

Übungsblatt 04

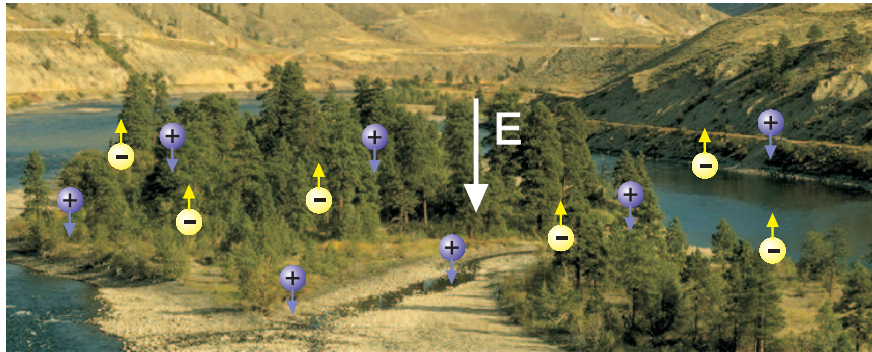
PHYS3100 Grundkurs IIIb (Physik, Wirtschaftsphysik, Physik Lehramt)

Othmar Marti, (othmar.marti@physik.uni-ulm.de)

13. 12. 2004 oder 20. 12. 2004

1 Aufgaben

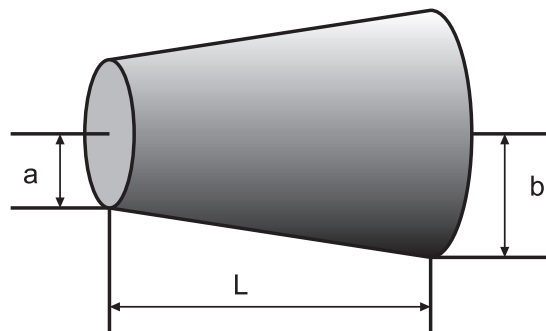
1. Eine dielektrische Platte der Dicke b , mit der Dielektrizitätszahl ϵ , wird in einen Plattenkondensator mit dem Plattenabstand d und der Fläche A gebracht. Berechnen Sie die Kapazität.
2. Zeigen Sie mit der Kontinuitätsgleichung allgemein die 1. Kirchhoffsche Regel (Knotenregel).
3. Berechnen Sie die Driftgeschwindigkeit der Elektronen in Abhängigkeit vom Leiterquerschnitt und Strom für reines Aluminium, Kupfer und Konstantan. Geben Sie Zahlenwerte für Leiter mit 1mm^2 Querschnitt und 100mA Strom. Zur Aufgabe gehört, dass Sie die Zahlenwerte in der Literatur nachschauen.
4. Ein Würfel wird aus gleichen Widerständen R zusammengelötet. Wie gross ist der Widerstand entlang der Raumdiagonale? Wie gross ist der Widerstand entlang der Flächendiagonale? Wie gross ist der Widerstand entlang der Kante?
5. In der unteren Erdatmosphäre sind negative und positive Ionen vorhanden, die durch ionisierende Strahlung radioaktiver Elemente im Boden und durch die Einwirkung kosmischer Strahlung entstehen.



In einer bestimmten Höhe über Boden beträgt dieses atmosphärische Feld 120V/m und ist vertikal nach unten gerichtet. In diesem Feld driften einfach geladene positive Ionen (Konzentration $6.2 \cdot 10^8\text{m}^{-3}$) nach unten. Negativ geladene Ionen (Konzentration $5.5 \cdot 10^8\text{m}^{-3}$) driften nach oben. Die gemessene Leitfähigkeit der Atmosphäre in diesem Bereich beträgt $2.7 \cdot 10^{-14}\Omega^{-1}\text{m}^{-1}$.

- (a) Berechnen Sie die Driftgeschwindigkeit der Ionen (gleich für positive und negative Ionen).
- (b) Berechnen Sie die Stromdichte des Ionenstromes.

6. Ein leitfähiger Körper habe die Form eines Kreiszylinders ohne Spitze.



Die Radien der Endflächen seien a und b , die Länge L . Bei einem schwach konischen Körper kann man annehmen, dass die Stromdichte für jeden Querschnitt angenähert homogen ist.

- (a) Berechnen Sie unter der obigen Annahme den Widerstand des Körpers.
- (b) Stimmt der Grenzfall $a=b$?

2 Lösungen

1. Formal kann man das Problem lösen, indem man die Serieschaltung eines leeren Kondensators mit dem Plattenabstand $d - b$ mit einem gefüllten Kondensator mit dem Plattenabstand b berechnet.

$$C^{-1} = C_{d-b}^{-1} + C_b^{-1}$$

$$C_{d-b} = \epsilon_0 \frac{A}{d-b}$$

$$C_b = \epsilon \epsilon_0 \frac{A}{b}$$

$$C^{-1} = \frac{d-b}{\epsilon_0 A} + \frac{b}{\epsilon \epsilon_0 A} = \frac{\epsilon(d-b) + b}{\epsilon \epsilon_0 A}$$

$$C = \epsilon \epsilon_0 \frac{A}{\epsilon d + (1-\epsilon)b}$$

2. Wir verwenden

$$\int_A \vec{i} \cdot d\vec{a} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho_{el} dV$$

Seien A_i die Flächen, die eine Oberfläche A um den betrachteten Knoten aus den i -ten Zuleitungen herauschneidet. Dann ist

$$\int_A \vec{i} \cdot d\vec{a} = \sum_{i=1}^N \left[\int_{A_i} \vec{i} \cdot d\vec{a} \right] = \sum_{i=1}^N I_i$$

Andererseits soll am Knoten keine Quelle sein, also

$$\frac{d\rho_{el}}{dt} = 0$$

Damit folgt das erste Kirchhoffsche Gesetz

$$\sum_{i=1}^N I_i = 0$$

3. Wir berechnen die Atomdichte (Atome pro Einheitsvolumen) aus

$$n = N_A \cdot \frac{1}{M} \cdot \rho_M$$

wobei N_A die Anzahl Atome pro Mol (Avogadro-Zahl), M die Molmasse und ρ_M die Massendichte ist. Die Anzahl Elektronen ist

$$n_e = Z_L \cdot n$$

wobei Z_L die Anzahl Leitungselektronen pro Atom ist. Weiter haben wir

$$i = \frac{I}{A} = n_e \cdot e \cdot v_d$$

wobei v_d die Driftgeschwindigkeit und A die Querschnittsfläche ist. Also haben wir

$$v_d = \frac{I}{n_e \cdot e \cdot A} = \frac{I}{Z_L \cdot n \cdot e \cdot A} = \frac{I \cdot M}{Z_L \cdot N_A \cdot \rho_M \cdot e \cdot A}$$

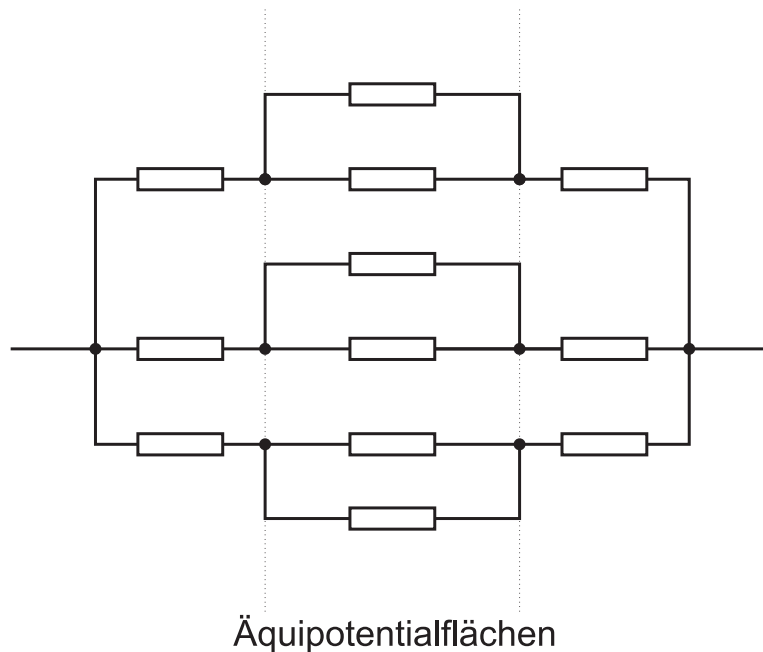
Die Werte für Kupfer und Aluminium können fast in jedem Physikbuch nachgeschaut werden. Konstantan ist eine Legierung die meistens aus 55% Kupfer und 45% Nickel besteht (Cu55Ni45). Die Massendichte ist $8800 \pm 200 \text{ kg/m}^3$. Die Molmasse können wir aus den Volumenanteilen berechnen:

$$\begin{aligned} M_{\text{Konstantan}} &= 0.55 \cdot M_{\text{Kupfer}} + 0.45 \cdot M_{\text{Nickel}} \\ &= (0.55 \cdot 0.06354 + 0.45 \cdot 0.05871) \frac{\text{kg}}{\text{mol}} \\ &= 0.061367 \frac{\text{kg}}{\text{mol}} \end{aligned}$$

Wir bekommen also

Material	$\rho_m / (\text{kg/m}^3)$	$M / (\text{kg/mol})$	Z_L	$v_d / (\text{m/s})$
Aluminium	2699	0.0269815	1	$1.036583288 \cdot 10^{-5}$
Kupfer	8960	0.06354	1	$7.353264669 \cdot 10^{-6}$
Konstantan	8800	0.061367	1	$7.230914358 \cdot 10^{-6}$

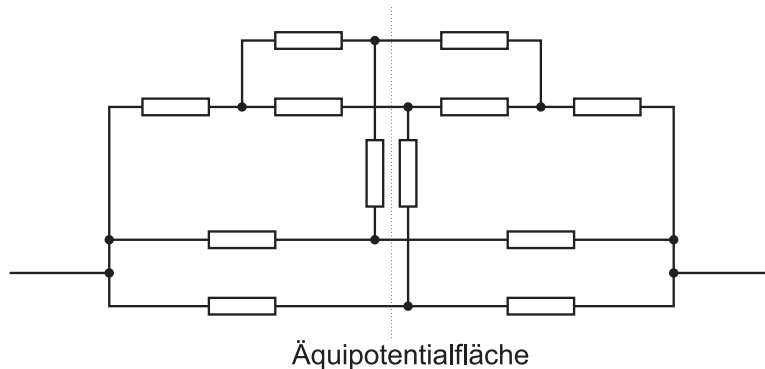
4. Um den Widerstand entlang einer Raumdiagonalen zu berechnen zeichnen wir den Würfel wie



und erkennen die Äquipotentialflächen. Also ist

$$R_{Diag} = \frac{R}{3} + \frac{R}{6} + \frac{R}{3} = \frac{5}{6}R$$

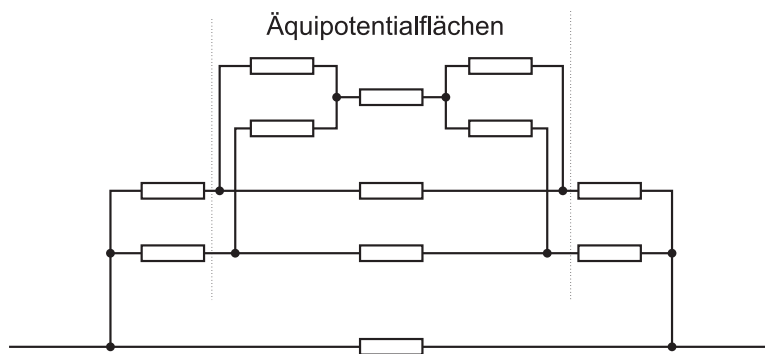
Um den Widerstand entlang einer Seitendiagonale zu berechnen zeichnen wir den Würfel wie folgt um:



Linke und rechte Seite sind identisch. Also haben wir

$$R_{Seitendiag} = \frac{2}{\frac{2}{R} + \frac{2}{3R}} = \frac{6R}{6 + 2} = \frac{3}{4}R$$

Um den Widerstand entlang einer Kante zu berechnen, zeichnen wir den Würfel wie folgt um



Wir erhalten für den Widerstand entlang einer Kante

$$R_{Kante} = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{2R/2+2R/5}} = \frac{R}{1 + \frac{5}{7}} = \frac{7}{12}R$$

5. Wir verwenden

$$i = \sigma E = (n_+ + n_-)ev_d$$

(a) Die Driftgeschwindigkeit ist

$$v_d = \frac{\sigma E}{(n_+ + n_-)e} = \frac{(2.7 \cdot 10^{-14} \Omega^{-1} m^{-1}) (120 V m^{-1})}{[(6.2 + 5.5) \cdot 10^{-8} m^{-3}] (1.6 \cdot 10^{-19} C)} = 0.0173 \frac{m}{s}$$

(b) Die Stromdichte ist

$$i = \sigma E = (2.7 \cdot 10^{-14} \Omega^{-1} m^{-1}) (120 V m^{-1}) = 3.24 \cdot 10^{-12} \frac{A}{m^2}$$

6. Für ein kleines Leiterstück der Länge dx mit dem Radius $r(x)$ ist der differentielle Widerstand

$$dR = \rho \frac{dx}{\pi r(x)^2}$$

Wir lassen x von 0 nach ℓ laufen und setzen

$$r(x) = a + \frac{b-a}{\ell} x$$

Also ist

$$dR = \frac{\rho}{\pi \left(a + \frac{b-a}{\ell} x\right)^2} dx$$

Die Lösung dieses Integrals ist

$$R = \int_0^\ell \frac{\rho}{\pi \left(a + \frac{b-a}{\ell} x\right)^2} dx = - \frac{\rho \ell}{\pi \left(a + \frac{(b-a)x}{\ell}\right) (b-a)} \Bigg|_0^\ell = \frac{\rho \ell}{\pi ab}$$