Klassische und Relativistische Mechanik

Physik, Wirtschaftsphysik und Lehramt Physik

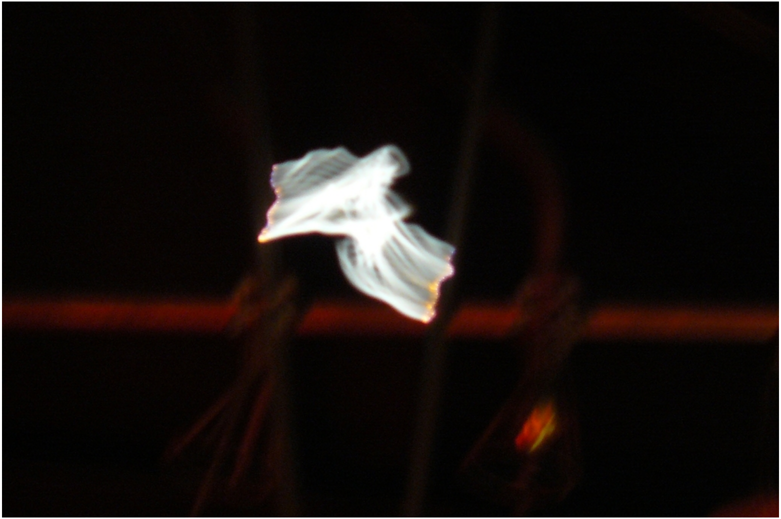
Othmar Marti | 16. 01. 2008 | Institut für Experimentelle Physik

ulm university universität ulm

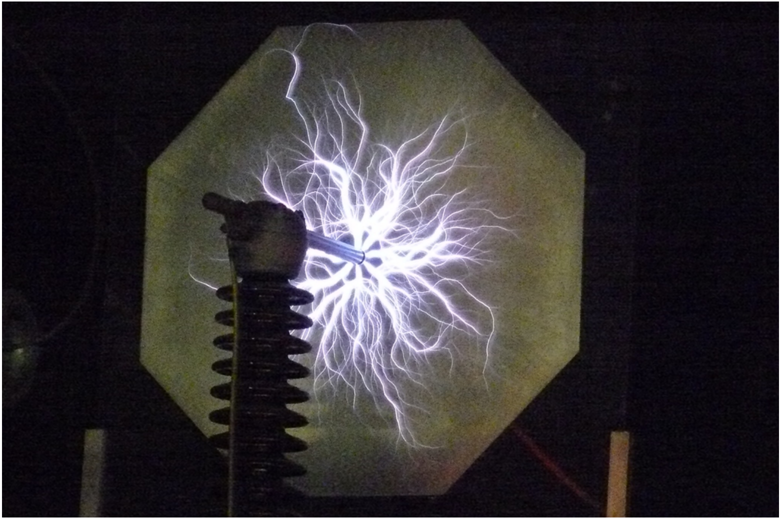
Exkursion Technorama

Exkursion Technorama

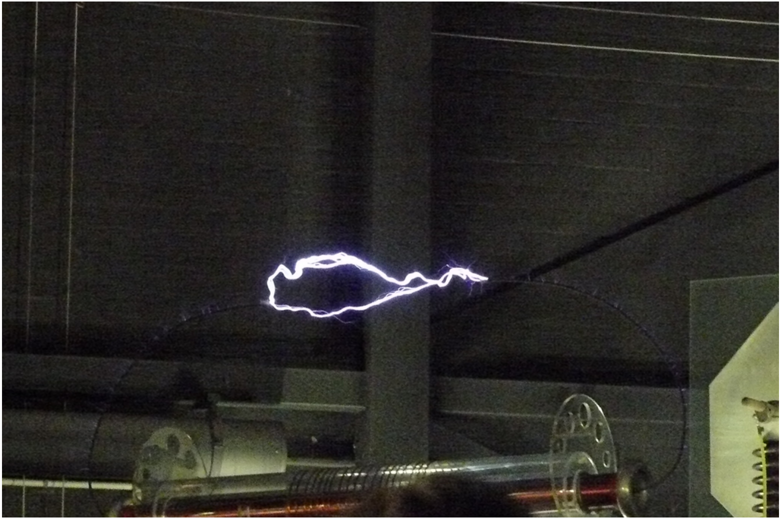
Exkursion Technorama



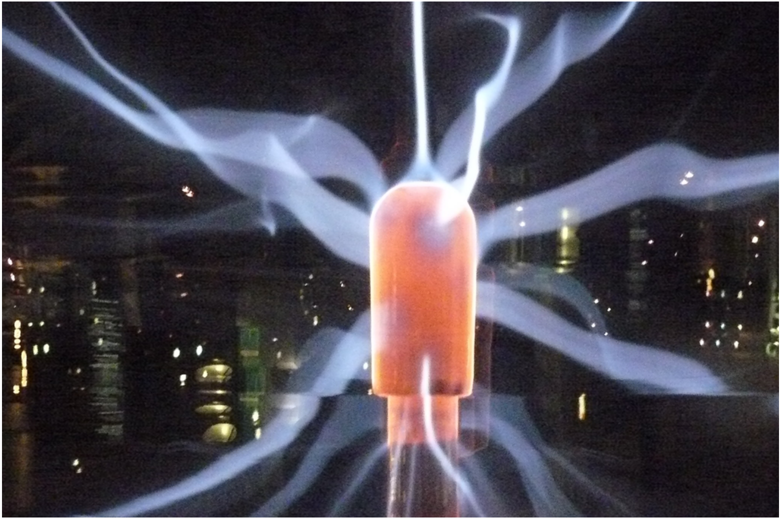
Exkursion Technorama



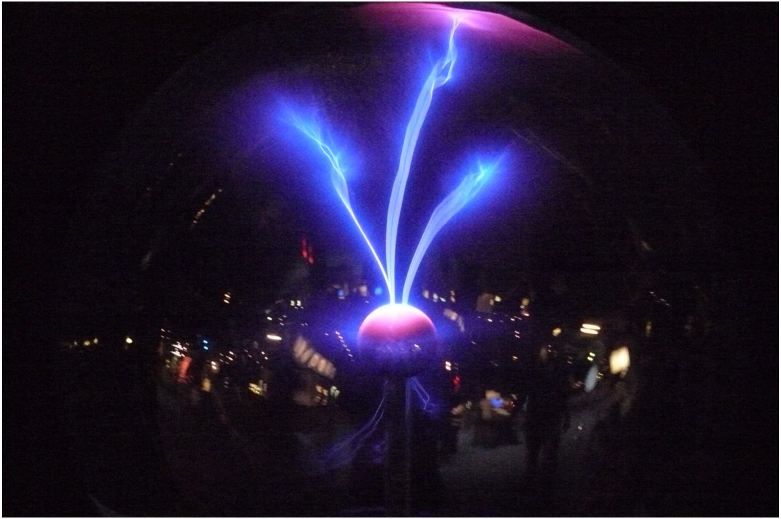
Exkursion Technorama



Exkursion Technorama



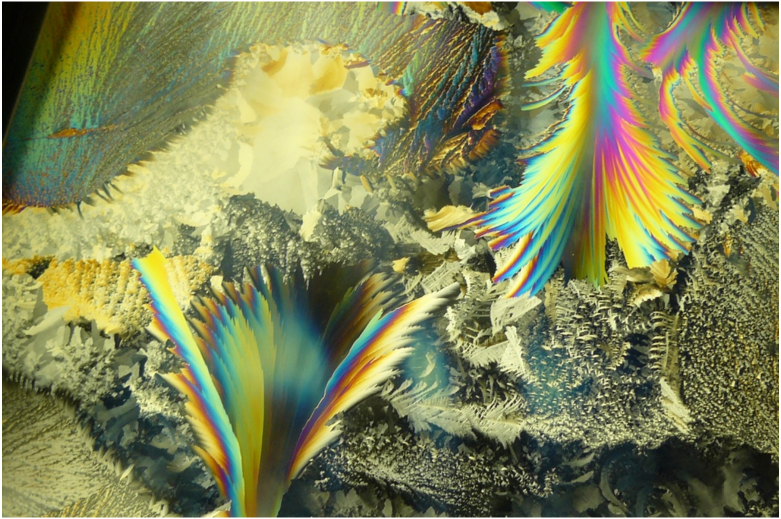
Exkursion Technorama



Exkursion Technorama

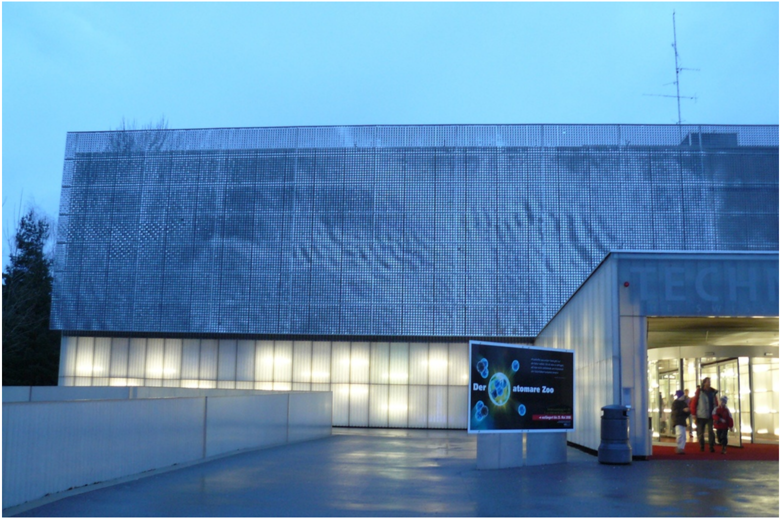
Exkursion Technorama

Exkursion Technorama



Exkursion Technorama

Exkursion Technorama



Konstantes äusseres Drehmoment

Wirkt ein konstantes äusseres *Drehmoment* $\boldsymbol{T}$ so gilt

$$\boldsymbol{T} = \dot{\boldsymbol{L}} = I\,\dot{\boldsymbol{\omega}}$$

oder

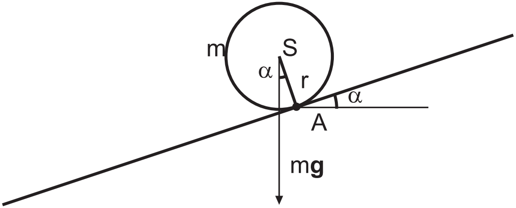
$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \frac{1}{I}\boldsymbol{T}$$

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{I}\boldsymbol{T}t$$

und

$$\phi = \frac{1}{2}\frac{1}{I}Tt^2$$

Rollender Zylinder



Rollender Zylinder

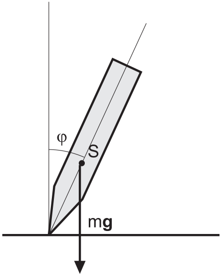
Rollender Zylinder

A ist die momentane Drehachse des Zylinders (Warum ist die Drehachse die Auflagelinie?). Nach dem Satz von Steiner ist
$I = I_s + mr^2$
Also ist $T = m\left|\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{g}\right| = mgr\sin\alpha = \left(I_s + mr^2\right)\dot{\omega}$

$$a = \ddot{s} = r\dot{\omega} = r\frac{mgr\sin\alpha}{I_s + mr^2} = \frac{1}{1 + \frac{I_s}{mr^2}} g\sin\alpha$$

Massivzylinder $I_S = \frac{1}{2}mr^2$	$a = \frac{2}{3}g\sin\alpha$
Hohlzylinder $I_S = mr^2$	$a = \frac{1}{2}g\sin\alpha$
Kugel $I_S = \frac{2}{5}mr^2$	$a = \frac{5}{7}g\sin\alpha$
Rutschender Körper	$a = g\sin\alpha$

Kippen eines starren Körpers



Kippen eines starren Körpers

Kippen eines starren Körpers

Hier ist für kleine Auslenkungen $T \propto \varphi$ und nicht bei beim *Pendel* $T \propto -\varphi$. Die Drehmomentengleichung lautet

$$T = D\varphi = I\,\ddot{\varphi}$$

Sie hat die Lösungen

$$\varphi = \varphi_0 e^{\omega t} + \tilde{\varphi} e^{-\omega t}$$

mit $\omega = \sqrt{\frac{D}{I}}$.

Wenn zu Beginn der Bewegung $\dot{\varphi} = 0$ ist (Anfangsbedingung) ist die Lösung

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}\varphi_0\left(e^{\omega t} + e^{-\omega t}\right) = \varphi_0 \cosh \omega t$$

Kippender Kamin

Beispiel: Kippender Kamin

Das *Trägheitsmoment* eines Kamins, der um seinen Fuss rotiert, ist

$$I = \frac{1}{3} m\ell^2$$

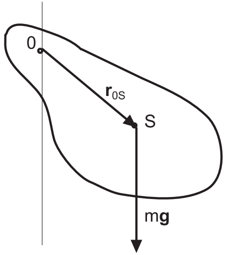
Dann ist die Drehmomentengleichung

$$T = m \cdot g \cdot \frac{\ell}{2} \sin\varphi \sim \frac{1}{2} mg\ell\varphi = D\varphi$$

Daraus folgt für den Betrag der Drehfrequenz

$$\omega = \sqrt{\frac{\frac{1}{2} mg\ell}{\frac{1}{3} m\ell^2}} = \sqrt{\frac{3}{2} \frac{g}{\ell}}$$

Physikalisches Pendel



Physikalisches Pendel

Physikalisches Pendel

Die Drehmomentengleichung für das physikalische *Pendel* lautet

$$T_{axial} = -\left|\boldsymbol{r}_{0S} \times m\boldsymbol{g}\right| = -mgr_{0S}\sin\varphi$$

Der *Drehimpuls* ist

$$L_p = I\omega = \left(I_s + mr_{0S}^2\right)\omega$$

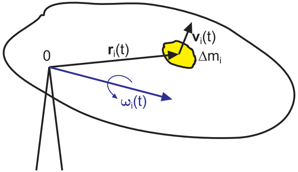
Mit $T_{axial} = I\dot{\omega}$ wird

$$-\sin\varphi r_{0S}mg = \left(I_s + mr_{0S}^2\right)\dot{\omega} = \left(I_s + mr_{0S}^2\right)\ddot{\varphi}$$

Kreisel

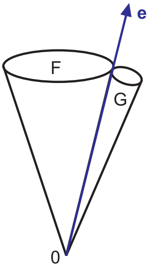
Definition: Ein Kreisel ist ein starrer Körper, dessen Bewegung durch einen Fixpunkt festgelegt ist.

Kreisel



Kreisel

Kreisel



Polkegel

Trägheitstensor

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$$

Für ein Massenelement dm gilt

$$d\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times (dm\boldsymbol{v})$$

Mit $\boldsymbol{v} = \omega \times \boldsymbol{r}$ wird

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{L} &= \boldsymbol{r} \times (\omega \times \boldsymbol{r})\, dm \\ &= (\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r})\, \omega dm - (\boldsymbol{r} \cdot \omega)\, \boldsymbol{r} dm \end{aligned}$$

Also wird

$$\boldsymbol{L} = \omega \int \boldsymbol{r}^2 dm - \int \boldsymbol{r}\, (\boldsymbol{r} \cdot \omega)\, dm$$

Trägheitstensor

Wir setzen $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ und betrachten die x-Komponente:

$$
\begin{aligned}
L_x &= \omega_x \int \boldsymbol{r}^2 dm - \int x \left(x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z \right) dm \\
&= \omega_x \int \left(x^2 + y^2 + z^2 - x^2 \right) dm - \omega_y \int xydm - \omega_z \int xzdm
\end{aligned}
$$

also ist $I_{xx} = \int \left(y^2 + z^2 \right) dm$ und $I_{xy} = -\int xydm$ und $I_{xz} = -\int xzdm$, wie behauptet.
Die Grösse $-I_{xy} = \int xydm$ heisst Deviationsmoment.

Trägheitstensor

$$L_x = I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z$$
$$L_y = I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z$$
$$L_z = I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z$$

oder

$$\boldsymbol{L} = \overleftrightarrow{I}_0 \boldsymbol{\omega}$$

oder $\boldsymbol{L}_i = I_{ij}\omega_j$. $\overleftrightarrow{I}_0$ heisst der Trägheitstensor des Kreisels (des starren Rotators) bezüglich dem Fixpunkt 0. Die Komponenten von $\overleftrightarrow{I}_0$ sind

$$I_{xx} = \int (y^2 + z^2)\, dm \quad I_{yy} = \int (x^2 + z^2)\, dm \quad I_{zz} = \int (x^2 + y^2)\, dm$$
$$I_{xy} = -\int xydm \quad I_{xz} = -\int xzdm \quad I_{yz} = -\int yzdm$$

Eigenschaften des Trägheitstensors

Die Spur von $\overleftrightarrow{I}_0$ ändert sich nicht bei einer Drehung des Koordinatensystems

$$spur\left(\overleftrightarrow{I_0}\right) = I_{xx}+I_{yy}+I_{zz} = 2\int\left(x^2+y^2+z^2\right)dm = 2\int r^2 dm$$

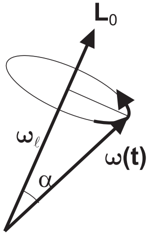
Weiter gilt

$$I_{xx}+I_{yy}-I_{zz} = 2\int z^2 dm \geq 0$$

und zyklisch.

Kräftefreier Kreisel

Definition: Ein Kreisel heisst kräftefrei, wenn $\boldsymbol{T}_0$ bezüglich des Fixpunktes 0 verschwindet.

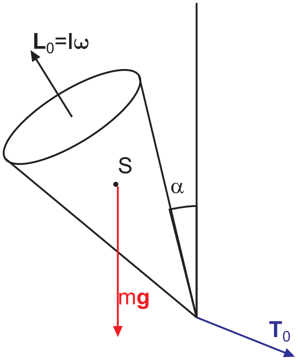


Kräftefreier Kreisel

Mögliche Bahnkurven

Bei einem reibungsfreien Kreisel ist sowohl seine kinetische Energie wie auch der Betrag seines Drehimpulses erhalten. Die Winkelgeschwindigkeit ω bestimmt zusammen mit dem Trägheitstensor beide Grössen. Im Hauptachsensystem folgt aus der Erhaltung der kinetischen Energie, dass ω sich auf dem Poinsot-Ellipsoid P bewegen muss. Die Erhaltung des Drehimpuls-Quadrates $\boldsymbol{L}_0^2$ bedingt, dass im Hauptachsensystem ω sich auf dem Drallellipsoid D befinden muss. Die möglichen Bahnkurven sind also die Schnittmenge von P und D.

Präzession



Präzedierender Kreisel