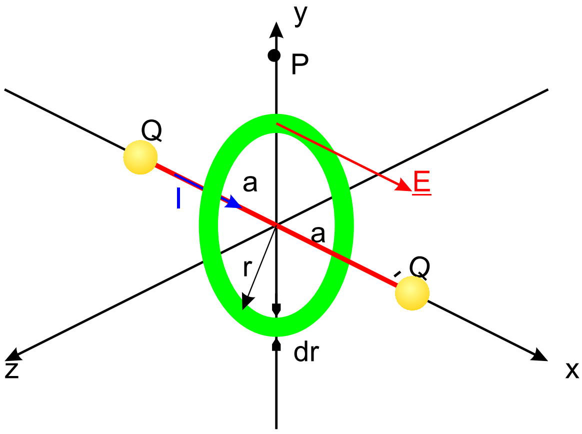
(h) Wie gross ist $P(\omega_0)$?

(i) Bestimmen Sie das $\vec{E}$-Feld im Inneren des Plattenkondensators für ein stationäres äusseres $\vec{E}$-Feld E_0.

7. Es soll gezeigt werden, dass die allgemeine Formulierung des Ampèreschen Gesetzes

$$\oint\limits_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 d\phi_e/dt = \mu_0 \iint\limits_{A(S)} (\vec{i} + \epsilon_0 d\vec{E}/dt) d\vec{a}$$

und das Gesetz von Biot-Savart zum gleichen Ergebnis kommen, wenn beide auf



angewandt werden.

Zwei Ladungen $+Q$ und $-Q$ befinden sich im Abstand a vom Nullpunkt auf der x-Achse bei $x = -a$ und $x = a$. Entlang der Verbindungslinie fliesst ein Strom $I = -dQ/dt$. Der Punkt P befindet sich auf der y-Achse im Abstand R.

(a) Zeigen Sie unter Verwendung des Gesetzes von Biot-Savart, dass das Magnetfeld am Punkt P durch

$$B = \frac{\mu_0 I a}{2\pi R\sqrt{R^2 + a^2}}$$

(b) Ein kreisförmiger Streifen (Mittelpunkt im Ursprung) mit dem Radius r und der Breite dr liege in der $y-z$-Ebene. Zeigen Sie, dass der Fluss des elektrischen Feldes durch diesen Streifen durch

$$E_x dA = (Q/\epsilon_0)a(r^2 + a^2)^{-3/2} r dr$$

gegeben ist.

(c) Berechnen Sie mit dem Ergebnis aus 7b den gesamten Fluss ϕ_e durch die kreisförmige Ebene mit dem Radius R. Es ergibt sich

$$\epsilon_0 \phi_e = Q(1 - a/\sqrt{a^2 + R^2})$$

(d) Berechnen Sie den Verschiebungsstrom I_V und zeigen Sie, dass

$$I + I_V = I\frac{a}{\sqrt{a^2 + R^2}}$$

(e) Berechnen Sie mit dem Ampèreschen Gesetz die Aufgabe 7a und zeigen Sie, dass man für B das gleiche Ergebnis erhält.

2 Lösungen

1. Maschenregel rechts (Vorzeichen)

$$I_{C_2} \cdot (R + X_{C_2}) = I_L \cdot X_L$$

Maschenregel links

$$U_0 = I_{C_1} \cdot X_{C_1} + I_L \cdot X_L$$

Knotenregel

$$I_{C_1} = I_{C_2} + I_L$$

Aus der ersten Gleichung

$$I_L = I_{C_2} \frac{R + X_{C_2}}{X_L}$$

und

$$U_0 = I_{C_1} \cdot X_{C_1} + I_{C_2} \frac{R + X_{C_2}}{X_L} \cdot X_L = I_{C_1} \cdot X_{C_1} + I_{C_2} \left(R + X_{C_2}\right)$$

$$I_{C_1} = I_{C_2} + I_{C_2} \frac{R + X_{C_2}}{X_L} = I_{C_2} \left[1 + \frac{R + X_{C_2}}{X_L}\right]$$

und damit

$$U_0 = I_{C_2} \left[1 + \frac{R + X_{C_2}}{X_L}\right] \cdot X_{C_1} + I_{C_2} \left(R + X_{C_2}\right)$$

$$U_0 \cdot X_L = I_{C_2} \left\{\left[X_L + (R + X_{C_2})\right] \cdot X_{C_1} + X_L \left(R + X_{C_2}\right)\right\}$$

$$I_{C_2} = \frac{U_0 \cdot X_L}{\left[X_L + (R + X_{C_2})\right] \cdot X_{C_1} + X_L \left(R + X_{C_2}\right)}$$

$$I_{C_2} = \frac{U_0 \cdot X_L}{X_L \cdot X_{C_1} + \left(X_L + X_{C_1}\right)\left(R + X_{C_2}\right)}$$

$$U_R = R \cdot I_{C_2} = \frac{U_0 \cdot X_L \cdot R}{X_L \cdot X_{C_1} + \left(X_L + X_{C_1}\right)\left(R + X_{C_2}\right)}$$

Mit

$$X_L = i\omega L$$

$$X_{C_i} = \frac{1}{i\omega C_i}$$

bekommen wir

$$\hat{U}_R = \frac{i\omega L \cdot R}{i\omega L \cdot \frac{1}{i\omega C_1} + \left(i\omega L + \frac{1}{i\omega C_1}\right)\left(R + \frac{1}{i\omega C_2}\right)} \hat{U}_0$$

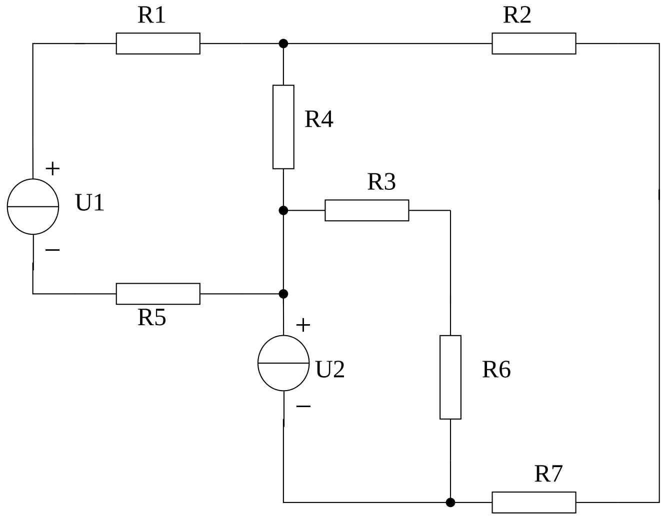
Wir multiplizieren mit $i\omega C_1 \cdot i\omega C_2 = -\omega^2 C_1 C_2$ und bekommen

$$\hat{U}_R = \frac{-i\omega^3 C_1 C_2 L \cdot R}{-\omega^2 L \cdot C_2 + \left(-\omega^2 L C_1 + 1\right)\left(i\omega R \cdot C_2 + 1\right)} \hat{U}_0$$

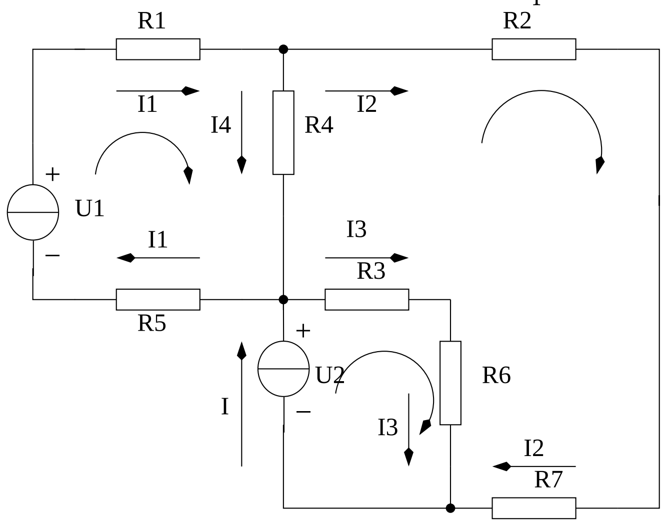
oder

$$\hat{U}_R = \frac{-i\omega^3 C_1 C_2 L \cdot R}{1 + \omega R \cdot C_2 - \omega^2 L \cdot (C_1 + C_2) - i\omega^3 R L C_1 C_2} \hat{U}_0$$

2. Wir formen um (L bedeutet für Gleichspannungen und –ströme einen Kurzschluss, C eine Unterbrechung)



Wir haben drei Schlaufen und die entsprechenden Ströme



Die relevanten Gleichungen sind:

$$U_1 = U_{R_1} + U_{R_4} + U_{R_5}$$

$$
\begin{aligned}
U_2 &= U_{R_3} + U_{R_6} \\
0 &= U_{R_2} + U_{R_7} - U_{R_6} - U_{R_3} - U_{R_4} \\
I_1 &= I_2 + I_4 \\
I_4 + I &= I_1 + I_3 \\
I &= I_2 + I_3 \\
U_{R_1} &= R_1 \cdot I_1 \\
U_{R_2} &= R_2 \cdot I_2 \\
U_{R_3} &= R_3 \cdot I_3 \\
U_{R_4} &= R_4 \cdot I_4 \\
U_{R_5} &= R_5 \cdot I_1 \\
U_{R_6} &= R_6 \cdot I_3 \\
U_{R_7} &= R_7 \cdot I_2
\end{aligned}
$$

Wir lösen nach I ein und setzen ein

$$I = I_2 + I_3$$

und erhalten

$$
\begin{aligned}
U_1 &= I_1\, R_1 + I_4\, R_4 + I_1\, R_5 \\
U_2 &= I_3\, R_3 + I_3\, R_6 \\
0 &= I_2\, R_2 + I_2\, R_7 - I_3\, R_6 - I_3\, R_3 - I_4\, R_4 \\
I_1 &= I_2 + I_4 \\
I_4 + I_2 &= I_1
\end{aligned}
$$

Wir setzen I_1 ein

$$
\begin{aligned}
U_1 &= (I_2 + I_4)\, R_1 + I_4\, R_4 + (I_2 + I_4)\, R_5 \\
U_2 &= I_3\, R_3 + I_3\, R_6 \\
0 &= I_2\, R_2 + I_2\, R_7 - I_3\, R_6 - I_3\, R_3 - I_4\, R_4
\end{aligned}
$$

Wir erhalten

$$I_2 = \frac{I_4\, R_4 + I_3\, R_6 + I_3\, R_3}{R_2 + R_7}$$

Daraus folgt

$$
\begin{aligned}
U_1 &= \left(\frac{I_4\, R_4 + I_3\, R_6 + I_3\, R_3}{R_2 + R_7} + I_4\right) R_1 \\
&\quad + I_4\, R_4 + \left(\frac{I_4\, R_4 + I_3\, R_6 + I_3\, R_3}{R_2 + R_7} + I_4\right) R_5 \\
U_2 &= I_3\, R_3 + I_3\, R_6
\end{aligned}
$$

Wir berechnen I_3

$$I_3 = \frac{U_2}{R_6 + R_3}$$

und erhalten

$$U_1 = \left(\frac{I_4\,R_4 + U_2}{R_2 + R_7} + I_4\right)(R_1 + R_5) + I_4\,R_4$$

$$U_1 = U_2\frac{R_1 + R_5}{R_2 + R_7} + I_4\left((R_1 + R_5) + R_4\left(1 + \frac{R_1 + R_5}{R_2 + R_7}\right)\right)$$

$$U_1 - U_2\frac{R_1 + R_5}{R_2 + R_7} = I_4\left((R_1 + R_5) + R_4\left(1 + \frac{R_1 + R_5}{R_2 + R_7}\right)\right)$$

$$U_1\,(R_2 + R_7) - U_2\,(R_1 + R_5) = I_4\,((R_1 + R_5)\,(R_2 + R_7) + R_4 + (R_2 + R_7 + R_1 + R_5))$$

und damit

$$I_4 = \frac{U_1\,(R_2 + R_7) - U_2\,(R_1 + R_5)}{(R_1 + R_5)\,(R_2 + R_7) + R_4 + (R_2 + R_7 + R_1 + R_5)}$$

$$I_2 = \frac{R_4}{R_2 + R_7}\frac{U_1\,(R_2 + R_7) - U_2\,(R_1 + R_5)}{(R_1 + R_5)\,(R_2 + R_7) + R_4 + (R_2 + R_7 + R_1 + R_5)} + \frac{U_2}{R_2 + R_7}$$

$$I_1 = \left(\frac{R_4}{R_2 + R_7} + 1\right)\frac{U_1\,(R_2 + R_7) - U_2\,(R_1 + R_5)}{(R_1 + R_5)\,(R_2 + R_7) + R_4 + (R_2 + R_7 + R_1 + R_5)} + \frac{U_2}{R_2 + R_7}$$

$$I = \frac{R_4}{R_2 + R_7}\frac{U_1\,(R_2 + R_7) - U_2\,(R_1 + R_5)}{(R_1 + R_5)\,(R_2 + R_7) + R_4 + (R_2 + R_7 + R_1 + R_5)} + \frac{U_2}{R_2 + R_7} + \frac{U_2}{R_6 + R_3}$$

$$U_{R1} = R_1\left[\left(\frac{R_4}{R_2 + R_7} + 1\right)\frac{U_1\,(R_2 + R_7) - U_2\,(R_1 + R_5)}{(R_1 + R_5)\,(R_2 + R_7) + R_4 + (R_2 + R_7 + R_1 + R_5)} + \frac{U_2}{R_2 + R_7}\right]$$

$$U_{R_2} = R_2\left(\frac{R_4}{R_2 + R_7}\frac{U_1\,(R_2 + R_7) - U_2\,(R_1 + R_5)}{(R_1 + R_5)\,(R_2 + R_7) + R_4 + (R_2 + R_7 + R_1 + R_5)} + \frac{U_2}{R_2 + R_7}\right)$$

$$U_{R_3} = R_3\frac{U_2}{R_6 + R_3}$$

$$U_{R_4} = R_4\left(\frac{U_1\,(R_2 + R_7) - U_2\,(R_1 + R_5)}{(R_1 + R_5)\,(R_2 + R_7) + R_4 + (R_2 + R_7 + R_1 + R_5)}\right)$$

$$U_{R_5} = R_5\left[\left(\frac{R_4}{R_2 + R_7} + 1\right)\frac{U_1\,(R_2 + R_7) - U_2\,(R_1 + R_5)}{(R_1 + R_5)\,(R_2 + R_7) + R_4 + (R_2 + R_7 + R_1 + R_5)} + \frac{U_2}{R_2 + R_7}\right]$$

$$U_{R_6} = R_6\frac{U_2}{R_6 + R_3}$$

$$U_{R_7} = R_7\left(\frac{R_4}{R_2 + R_7}\frac{U_1\,(R_2 + R_7) - U_2\,(R_1 + R_5)}{(R_1 + R_5)\,(R_2 + R_7) + R_4 + (R_2 + R_7 + R_1 + R_5)} + \frac{U_2}{R_2 + R_7}\right)$$

3. (a) Das magnetische Moment der Kompassnadel ist $m_m = 4\pi^2 v^2 I/B = \frac{1}{3}\pi^3 v^2 \rho r^2 \ell^3/B = 0.0524 A \cdot m^2$.

   (b) Die Magnetisierung ist $M = m_m/V = m_m/\left(\pi r^2 l\right) = 7.70 \cdot 10^5 A/m$.

   (c) Die Magnetisierung M hat die Dimension Stromstärke pro Länge und ist gleich dem Oberflächenstrom pro Längeneinheit entlang der Nadel; es folgt $I = M\ell = 2.31 \cdot 10^4 A$.

4. Mit dem im Text gegebenen Ergebnis ist der Drehimpulsbetrag

$$L = \frac{2m_e}{e} m_m = \frac{2m_e}{e} M_s V = \frac{2m_e}{e} M_s \left(\pi r^2 l\right)$$

Er ist verknüpft mit dem magnetischen Moment des Stabes, das entlang dessen Längsachse ausgerichtet ist. Wenn der Stab um diese Achse rotiert, ist sein Drehimpuls $L = I\omega$. Darin ist I das Trägheitsmoment einer Scheibe. Es folgt

$$L = \frac{1}{2} m r^2 \omega = \frac{1}{2}\left(\rho\pi r^2 \ell\right) r^2 \omega$$

Das setzen wir gleich dem Ausdruck für den Drehimpuls und erhalten

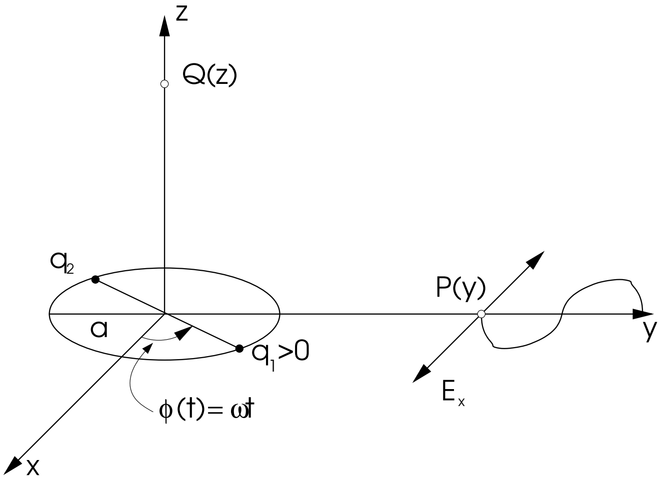
$$\omega = 4 m_e M_s/\left(e\rho r^2\right) = 4{,}92 \cdot 10^{-5} s^{-1}$$

Das ist eine äusserst geringe Frequenz.

5. (a)
   - Das Strahlungsfeld ist $\vec{E}(\vec{r},t) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2}\frac{\vec{a}_\perp(t')}{r}$ wobei $t' = t - r/c$ und $a_\perp$ die Beschleunigungskomponente senkrecht zur Beobachtungsrichtung ist.
   - Nur die x-Komponente zählt. $a_{\perp,1} = a_{x,1} = -a\omega^2\cos(\omega t)$ für die erste Ladung und $a_{\perp,2} = a_{x,2} = a\omega^2\cos(\omega t)$ für die zweite Ladung.
   - Da $y \gg a$ ist $r = a$.
   -

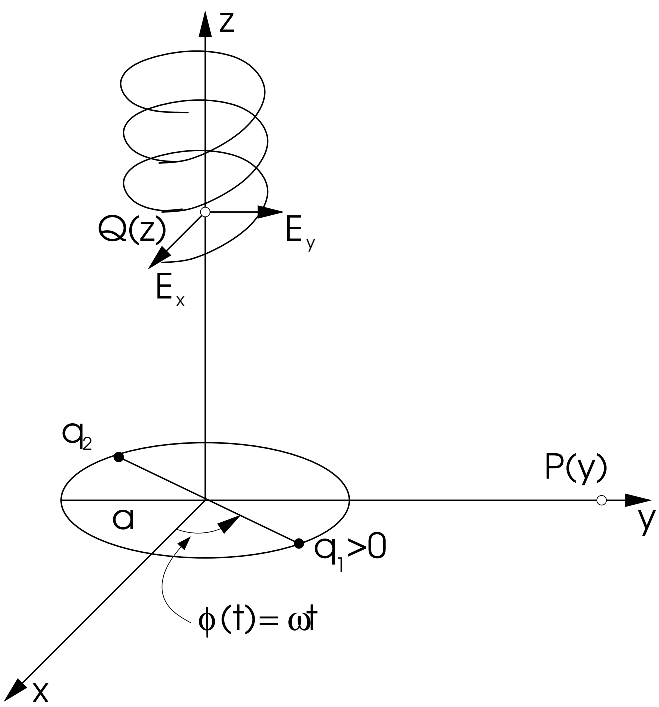
$$E_x(y) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2 y}\left[-q_1 a\omega^2\cos(\omega(t - r/c)) + q_2 a\omega^2\cos(\omega(t - r/c))\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2 y}\left(q_1 - q_2\right) a\omega^2\cos(\omega(t - r/c))$$



(b)

(c)
- Hier ist die wirksame Beschleunigung sowohl in der x- wie auch in der y-Richtung.
- a_x und a_y sind um $\pi/2$ phasenverschoben.
- $z \gg a$
- $$E_x(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2 z}\left(q_1 - q_2\right) a\omega^2 \cos(\omega(t - r/c))$$
  und
  $$E_y(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2 z}\left(q_1 - q_2\right) a\omega^2 \sin(\omega(t - r/c))$$
- Dies ist eine zirkular polarisierte Strahlung.



(d)

(e) Wenn $q_1 = q_2$ dann ist $E_x(y) = 0$

(f) Wenn $q_1 = q_2$ dann ist $E_x(z) = E_y(z) = 0$

6. (a)
   - Die Spannung am Kondensator ist $U_C = -Q/C$
   - Die Spannung am Widerstand ist $U_R = R \cdot I = R \cdot \dot{Q}$
   - Die Spannung an der Spule ist $U_L = -L \cdot \dot{I} = -L \cdot \ddot{Q}$
   - Maschenregel: $U_R = U_C + U_I$ (da nur U_R Verbraucher), also $R \cdot \dot{Q} = -Q/C - L \cdot \ddot{Q}$
   - oder $L \cdot \ddot{Q} + R \cdot \dot{Q} + Q/C = 0$

   (b)
   - Das äussere Feld bewirkt über dem Kondensator eine EMK mit der Grösse $U_{EMK} = E_0 \cdot d \cdot \sin(\omega t)$
   - komplex geschrieben ist $E(t) = -E_0 \cdot i \cdot e^{i\omega t}$, da ja $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i \cdot \sin\alpha$ ist.
   - Also ist $L \cdot \ddot{Q} + R \cdot \dot{Q} + Q/C = -i \cdot E_0 \cdot d \cdot e^{i\omega t}$

   (c)
   - Es ist $I = \dot{Q}$, das heisst, wir leiten einmal ab
   - Mit $L \cdot \dot{I} + R \cdot I + Q/C = -i \cdot E_0 \cdot d \cdot e^{i\omega t}$ erhalten wir
   - $L \cdot \ddot{I} + R \cdot \dot{I} + I/C = E_0 \cdot d \cdot \omega \cdot e^{i\omega t}$

   (d)
   - Wir setzen den Ansatz $I(t) = I_0(\omega)e^{i\omega t}$ ein
   - $L \cdot (-\omega^2) I_0(\omega) e^{i\omega t} + R \cdot (i\omega) I_0(\omega) e^{i\omega t} + \frac{I_0(\omega)}{C} e^{i\omega t} = E_0 \cdot d \cdot \omega \cdot e^{i\omega t}$
   - Wir eliminieren $e^{i\omega t}$ und multiplizieren I_0 aus $I_0(\omega)\left[-L \cdot \omega^2 + i\omega \cdot R + \frac{1}{C}\right] = E_0 \cdot d \cdot \omega$
   - Wir lösen nach $I_0(\omega)$ auf

$$I_0(\omega) = \frac{E_0 \cdot d \cdot \omega}{-L \cdot \omega^2 + i\omega \cdot R + \frac{1}{C}}$$

   - Normalerweise wird die Gleichung so geschrieben:

$$I_0(\omega) = \frac{E_0 \cdot d \cdot \omega}{L\left(-\omega^2 + i\omega \cdot \frac{R}{L} + \frac{1}{CL}\right)}$$

   (e)
   - Die momentane Leistung am Widerstand R ist

$$P(t) = R \cdot \left[\mathcal{R}e\left(I(t)\right)\right]^2 = R \cdot I_0^2 cos^2(\omega t) = R I_0^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos(2\omega t)}{2}\right)$$

   - Gemittelt über eine Anzahl Perioden $n \in \mathbb{N}$ ist $\langle P \rangle_{nT} = \frac{R I_0^2}{2}$

   (f)
   - Mit diesem Resultat ist

$$\langle P(\omega) \rangle_{nT} \;=\; \frac{R}{2} I_0(\omega) \overline{I_0(\omega)}$$

$$= \frac{R}{2} \frac{E_0 \cdot d \cdot \omega}{L\left(-\omega^2 + i\omega \cdot \frac{R}{L} + \frac{1}{CL}\right)} \frac{E_0 \cdot d \cdot \omega}{L\left(-\omega^2 - i\omega \cdot \frac{R}{L} + \frac{1}{CL}\right)}$$

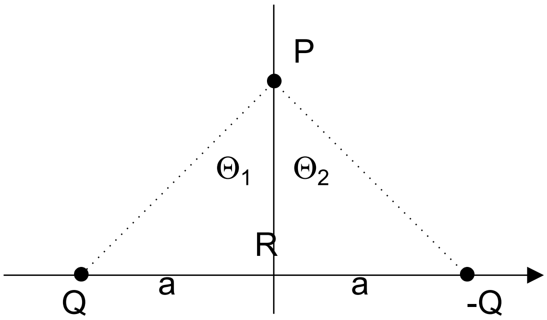
$$= \frac{R\left(E_0 \cdot d \cdot \omega\right)^2}{2L^2\left[\left(\frac{1}{CL} - \omega^2\right)^2 + \omega^2 \cdot \frac{R^2}{L^2}\right]}$$

(g) • Die ungedämpfte Resonanzfrequenz ist $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{L \cdot C}}$

(h) • Bei ω_0 ist $\langle P(\omega_0)\rangle_{nT} = \frac{R\left(E_0 \cdot d \cdot \frac{1}{L \cdot C}\right)^2}{2L^2\left(\frac{1}{L \cdot C}\right)^2 \cdot \frac{R^2}{L^2}} = \frac{(E_0 \cdot d)^2}{2R}$

(i) • Ein statisches äusseres Feld bewirkt auf den Kondensatorplatten eine Ladungstrennung. Da im statischen Falle der Kondensator kurzgeschlossen ist, ist $E = 0$ im Inneren, wobei die Ladungen auf den Platten das äussere Feld kompensieren.

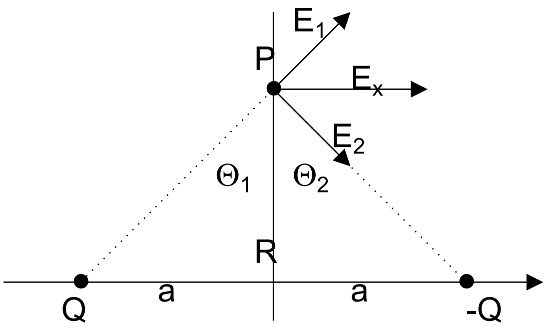
7. (a) Das Magnetfeld, das am Punkt P von einem Teilstrom hervorgerufen wird, ist $B = \left[\mu_0 I / (4\pi R)\right](\sin\theta_1 + \sin\theta_2)$. Die Abbildung zeigt die entsprechenden Grössen:



Hier ist $\sin\theta_1 = \sin\theta_2 = a/\left(R^2 + a^2\right)^{1/2}$.

Daher ist $B = \left[\mu_0 I a/(2\pi R)\right]\left(R^2 + a^2\right)^{-1/2}$.

(b) Die folgende Abbildung zeigt, wie das elektrische Feld an einem Punkt auf der y-Achse im Abstand r von der x-Achse erhalten wird.



Es ist

$$E_x = 2\frac{1}{(4\pi\epsilon_0)}\frac{Q}{(r^2 + a^2)}\sin\theta_1 = 2\frac{1}{(4\pi\epsilon_0)}\frac{Qa}{(r^2 + a^2)^{3/2}}$$

Die Fläche des Kreises ist $dA = 2\pi r dr$, und es folgt

$$E_x dA = \frac{Q}{\epsilon_0}\frac{a}{\left(r^2+a^2\right)^{3/2}} r dr$$

.

(c) Um den elektrischen Fluss heraus, zum Radius R, zu erhalten, integrieren wir $E_x dA = E_x 2\pi r dr$ von $r = 0$ bis $r = R$:

$$\begin{aligned}
\phi_e &= \int_0^R E_x 2\pi r dr \\
&= -\left(\frac{Qa}{\epsilon_0}\right)\frac{1}{\left(r^2+a^2\right)^{1/2}}\bigg|_0^R \\
&= \left(\frac{Qa}{\epsilon_0}\right)\left[\frac{1}{\left(R^2+a^2\right)^{1/2}}+\frac{1}{a}\right]
\end{aligned}$$

Damit ist

$$\epsilon_0 \phi_e = Q\left[1-\frac{a}{\left(R^2+a^2\right)^{1/2}}\right]$$

.

(d) Nach Definition ist $I_V = \epsilon_0 d\phi_e/dt$. Jedoch ist im Ausdruck für ϕ_e die einzige Grösse, die von der Zeit abhängt, Q. Mit $dQ/dt = -I$ erhalten wir $I_V = -I\left[1-a/\left(R^2+a^2\right)^{1/2}\right]$ und $I + I_V = Ia/\left(R^2+a^2\right)^{1/2}$.

(e) Das Gesetz von Ampère besagt, dass das Linienintegral über $\vec{B}\cdot d\vec{\ell}$ längs eines Kreises vom Radius R in der yz-Ebene mit dem Mittelpunkt am Ursprung, das gleich $B(2\pi R)$ ist, auch gleich $\mu_0(I + I_V)$ sein muss. Gemäss dem Ergebnis in 7d ist das $\mu_0 Ia\left(R^2+a^2\right)^{1/2}$. Damit wird

$$B = \frac{\mu_0 I a}{2\pi R}\frac{1}{\left(R^2+a^2\right)^{1/2}}$$

in Übereinstimmung mit dem Resultat in Teil 7a, das wir nach dem Biot-Savart-Gesetz erhielten.

